

マンデルスタム変数

不変振幅の話で出てくるマンデルスタム変数の話をします。

ここでは QED で求めた結果を使っているの、細かい部分は QED を見てください。

見ていく散乱過程は、電子-陽電子散乱 ($e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$) として、不変振幅のファインマン図は図 1 です。電子が運動量として $e^-(p_1), e^-(p_2)$ 、陽電子が $e^+(k_1), e^+(k_2)$ を持つとします。最初はスピンは無視して扱います。

手っ取り早いので、QED での「電子-陽子散乱」と同じようにして不変振幅を求めます。スピン 0 として、クライン・ゴールドン方程式を使います。クライン・ゴールドン方程式のカレントは電流密度と解釈できるので、カレントに電荷 e をかけて

$$j_\mu(x) = -ie(\phi_f^*(\partial_\mu \phi_i) - (\partial_\mu \phi_f^*)\phi_i)$$

とします。 ϕ_i を始状態、 ϕ_f を終状態とし、両方とも平面波とします。QED の「電子-陽子散乱」のように S 行列はカレントによって

$$S = -i \int d^4x d^4y j_\mu(x) \frac{-1}{q^2} j^\mu(y)$$

と書けます。 $-1/q^2$ は電磁場の伝播関数部分です。

反粒子は、粒子の運動量を反転させたものとして扱うので、電子-電子散乱として最後に符号を反転させることにします。ただし、同種粒子とすると状況が変わってしまうので、それは無視します。(電子-ミューオン散乱とでもすればいい)。

j_μ は平面波を使えば (規格化定数は無視します)

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= -ie(e^{ip_2x}(\partial_\mu e^{-ip_1x}) - (\partial_\mu e^{ip_2x})e^{-ip_1x}) \\ &= -ie(-ip_1e^{i(p_2-p_1)x} - ip_2e^{i(p_2-p_1)x})_\mu \\ &= -e(p_1 + p_2)_\mu e^{i(p_2-p_1)x} \end{aligned}$$

よって、 S 行列は

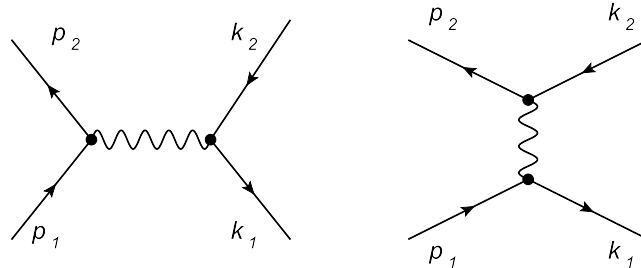


図 1

$$\begin{aligned}
S &= -i \int d^4x d^4y (-e(p_1 + p_2)_\mu e^{i(p_2 - p_1)x}) \frac{-1}{q^2} (-e(k_1 + k_2)^\mu e^{i(k_2 - k_1)y}) \\
&= -ie^2 (p_1 + p_2)_\mu \frac{-1}{q^2} (k_1 + k_2)^\mu \delta^4(p_2 + k_2 - p_1 - k_1)
\end{aligned}$$

そして、不変振幅を抜き出せば

$$\mathcal{M} = (ie(p_1 + p_2)_\mu) \frac{1}{q^2} (ie(k_1 + k_2)^\mu)$$

これがスピン 0 としたときの電子-電子散乱の不変振幅になります (同種粒子であることは無視)。これを電子-陽電子散乱にするために、 k_1, k_2 の符号を反転させて

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= (ie(p_1 + p_2)_\mu) \frac{1}{q^2} (ie(-k_1 - k_2)^\mu) \\
&= (ie(p_1 + p_2)_\mu) \frac{1}{(p_1 - k_1)^2} (ie(-k_1 - k_2)^\mu)
\end{aligned}$$

そして、もう 1 つの図を加えて

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= (ie(p_1 + p_2)_\mu) \frac{1}{q^2} (ie(-k_1 - k_2)^\mu) + (ie(p_1 - k_1)_\mu) \frac{1}{q^2} (ie(-k_2 + p_2)^\mu) \\
&= -e^2 \frac{(p_1 + p_2)_\mu (-k_1 - k_2)^\mu}{(p_2 - p_1)^2} - e^2 \frac{(p_1 - k_1)_\mu (-k_2 + p_2)^\mu}{(p_1 + k_1)^2} \tag{1}
\end{aligned}$$

これが電子-陽電子散乱での不変振幅になります。同種粒子としていない電子-電子散乱から電子-陽電子散乱にするときに、 $k_2 \leftrightarrow -k_1$ と置き換えましたが、このような操作によって電子-電子散乱 (粒子-粒子散乱) から電子-陽電子散乱 (粒子-反粒子散乱) へ置き換えることを交叉 (crossing) と呼びます。

次に 2 つの粒子 A, B が散乱後に C, D になる散乱 $A + B \rightarrow C + D$ を考えます。ここで、マンデルスタム (Mandelstam) 変数と呼ばれる

$$\begin{aligned}
s &= (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 \\
t &= (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2 \\
u &= (p_A - p_D)^2 = (p_B - p_C)^2
\end{aligned}$$

というのを定義します。これらはローレンツ不変な量です。そして、保存則として

$$p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu$$

が成り立つとします。この定義からすぐに、on-shell なら

$$\begin{aligned}
s + t + u &= p_A^2 + p_B^2 + 2p_A \cdot p_B + p_A^2 + p_C^2 - 2p_A \cdot p_C + p_A^2 + p_D^2 - 2p_A \cdot p_D \\
&= p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2 + 2p_A^2 + 2p_A \cdot (p_B - p_C - p_D) \\
&= p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2 + 2p_A^2 + 2p_A \cdot (p_C + p_D - p_A - p_C - p_D) \\
&= p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2 \\
&= m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2
\end{aligned}$$

となるのが分かります。

マンデルスタム変数によってどうなるのか見ていきます。電子-陽電子散乱の不変振幅 (1) での $p_1, k_1 \rightarrow p_2, k_2$ を、対応を取るために $p_A, p_B \rightarrow p_C, p_D$ に置き換えて

$$\mathcal{M} = -e^2 \frac{(p_A + p_C)_\mu (-p_B - p_D)^\mu}{(p_C - p_A)^2} - e^2 \frac{(p_A - p_B)_\mu (-p_D + p_C)^\mu}{(p_A + p_B)^2}$$

第 1 項の分子は (質量は $p_i^2 = m^2 (i = A, B, C, D)$)

$$\begin{aligned}
(p_A + p_C)_\mu (p_B + p_D)^\mu &= p_A \cdot p_B + p_A \cdot p_D + p_C \cdot p_B + p_C \cdot p_D \\
&= p_A \cdot (p_C + p_D - p_A) + p_A \cdot p_D + p_C \cdot (p_C + p_D - p_A) + p_C \cdot p_D \quad (p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu) \\
&= p_A \cdot p_C + p_A \cdot p_D - p_A^2 + p_A \cdot p_D + p_C^2 + p_C \cdot p_D - p_C \cdot p_A + p_C \cdot p_D \\
&= 2p_A \cdot p_D + 2p_C \cdot p_D \\
&= -(p_A - p_D)^2 + p_A^2 + p_D^2 + (p_C + p_D)^2 - p_C^2 - p_D^2 \\
&= -u + s
\end{aligned}$$

第 2 項の分子は

$$\begin{aligned}
(p_A - p_B)_\mu (p_D - p_C)^\mu &= p_A \cdot p_D - p_A \cdot p_C - p_B \cdot p_D + p_B \cdot p_C \\
&= p_A \cdot (p_A + p_B - p_C) - p_A \cdot p_C - p_B \cdot (p_A + p_B - p_C) + p_B \cdot p_C \\
&= p_A^2 + p_A \cdot p_B - p_A \cdot p_C - p_A \cdot p_C - p_B \cdot p_A - p_B^2 + p_B \cdot p_C + p_B \cdot p_C \\
&= -2p_A \cdot p_C + 2p_B \cdot p_C \\
&= (p_A - p_C)^2 - p_A^2 - p_C^2 - (p_B - p_C)^2 + p_B^2 + p_C^2 \\
&= (p_A - p_C)^2 - (p_B - p_C)^2 \\
&= t - u
\end{aligned}$$

よって、不変振幅はマンデルスタム変数によって

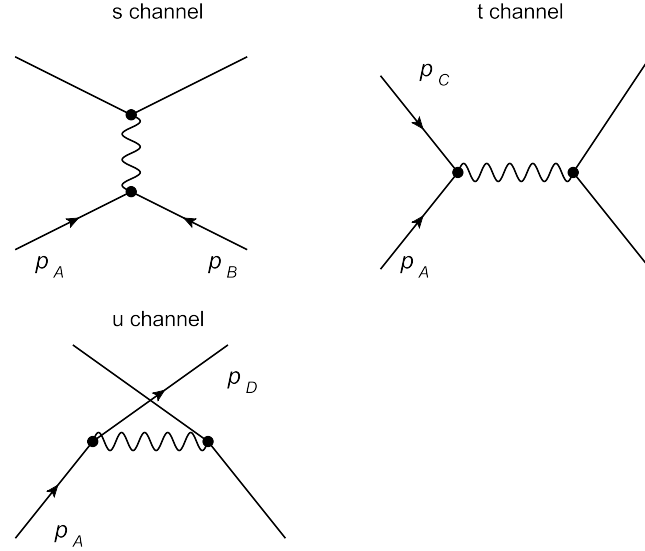


図 2

$$\mathcal{M} = e^2 \frac{s-u}{(p_C - p_A)^2} + e^2 \frac{t-u}{(p_A + p_B)^2} = e^2 \frac{s-u}{t} + e^2 \frac{t-u}{s}$$

第1項と第2項が s と t の入れ替えに対して対称なので、 s と t の交換によって電子-陽電子散乱で現われる2つの図が関係づけられているのが分かります。

s チャンネル、 t チャンネル、 u チャンネルと呼ばれるものがあり、図2のようになっています。 $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ では、 s チャンネルと t チャンネルの和です。

マンダムスタム変数を使う例を電子、陽電子からミューオン、反ミューオンへの散乱 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ を使って簡単に見ておきます ($\mu^\pm$ はミューオン)。交叉を使うために、電子とミューオンによる $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ から求めることにします。マンダムスタム変数が出てくることを見ただけなので、詳しく計算しません。

$e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ は QED での「電子-陽子散乱」の結果を使います。なので、詳しいことはそっちを見てください。ただし、QED での規格化から

$$\sum_{r=1,2} u^r \bar{u}^r = \frac{p^\mu \gamma_\mu + m}{2m} \Rightarrow \sum_{r=1,2} u^r \bar{u}^r = p^\mu \gamma_\mu + m$$

$$\sum_{r=1,2} v^r \bar{v}^r = \frac{p^\mu \gamma_\mu - m}{2m} \Rightarrow \sum_{r=1,2} v^r \bar{v}^r = p^\mu \gamma_\mu - m$$

と変更します。なので、分母の $2m$ が出てきません。

電子とミューオンは質量の違いしかないので、不変振幅は「電子-陽子散乱」の陽子の質量をミューオンに変えればよく

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu(e)} L_{\mu\nu}^{(m)}$$

電子の運動量を始状態 p 、終状態 p' 、ミューオンの運動量を始状態 k 、終状態 k' 、電子の質量を m 、ミューオンの質量を M として、添え字 (e) は電子、 (m) はミューオンを表しています。「電子-陽子散乱」で行った計算をそのまま利用して

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu(e)} &= \frac{1}{2} \text{tr}[(p'^\alpha \gamma_\alpha + m) \gamma^\mu (p^\beta \gamma_\beta + m) \gamma^\nu] \\
&= \frac{1}{2} (4p'^\mu p^\nu - 4(p' \cdot p) g^{\mu\nu} + 4p'^\nu p^\mu + 4m^2 g^{\mu\nu}) \\
&= 2(p'^\mu p^\nu - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu + m^2 g^{\mu\nu}) \\
L^{\mu\nu(m)} &= 2(k'^\mu k^\nu - (k' \cdot k) g^{\mu\nu} + k'^\nu k^\mu + M^2 g^{\mu\nu})
\end{aligned}$$

これらから不変振幅の2乗は

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} (p'^\mu p^\nu - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu + m^2 g^{\mu\nu}) \{k'_\mu k_\nu - (k' \cdot k) g_{\mu\nu} + k'_\nu k_\mu + M^2 g_{\mu\nu}\} \\
&= \frac{4e^4}{q^4} (p'^\mu p^\nu k'_\mu k_\nu - p'^\mu p^\nu (k' \cdot k) g_{\mu\nu} + p'^\mu p^\nu k'_\nu k_\mu + p'^\mu p^\nu M^2 g_{\mu\nu} \\
&\quad - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} k'_\mu k_\nu + (p' \cdot p) g^{\mu\nu} (k' \cdot k) g_{\mu\nu} - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} k'_\nu k_\mu - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} M^2 g_{\mu\nu} \\
&\quad + p'^\nu p^\mu k'_\mu k_\nu - p'^\nu p^\mu (k' \cdot k) g_{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu k'_\nu k_\mu + M^2 p'^\nu p^\mu g_{\mu\nu} \\
&\quad + m^2 g^{\mu\nu} k'_\mu k_\nu - m^2 g^{\mu\nu} (k' \cdot k) g_{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu} k'_\nu k_\mu + m^2 g^{\mu\nu} M^2 g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{4e^4}{q^4} ((p' \cdot k')(p \cdot k) - (p' \cdot p)(k' \cdot k) + (p' \cdot k)(p \cdot k') + (p' \cdot p)M^2 \\
&\quad - (p' \cdot p)(k' \cdot k) + 4(p' \cdot p)(k' \cdot k) - (p' \cdot p)(k' \cdot k) - 4(p' \cdot p)M^2 \\
&\quad + (p \cdot k')(p \cdot k) - (p' \cdot p)(k' \cdot k) + (p' \cdot k')(p \cdot k) + M^2(p' \cdot p) \\
&\quad + m^2(k' \cdot k) - 4m^2(k' \cdot k) + m^2(k' \cdot k) + 4m^2 M^2) \\
&= \frac{4e^4}{q^4} (2(p' \cdot k')(p \cdot k) + 2(p' \cdot k)(p \cdot k') - 2(p' \cdot p)M^2 - 2(k' \cdot k)m^2 + 4m^2 M^2) \\
&= \frac{8e^4}{q^4} ((p' \cdot k')(p \cdot k) + (p' \cdot k)(p \cdot k') - (p' \cdot p)M^2 - (k' \cdot k)m^2 + 2m^2 M^2)
\end{aligned}$$

相対論的極限をとってしまい、電子とミューオンの質量を無視して

$$|\mathcal{M}|^2 \simeq \frac{8e^4}{q^4} ((p' \cdot k')(p \cdot k) + (p' \cdot k)(p \cdot k'))$$

これをマンデルスタム変数に変えます。今の場合

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2$$

$$t = (p - p')^2 = (k - k')^2$$

$$u = (p - k')^2 = (p' - k)^2$$

そして、相対論的極限では

$$s = k^2 + p^2 + 2k \cdot p \simeq 2k \cdot p \simeq 2k' \cdot p'$$

$$t = p^2 + p'^2 - 2p \cdot p' \simeq -2p \cdot p' \simeq -2k \cdot k'$$

$$u = p^2 + k'^2 - 2p \cdot k' \simeq -2p \cdot k' \simeq -2p' \cdot k$$

これらを使えば $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ 散乱の不変振幅は

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{(p-p')^4} ((p' \cdot k')(p \cdot k) + (p' \cdot k)(p \cdot k')) \\ &= \frac{8e^4}{(2p \cdot p')^2} \left(\frac{s^2}{4} + \frac{u^2}{4} \right) \\ &= \frac{2e^4}{t^2} (s^2 + u^2) \end{aligned}$$

これを $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$ にするために、交叉させます。これは、 $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ から散乱前の μ^- と散乱後の e^- を反粒子に替えて、この2つを交換すればいいです。運動量で言えば、 p' と $-k$ の入れ替えをすればいいということです。というわけで、マンデルスタム変数は

$$s \simeq -2p' \cdot p \simeq -2k' \cdot k$$

$$t \simeq 2p \cdot k \simeq 2p' \cdot k'$$

$$u \simeq -2p \cdot k' \simeq 2k \cdot k$$

つまり、 s と t を入れ替えればいいので、 $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 散乱の不変振幅は

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2)$$

と求まります。

最後にマンデルスタム変数によって物理的に許される領域が制限できることを示します。質量 m を持つ粒子の散乱 (例えば電子 e^- と陽電子 e^+ による散乱 $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$) を重心系で見ます。重心系は運動量が等しい粒子が正面衝突するように取る座標系です。入射粒子の運動量を $p^\mu = (E, \mathbf{p}_i)$, $p'^\mu = (E, -\mathbf{p}_i)$ 、散乱後 $k^\mu = (E, \mathbf{p}_f)$, $k'^\mu = (E, -\mathbf{p}_f)$ 、散乱角を θ とします。エネルギー保存から $m^2 + \mathbf{p}_i^2 = m^2 + \mathbf{p}_f^2$ なので、 $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}|$ となっています。これから $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta$ です。

そうすると、 s は

$$\begin{aligned}
s &= (p + p')^2 = p^2 + p'^2 + 2p \cdot p' \\
&= E^2 - \mathbf{p}_i^2 + E^2 - \mathbf{p}_i^2 + 2(E^2 + \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_i) \\
&= 4E^2 \\
&= 4(m^2 + |\mathbf{p}|^2)
\end{aligned}$$

t は

$$\begin{aligned}
t &= (k - p)^2 = k^2 + p^2 - 2k \cdot p \\
&= E^2 - \mathbf{p}_f^2 + E^2 - \mathbf{p}_i^2 - 2(E^2 - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f) \\
&= -(\mathbf{p}_i^2 + \mathbf{p}_f^2 - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f) \\
&= -2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos \theta)
\end{aligned}$$

u は

$$\begin{aligned}
u &= (k' - p)^2 = k'^2 + p^2 - 2k' \cdot p \\
&= E^2 - \mathbf{p}_f^2 + E^2 - \mathbf{p}_i^2 - 2(E^2 + \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f) \\
&= -(\mathbf{p}_i^2 + \mathbf{p}_f^2 + 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f) \\
&= -2|\mathbf{p}|^2(1 + \cos \theta)
\end{aligned}$$

s では $|\mathbf{p}|^2 \geq 0$ から

$$s = 4(m^2 + |\mathbf{p}|^2) \geq 4m^2$$

t, u では $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ から

$$t = -2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos \theta) \leq 0$$

$$u = -2|\mathbf{p}|^2(1 + \cos \theta) \leq 0$$

という制限が付きます。このように s, t, u の取れる範囲に制限があり、これがそのまま物理的に許される領域になります。