

マクスウェル方程式

マクスウェル方程式のラグランジアン密度を導入します。ゲージ条件と拘束条件にも触れます。ヘヴィサイド・ローレンツ単位系としてます。

ローマ文字の添え字は 1, 2, 3 とし、 $A_i B_i$ のように同じローマ文字の添え字では和を取ります。

マクスウェル方程式は、電場 E 、磁場 B 、電荷密度 ρ 、電流密度 j として

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

4 元ベクトルポテンシャル $A^\mu = (A^0, A^i) = (\phi, \mathbf{A})$ は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

ベクトルポテンシャルによるマクスウェル方程式は (電磁気学の「ミンコフスキー空間」参照)、4 元カレント $j^\mu = (\rho, j^i)$ を使って

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$$

A^μ 自体は直接的な物理量ではないことに注意してください。カレントの連続の方程式は

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

また、光速 c を 1 としないなら

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \end{aligned}$$

4 元ベクトルポテンシャルは $A^\mu = (\phi, A^i)$ 、4 元カレントは $j^\mu = (c\rho, j^i)$ となります。

一旦、3 次元表記を使っていきます。電荷のないマクスウェル方程式のラグランジアンは電磁場のエネルギーから

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (1)$$

と与えられます。これがベクトルポテンシャルのオイラー・ラグランジュ方程式からマクスウェル方程式になることを確認します。 $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ は

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \quad (\nabla = \partial_i)$$

3次元のローマ文字の添え字は位置が上下でなくても同じ文字なら和を取ります。 ϵ_{ijk} ($\epsilon_{123} = 1$) はレヴィ・チビタ記号です。 B^2 は

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \epsilon_{iab} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) (\partial_a A_b - \partial_b A_a) \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{ja} \delta_{kb} - \delta_{jb} \delta_{ka}) (\partial_j A_k - \partial_k A_j) (\partial_a A_b - \partial_b A_a) \\ &= \frac{1}{4} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) (\partial_j A_k - \partial_k A_j) - \frac{1}{4} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) (\partial_k A_j - \partial_j A_k) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \end{aligned}$$

と書けるので、ベクトルポテンシャルにすると

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2} (-\partial_0 A_i - \partial_i A_0)^2 - \frac{1}{4} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) (\partial_j A_k - \partial_k A_j)$$

作用は

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_0 A_i + \partial_i A_0)^2 - \frac{1}{4} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \right)$$

A_0, A_i の変分 $\delta A_0, \delta A_i$ を取ると、 δ と ∂_μ は交換できることから

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left((\partial_0 A_i + \partial_i A_0) (\partial_0 \delta A_i + \partial_i \delta A_0) - \frac{1}{2} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) (\partial_j \delta A_k - \partial_k \delta A_j) \right) \\ &= \int d^4x \left((\partial_0 A_i + \partial_i A_0) (\partial_0 \delta A_i + \partial_i \delta A_0) - \frac{1}{2} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \partial_j \delta A_k + \frac{1}{2} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \partial_k \delta A_j \right) \\ &= \int d^4x \left(-E_i (\partial_0 \delta A_i + \partial_i \delta A_0) - \frac{1}{2} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \partial_j \delta A_k - \frac{1}{2} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \partial_j \delta A_k \right) \\ &= \int d^4x \left(-E_i (\partial_0 \delta A_i + \partial_i \delta A_0) - (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \partial_j \delta A_k \right) \end{aligned}$$

表面積分が0になるとして

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left((\partial_0 E_i) \delta A_i + \partial_i E_i \delta A_0 + \partial_j (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \delta A_k \right) \\ &= \int d^4x \left((\partial_0 E_i + \partial_j (\partial_j A_i - \partial_i A_j)) \delta A_i + \partial_i E_i \delta A_0 \right) \end{aligned}$$

これが 0 になるには

$$\partial_0 E_i + \partial_j (\partial_j A_i - \partial_i A_j) = \partial_0 E_i - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})_i = 0, \quad \partial_i E_i = 0$$

よって、マクスウェル方程式のうちの 2 個が出てきます (回転の計算は下の補足参照)。残りの 2 個はベクトルポテンシャルを使ったマクスウェル方程式では恒等式になるので出てきません (電磁気学の「マクスウェル方程式」参照)。

ここから 4 次元表記にします。 $\mathcal{L}_0$ の添え字の上付き下付きの区別をつけて $(A_\mu = (A_0, A_i) = (A_0, -\mathbf{A}), \partial_\mu = (\partial_0, \nabla))$

$$\begin{aligned} (\partial_0 A_i + \partial_i A_0)^2 &\Rightarrow -(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial_0 A^i - \partial^i A_0) = -g^{ij}(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial_0 A_j - \partial_j A_0) \\ (\partial_j A_k - \partial_k A_j)(\partial_j A_k - \partial_k A_j) &\Rightarrow (\partial_j A_k - \partial_k A_j)(\partial^j A^k - \partial^k A^j) = g^{aj}g^{bk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j)(\partial_a A_b - \partial_b A_a) \end{aligned}$$

ここで

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -F_{\nu\mu}$$

とすれば

$$\begin{aligned} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial_0 A_j - \partial_j A_0)g^{ij} &= F_{0i}F_{0j}g^{ij} = F_{0i}F_{0j}g^{00}g^{ij} = \frac{1}{2}(F_{0i}F_{0j} + F_{i0}F_{j0})g^{00}g^{ij} \\ (\partial_j A_k - \partial_k A_j)(\partial_a A_b - \partial_b A_a)g^{ja}g^{kb} &= F_{jk}F_{ab}g^{ja}g^{kb} \end{aligned}$$

そして、 $\mu = \nu$ では 0 なので

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)^2 - \frac{1}{4}(\partial_j A_k - \partial_k A_j)(\partial_j A_k - \partial_k A_j) \\ &= -\frac{1}{4}F_{0i}F_{0j}g^{00}g^{ij} - \frac{1}{4}F_{i0}F_{j0}g^{ij}g^{00} - \frac{1}{4}F_{jk}F_{ab}g^{ja}g^{kb} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

相対論的な話でのマクスウェル方程式のラグランジアンにはこの形が使われます。

$F^{\mu\nu}$ は電磁場テンソルと呼ばれ、行列で書けば

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

電場、磁場は3次元ベクトルなので添え字の位置に意味はないです ($E = (E^1, E^2, E^3)$ と書いても問題ない)。下付きでは $F^{\mu\nu}$ に $g_{\mu\nu}$ が2回かかるために $(0, i), (i, 0)$ 成分の符号が反転し

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F^{\mu\nu}$ の符号を反転して定義していることもあるで注意してください (「一般相対性理論」では符号を反転させたものを使っていますが、微分を $A_{\mu|\nu}$ と書くので符号を反転した方が見た目上使いやすいからというだけです)。電磁場テンソルと電場、磁場の関係は ($A_\mu = (A_0, A_i) = (A_0, -\mathbf{A})$, $\partial_\mu = (\partial_0, \nabla)$)

$$F^{0i} = -F_{0i} = -(\partial_0 A_i - \partial_i A_0) = -(E_i + \partial_i A_0) + \partial_i A_0 = -E_i$$

$$F^{ij} = F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\epsilon_{ijk}(\nabla \times \mathbf{A})_k = -\epsilon_{ijk} B_k \quad (\nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k)$$

$$B_i = (\nabla \times \mathbf{A})_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j) = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{jk}$$

4次元表記なので

$$-\epsilon_{ijk}(\nabla \times \mathbf{A})_k = \epsilon_{ijk}(\epsilon_{kab}\partial_a A_b) = \epsilon_{kij}\epsilon_{kab}\partial_a A_b = (\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja})\partial_a A_b = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

$$\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j) = \epsilon_{ijk}(\partial_j A_k + \partial_j A_k) = 2\epsilon_{ijk}\partial_j A_k = -2(\nabla \times \mathbf{A})_i$$

となっています。 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{00}F^{00} + F_{01}F^{01} + F_{02}F^{02} + F_{03}F^{03} + \dots = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

となるので、(1) と一致します。

A_μ の変分からマクスウェル方程式が出てくることから、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0$$

$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ を

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \partial_\nu A_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)) \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \partial_\mu A_\nu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \end{aligned}$$

と書き換えて、オイラー・。ラグランジュ方程式の第2項に入れば

$$\begin{aligned}
-\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} &= \frac{1}{2} \partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + \frac{1}{2} \partial_\alpha (\partial_\mu A_\nu \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} (g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \partial_\lambda A_\rho - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} \partial_\rho A_\lambda)) \\
&= \frac{1}{2} \partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \\
&= \frac{1}{2} \partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + \frac{1}{2} \partial_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \\
&= \square A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha)
\end{aligned}$$

として、マクスウェル方程式が出てきます。電荷があるときのラグランジアンは、 A_μ で偏微分したときに j_μ の項が出てくるようにすればいいので

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \quad (2)$$

と与えられます。

ちなみに、 $F^{\mu\nu}$ の双対テンソル (dual tensor) と呼ばれるものがあり

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ($\epsilon^{0123} = +1$) はレヴィ・チビタ記号です。双対テンソルは、 $F^{\mu\nu}$ から E_i を B_i に変え、 B_i を $-E_i$ に変えたもので、このように入れ替える変換を双対変換と呼んでいます。これらを使うことでマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\
\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} &= 0
\end{aligned}$$

1 番目で $F^{\mu\nu}$ の μ との内積になっていることに注意してください。 $F^{\mu\nu}$ の符号を反転させると $\partial_\nu F^{\mu\nu}$ になります。また、2 番目の

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} (\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda}) \\
&= \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} \partial^\mu F^{\nu\lambda} \\
&= \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\alpha\lambda\mu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} \\
&= (\epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} + \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} + \epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu}) \partial^\lambda F^{\mu\nu} \\
&= 3\partial^\lambda (\epsilon_{\lambda\alpha\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\
&= 6\partial^\lambda {}^*F_{\lambda\alpha}
\end{aligned}$$

と書き換えられます。 $F^{\mu\nu}$ の成分を使えば、マクスウェル方程式と一致することは、例えば

$$\begin{aligned} j^1 &= \partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} \\ &= -\partial_0 E_1 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 \\ &= -\frac{\partial E_1}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_1 \quad (\partial_\mu = (\partial_0, \partial_i) = (\partial_0, \nabla)) \end{aligned}$$

同様にすれば他の場合も確かめられます。

マクスウェル方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ の右辺は電荷が存在することを表すので、 $\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0$ では右辺が 0 になるために磁荷がないことを表わします。このことから、もし単一の磁荷があれば対称な形に式が書けます。ディラックはこの発想を量子力学で適用しました (量子力学の「モノポール」参照)。

ゲージ変換を任意のスカラー関数 $\Lambda(x)$ によって

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$$

とすれば、 $F_{\mu\nu}$ のゲージ変換は

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda + \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

なので、(2) の第 1 項はゲージ不変です。しかし、 $A_\mu j^\mu$ のために (2) はゲージ不変ではないです。この項を変換すれば

$$A'_\mu j^\mu = A_\mu j^\mu - (\partial_\mu \Lambda) j^\mu = A_\mu j^\mu - \partial_\mu (\Lambda j^\mu) + \Lambda \partial_\mu j^\mu$$

第 2 項は表面項なので作用に影響しませんが、第 3 項は残ります。しかし、 j^μ が運動方程式に従う軌道上だけでなく時空上のあらゆる場所で連続の方程式 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たすなら消えます (係数に $\Lambda(x)$ がいるために、あらゆる x_μ で成立する必要がある)。この要求のもとで (2) はゲージ不変です。

電磁場でのエネルギー・運動量テンソルを求めます。エネルギー・運動量テンソル $\theta_{\mu\nu}$ はネーターの定理から

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu A^\rho)} \partial_\nu A^\rho - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x)$$

これに電磁場のラグランジアン (2) を入れればいいです。第 1 項は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial^\mu A^\rho)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\rho)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \\
&= g_{\alpha\mu} g_{\beta\rho} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - g_{\beta\mu} g_{\alpha\rho} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + g_\mu^\alpha g_\rho^\beta (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - g_\mu^\beta g_\rho^\alpha (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\
&= (\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu) - (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + (\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu) - (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) \\
&= 4(\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu) \\
&= 4F_{\mu\rho}
\end{aligned} \tag{3}$$

よって

$$\theta_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho} \partial_\nu A^\rho - g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - j_\rho A^\rho \right)$$

この発散を取ると

$$\begin{aligned}
\partial^\mu \theta_{\mu\nu} &= -\partial^\mu (F_{\mu\rho} \partial_\nu A^\rho) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \partial^\mu (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) + g_{\mu\nu} \partial^\mu (j_\rho A^\rho) \\
&= -\partial^\mu F_{\mu\rho} \partial_\nu A^\rho - F_{\mu\rho} \partial^\mu \partial_\nu A^\rho + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial^\mu F_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} A^\rho \partial^\mu j_\rho + g_{\mu\nu} j_\rho \partial^\mu A^\rho \\
&= -j_\rho \partial_\nu A^\rho - F_{\mu\rho} \partial^\mu \partial_\nu A^\rho + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) F^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} A^\rho \partial^\mu j_\rho + g_{\mu\nu} j_\rho \partial^\mu A^\rho \\
&= -(\partial_\nu \partial_\mu A_\rho) F^{\mu\rho} + \frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) F^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} A^\rho \partial^\mu j_\rho \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha) F^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} A^\rho \partial^\mu j_\rho \\
&= g_{\mu\nu} A^\rho \partial^\mu j_\rho
\end{aligned}$$

下から2行目の第一項は $F^{\alpha\beta}$ が反対称なので消えます。というわけで、 j_μ が時間と位置に依存しているなら、エネルギーと運動量の保存が成立しません (j_μ のために4次元時空の並進不変でなくなっている)。真空中の電磁場なら $j_\mu = 0$ なので、保存則が成立します。

「ネーターの定理」で見たように、今の段階ではエネルギー・運動量テンソルは対称になっていないので、それを修正します。そのために

$$T_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \partial^\lambda \chi_{\lambda\mu\nu}$$

とします。 $\chi_{\lambda\mu\nu}$ は λ と μ の交換に対して反対称です。そして、 $\theta_{\mu\nu}$ をゲージ変換してみると

$$\begin{aligned}
\theta'_{\mu\nu} &= \theta_{\mu\nu} - F_{\mu\rho} \partial_\nu \partial^\rho \Lambda + g_{\mu\nu} j_\rho \partial^\rho \Lambda \\
&= \theta_{\mu\nu} - \partial^\rho (F_{\mu\rho} \partial_\nu \Lambda) + (\partial^\rho F_{\mu\rho}) \partial_\nu \Lambda + g_{\mu\nu} \partial^\rho (j_\rho \Lambda) - g_{\mu\nu} \Lambda \partial^\rho j_\rho \\
&= \theta_{\mu\nu} - \partial^\rho (F_{\mu\rho} \partial_\nu \Lambda - g_{\mu\nu} j_\rho \Lambda) + j_\mu \partial_\nu \Lambda
\end{aligned}$$

余分な項が出てくるので、ゲージ不変ではないのが分かります。しかし、カレントの項はラグランジアンの時点でゲージ不変でない項なので無視します。このため、ゲージ変換後に第二項の残りの部分を消せるように $\chi_{\lambda\mu\nu} = F_{\mu\rho}A_\nu$ と選び

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \theta_{\mu\nu} + \partial^\rho(F_{\mu\rho}A_\nu) = -F_{\mu\rho}\partial_\nu A^\rho - g_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - j_\rho A^\rho\right) + \partial^\rho(F_{\mu\rho}A_\nu) \\
&= -F_{\mu\rho}\partial_\nu A^\rho - g_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - j_\rho A^\rho\right) - \partial^\rho(F_{\rho\mu}A_\nu) \\
&= \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F_{\mu\rho}(\partial^\rho A_\nu - \partial_\nu A^\rho) + g_{\mu\nu}j_\rho A^\rho - j_\mu A_\nu \\
&= \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F_{\mu\rho}F^\rho_\nu + g_{\mu\nu}j_\rho A^\rho - j_\mu A_\nu
\end{aligned}$$

これが物理的なエネルギー・運動量テンソルです。このときでも発散をとって0にならないです。実際に

$$\begin{aligned}
\partial^\mu T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\nu F_{\alpha\beta})F^{\alpha\beta} + F_{\mu\rho}(\partial^\mu F^\rho_\nu) + (\partial^\mu F_{\mu\rho})F^\rho_\nu + \partial_\nu(j_\rho A^\rho) - \partial^\mu(j_\mu A_\nu) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\nu F_{\alpha\beta})F^{\alpha\beta} + F^{\mu\rho}\partial_\mu(\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho) + (\partial^\mu F_{\mu\rho})F^\rho_\nu + \partial_\nu(j_\rho A^\rho) - \partial^\mu(j_\mu A_\nu) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)F^{\alpha\beta} + (\partial_\rho\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu\partial_\mu A_\rho)F^{\mu\rho} + (\partial^\mu F_{\mu\rho})F^\rho_\nu + \partial_\nu(j_\rho A^\rho) - \partial^\mu(j_\mu A_\nu) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_\alpha A_\beta + \partial_\beta A_\alpha)F^{\alpha\beta} + (\partial^\mu F_{\mu\rho})F^\rho_\nu + \partial_\nu(j_\rho A^\rho) - \partial^\mu(j_\mu A_\nu) \\
&= -j_\rho F^\rho_\nu + \partial_\nu(j_\rho A^\rho) - \partial^\mu(j_\mu A_\nu)
\end{aligned}$$

$\partial_\rho\partial_\mu A_\nu F^{\mu\rho}$ は $F^{\mu\rho}$ が反対称なので消えます。エネルギー密度 T_{00} は電場と磁場で書くと

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{1}{4}g_{00}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F_{0\rho}F^\rho_0 + g_{00}j_\rho A^\rho - j_0 A_0 \\
&= -\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \mathbf{E}^2 + (j_0 A^0 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) - j_0 A_0 \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}
\end{aligned}$$

運動量密度 T_{0i} ($i = 1, 2, 3$) では

$$\begin{aligned}
T_{0i} &= F_{0\rho}F^\rho_i = F_{01}F^1_i + F_{02}F^2_i + F_{03}F^3_i - j_0 A_i \\
&= E_1(0, B_3, -B_2) + E_2(-B_3, 0, B_1) + E_3(B_2, -B_1, 0) - j_0 A_i \\
&= (-E_2 B_3 + E_3 B_2, -E_3 B_1 + E_1 B_3, -E_1 B_2 + E_2 B_1) - j_0 A_i \\
&= -\mathbf{E} \times \mathbf{B} + j_0 \mathbf{A}
\end{aligned}$$

$j_\mu = 0$ では電磁場そのものだけのエネルギー密度と運動量密度になり、電磁気での電磁場のエネルギー密度とポインティングベクトル (ポインティングベクトルが運動量密度に対応) になります。

次にゲージ条件を見ていきます。ここから真空でのマクスウェル方程式を扱うことにし、 $j_\mu = 0$ とします。ゲージ変換はスカラー関数 $\Lambda(x)$ によって

$$A'_\mu(x) = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x)$$

この変換に対してマクスウェル方程式は不変です。ゲージ条件をローレンツゲージ

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4)$$

とすれば、マクスウェル方程式は

$$\square A_\mu = 0 \quad (5)$$

となります。ローレンツゲージは共変なゲージ条件です。しかし、

$$\square f(x) = 0$$

となる $f(x)$ による変換

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu f(x)$$

に対して、(4),(5) は不変です。このため、ローレンツゲージでは (4),(5) から A_μ は決まらず、 f による任意性が残ります。この任意性を利用して $A_0 = 0$ となる f を選べば、ローレンツゲージは

$$A_0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (6)$$

となり、これで A_μ は決まります。マクスウェル方程式 (5) は、 $\mu = 0$ では 0 の恒等式なので

$$\square A^i = 0 \quad (7)$$

となります。ゲージ条件 (6) はクーロンゲージと呼ばれることが多く、radiation gauge とも呼ばれます。他にも、 $A_0 = 0$ を temporal gauge と言うために、temporal gauge とも呼ばれます。もしくは、真空では $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ からマクスウェル方程式の解として $A_0 = 0$ が導かれるために、クーロンゲージは $\nabla \cdot \mathbf{A}$ だけを指すことも多いです(電磁気の「マクスウェル方程式・ゲージ変換」参照)。

ローレンツゲージでのマクスウェル方程式はクライン・ゴールドン方程式で質量を 0 にしたものと同じです。なので、同じように平面波展開できて(「クライン・ゴールドン方程式～複素スカラー場～」の補足参照)

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) e^{ikx} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} (A_\mu^+(\mathbf{k}) e^{ikx} + A_\mu^-(\mathbf{k}) e^{-ikx}) \quad (k_0 = |\mathbf{k}|)$$

A_μ は実数なので複素共役は $(A_\mu^\pm)^* = A_\mu^\mp$ です。ローレンツゲージに入れれば

$$k^\mu A_\mu = 0$$

となりますが、これだと A_μ を決めきれません。実際に、これだけでは電磁場の自由度は 2 になりません (横波が分らない)。クーロンゲージ (6) に入れると、 $A_0 = 0$ なので

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$$

$\mathbf{A}$ は 3 次元運動量 $\mathbf{k}$ と直交しています (平面波の進行方向に対して垂直)。これから、 $\mathbf{A}$ の自由度は 2 となり (3 成分のうちの 2 つが分かれば残りの 1 つが決まる)、電磁場は横波であることに対応します (横波は波の進行方向に垂直に振動)。このため、クーロンゲージでは共変性はなくなりますが、電磁場の物理的な自由度のみが取り出されます。

この関係から、 $\mathbf{k}$ に直交する 3 次元単位ベクトル $\epsilon(\mathbf{k})$ を導入して

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}) = 0$$

$\epsilon(\mathbf{k})$ を偏極ベクトルと呼び、電磁場がどの方向に振動しているのかを表すものです (「プロカ方程式」も参照)。進行方向に直交している 2 次元面上に任意の ϵ はいるので、適当な基底ベクトル $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}$ の線形結合で書けます。 $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}$ は

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon^{(1)} = 0, \mathbf{k} \cdot \epsilon^{(2)} = 0, \epsilon^{(1)} \cdot \epsilon^{(2)} = 0$$

$\mathbf{k}$ 方向の単位ベクトルを $\epsilon^{(3)} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ とすれば、 $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \epsilon^{(3)}$ は 3 次元空間の正規直交基底となります ($\epsilon^{(i)} \cdot \epsilon^{(j)} = \delta_{ij}$)。 $\epsilon^{(1,2)}$ は横波成分、 $\epsilon^{(3)}$ は進行方向なので縦波成分です。例えば、電磁場が第 3 成分方向に進んでいるなら

$$\epsilon^{(1)} = (1, 0, 0), \epsilon^{(2)} = (0, 1, 0), \epsilon^{(3)} = (0, 0, 1)$$

と書けます。

基底ベクトル $e^{(i)}$ によってベクトル $\mathbf{v}$ は $\mathbf{v} = v_i e^{(i)} = \sum_i (\mathbf{v} \cdot e^{(i)}) e^{(i)}$ と書けて、その成分 v_a に対して

$$v_a = \sum_{i=1}^3 e_a^{(i)} (e^{(i)} \cdot \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^3 e_a^{(i)} e_b^{(i)} v_b = \delta_{ab} v_b$$

となるので

$$\sum_{i=1}^3 e_a^{(i)} e_b^{(i)} = \delta_{ab} \quad (8)$$

括弧付きの添え字の和は書いています。そうすると、偏極ベクトルでは

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_a^{(i)} \epsilon_b^{(i)} = \delta_{ab} - \epsilon_a^{(3)} \epsilon_b^{(3)} = \delta_{ab} - \frac{k_a k_b}{|\mathbf{k}|^2} \quad (9)$$

という関係になります。

4次元ミンコフスキー時空での偏極ベクトルによる基底を作ります。4次元でも太字にした x で書きます。 x は基底 $e^{(\alpha)}$ によって

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha=0}^3 x^{\alpha} \boldsymbol{e}^{(\alpha)}$$

この内積はミンコフスキー時空での定義から

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 x^{\alpha} x^{\beta} \boldsymbol{e}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{e}^{(\beta)} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}$$

なので

$$e_{\mu}^{(\alpha)} e^{(\beta)\mu} = g_{\alpha\beta}$$

これから、偏極ベクトル $\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) として

$$\epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')\mu} = g_{\lambda\lambda'}$$

と与えます。 $\epsilon_{\mu}^{(0)}$ は時間的、 $\epsilon_{\mu}^{(i)}$ は空間的です。変形すれば

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 g_{\lambda\lambda'} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\nu}^{(\lambda')} &= \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 g_{\lambda\lambda'} g_{\lambda\lambda'} \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 g_{\lambda\lambda'} g_{\lambda\lambda'} \\ &= g_{00}g_{00} + g_{11}g_{11} + \cdots \\ &= g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \\ \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 g_{\lambda\lambda'} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\nu}^{(\lambda')} &= g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10}$$

となり、(8) を 4次元にしたものが求まります。

$\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}$ はほとんどの場合で

$$\epsilon^{(0)\mu}(\boldsymbol{k}) = (1, 0, 0, 0), \quad \epsilon^{(1)\mu}(\boldsymbol{k}) = (0, \epsilon^{(1)}) , \quad \epsilon^{(2)\mu}(\boldsymbol{k}) = (0, \epsilon^{(2)}) , \quad \epsilon^{(3)\mu}(\boldsymbol{k}) = (0, \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|})$$

と選びます ($\epsilon^{(1,2)}$ は $\epsilon^{(3)}$ に直交)。これらは

$$k^{\mu} \epsilon_{\mu}^{(1)} = k^{\mu} \epsilon_{\mu}^{(2)} = 0 , \quad k^{\mu} \epsilon_{\mu}^{(0)} = -k^{\mu} \epsilon_{\mu}^{(3)}$$

このように選ぶと、 $\lambda = 0$ のとき時間方向、 $\lambda = 1, 2$ のとき横波方向、 $\lambda = 3$ のとき縦波方向というのがはっきりします。このため、 $\lambda = 0$ のときスカラー光子 (時間的光子)、 $\lambda = 1, 2$ のとき横波光子、 $\lambda = 3$ のとき縦波光子と呼びます。また、 $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ は基底なので、これは座標系 (A_μ を展開する座標系) を電磁場の進行方向に合わせて決められたことになります。なので、一般化するにはローレンツ変換を行う必要があります。

(9) を 4 次元にできます。 $\epsilon^{(0)\mu} = \eta^\mu$ と書きます。 k を 4 次元表記したいので、 $\eta \cdot k = k_0$ から

$$(0, \mathbf{k}) = (k_0, \mathbf{k}) - (k_0, 0, 0, 0) = k^\mu - (\eta \cdot k)\eta$$

$$\mathbf{k}^2 = -(k_0^2 - \mathbf{k}^2) + k_0^2 = -k^2 + (\eta \cdot k)^2$$

これらによって

$$\epsilon^{(3)\mu} = K^\mu = (0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}) = \frac{k^\mu - (\eta \cdot k)\eta}{\sqrt{(\eta \cdot k)^2 - k^2}}$$

とすれば、(10) は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{00}\epsilon_\mu^{(0)}\epsilon_\nu^{(0)} + g_{11}\epsilon_\mu^{(1)}\epsilon_\nu^{(1)} + g_{22}\epsilon_\mu^{(2)}\epsilon_\nu^{(2)} + g_{33}\epsilon_\mu^{(3)}\epsilon_\nu^{(3)} \\ - \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)} &= g_{\mu\nu} - \epsilon_\mu^{(0)}\epsilon_\nu^{(0)} + \epsilon_\mu^{(3)}\epsilon_\nu^{(3)} \\ \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)} &= -g_{\mu\nu} + \eta_\mu\eta_\nu - K_\mu K_\nu \end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned} &((\eta \cdot k)^2 - k^2)\eta_\mu\eta_\nu - (k_\mu - (\eta \cdot k)\eta_\mu)(k_\nu - (\eta \cdot k)\eta_\nu) \\ &= (\eta \cdot k)^2\eta_\mu\eta_\nu - k^2\eta_\mu\eta_\nu - k_\mu k_\nu - (\eta \cdot k)^2\eta_\mu\eta_\nu + (\eta \cdot k)(\eta_\mu k_\nu + \eta_\nu k_\mu) \\ &= -k^2\eta_\mu\eta_\nu - k_\mu k_\nu + (\eta \cdot k)(\eta_\mu k_\nu + \eta_\nu k_\mu) \end{aligned}$$

なので

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{-k^2\eta_\mu\eta_\nu - k_\mu k_\nu + (\eta \cdot k)(\eta_\mu k_\nu + \eta_\nu k_\mu)}{(\eta \cdot k)^2 - k^2}$$

電磁場では $k^2 = 0$ なので

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{-k_\mu k_\nu + (\eta \cdot k)(\eta_\mu k_\nu + \eta_\nu k_\mu)}{(\eta \cdot k)^2}$$

また、これに k^μ をかけると

$$-k_\nu + \frac{-k^2 k_\nu + (\eta \cdot k)^2 k_\nu + (\eta \cdot k) \eta_\nu k^2}{(\eta \cdot k)^2} = -k_\nu + \frac{(\eta \cdot k)^2}{(\eta \cdot k)^2} k_\nu = 0$$

このように k^μ に直交するのが分かります。

偏極ベクトルによって $A_\mu^\pm$ は

$$A_\mu^\pm(\mathbf{k}) = \epsilon_\mu^{(\lambda)} a_\lambda^\pm(\mathbf{k})$$

と分解されます。クーロンゲージを取るなら、 $\lambda = 1, 2$ しかないので

$$\mathbf{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) (a_\lambda^+(\mathbf{k}) e^{ikx} + a_\lambda^-(\mathbf{k}) e^{-ikx})$$

と書けます。

最後に、拘束条件が出てくることも見ておきます。 $j_\mu = 0$ として、真空でのマクスウェル方程式とします。ラグランジアンから A_μ の正準共役な場 π^μ を求めると、 π^0 は

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (\dot{A}_0 = \partial_0 A_0 = \frac{\partial A_0}{\partial t})$$

π^i は

$$\begin{aligned} \pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i} (F_{0i} F^{0i}) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i} ((\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i)(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i)) \\ &= -\frac{1}{4} ((\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) - (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) - (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i)) \\ &= -\frac{1}{4} (2(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) - 2(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i)) \\ &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ &= -(\nabla A_0)^i - \frac{\partial A^i}{\partial t} \quad (\partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)) \\ &= E^i \end{aligned}$$

というわけで、共役な場 π^μ のうち π^0 が 0 になっています。これが拘束条件となり、第一次拘束条件です (解析力学の「拘束条件」参照)。 $\dot{A}_0$ によるラグランジアン of 微分が 0 であるために、 A_0 によるオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_0)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0}$$

となり、左辺の $\partial_i A_0$ の微分は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}((\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) - (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) - (\partial^0 A^i - \partial^i A^0)) \\ & = -(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) \end{aligned}$$

となることから、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$-\partial_i(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) = -\nabla \cdot (-\nabla A^0 - \partial^0 \mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

これはクーロンの法則で、第二次拘束条件になります。電磁場では拘束条件が出てくるために、スカラー場やディラック場よりも複雑なことになります。

ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = E^i \frac{\partial}{\partial t} A_i - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \\ &= -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \\ &= -\mathbf{E} \cdot (-\mathbf{E} - \nabla A_0) - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0) \\ &= \mathbf{E}^2 + \mathbf{E} \cdot \nabla A_0 - \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla A_0 \end{aligned}$$

よって、ハミルトニアンは

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

ハミルトニアン密度の第二項は表面積分とマクスウェル方程式によって消せるので、省いています。

電磁場での $\pi^0 = 0$ は、正準共役な場 A_μ, π^μ の同時刻交換関係を作る時に 0 成分が成立しないという問題を引き起こします。この問題を解決させるためにゲージ自由度が使われます。ちなみに重力場の量子化でも拘束条件が出てきます。

・補足

$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ を求めます。回転は

$$(\nabla \times \mathbf{A})_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \quad (\nabla \times \mathbf{A})_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \quad (\nabla \times \mathbf{A})_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$$

3次元として添え字の上付き下付きの区別をしていません。これらから

$$(\nabla \times \mathbf{A})_1 = \frac{1}{2}\epsilon_{1jk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j) = \frac{1}{2}\epsilon_{123}(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \frac{1}{2}\epsilon_{132}(\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2$$

とできるので

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j)$$

この回転を取ると

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})_a &= (\nabla \times \mathbf{C})_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} (\partial_b C_c - \partial_c C_b) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{cjk} \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j) - \frac{1}{2} \epsilon_{bjk} \partial_c (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \right) \\ &= \frac{1}{4} (\epsilon_{abc} \epsilon_{cjk} \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j) - \epsilon_{abc} \epsilon_{bjk} \partial_c (\partial_j A_k - \partial_k A_j)) \\ &= \frac{1}{4} (\epsilon_{cab} \epsilon_{cjk} \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j) + \epsilon_{bac} \epsilon_{bjk} \partial_c (\partial_j A_k - \partial_k A_j)) \\ &= \frac{1}{4} (\epsilon_{cab} \epsilon_{cjk} \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j) + \epsilon_{cab} \epsilon_{cjk} \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j)) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{cab} \epsilon_{cjk} \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{aj} \delta_{bk} - \delta_{ak} \delta_{bj}) \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{aj} \delta_{bk} \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j) - \frac{1}{2} \delta_{ak} \delta_{bj} \partial_b (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \\ &= \frac{1}{2} \partial_b (\partial_a A_b - \partial_b A_a) - \frac{1}{2} \partial_b (\partial_b A_a - \partial_a A_b) \\ &= \partial_b (\partial_a A_b - \partial_b A_a) \end{aligned}$$