

電磁場との相互作用項

ゲージ不変性からディラック場と電磁場の相互作用項を導入します。
ここでは電荷を $g = Qe$ ($e > 0$ は素電荷, Q は整数) としています。

真空でのマクスウェル方程式のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

A_μ はベクトルポテンシャル、 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ です。これに荷電粒子がいるとして、荷電粒子と電磁場による相互作用項を導入します。荷電粒子はディラック場とします。

量子力学での「スピン」や下の補足で示しているように、自由粒子から電磁場と相互作用している場合へは

$$i\partial_\mu \Rightarrow i\partial_\mu - QeA_\mu = (i\partial_0 - QeA_0, i\nabla + Qe\mathbf{A}) \quad (\partial_\mu + iQeA_\mu) \quad (1)$$

として変更できます。 $e > 0$ は素電荷、 Q は整数です。電荷を $g = Qe$ としていきます (電子なら $Q = -1$)。そうすると、ディラック場のラグランジアンは

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \Rightarrow \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - gA_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

これで電磁場と相互作用しているディラック場になったので、真空での電磁場のラグランジアン密度を加えて、全体のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_d + \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - gA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (2)$$

と与えます。ディラック場のカレントは $g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ なのでそれを j_μ とすれば、 $\mathcal{L}_{int}$ は電荷があるときの電磁場のラグランジアン密度での $j_\mu A^\mu$ の形になっています。 $gA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = A^\mu j_\mu$ は minimal な電磁相互作用と呼ばれます。これが QED のラグランジアン密度です。

しかし、(2) のゲージ不変性に問題があります。ゲージ変換 ($\Lambda(x)$ は任意の関数)

$$A'_\mu(x) = A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x) \quad (3)$$

に対して $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は不変です。しかし、 $\mathcal{L}_{int}$ でのディラック方程式のカレントが連続の方程式を満たすのは ψ がディラック方程式に従っているときです。なので、「マクスウェル方程式」で触れたように (2) はゲージ不変ではありません。実際に、オイラー・ラグランジュ方程式を求めてみれば、電磁場中での 2 つの共役なディラック方程式とマクスウェル方程式 (共役なディラック方程式は省きます)

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - g\gamma_\mu A^\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (4)$$

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (5)$$

が出てきますが、(4) は

$$\begin{aligned}
(i\gamma_\mu \partial^\mu - g\gamma_\mu A'^\mu - m)\psi(x) &= (i\gamma_\mu \partial^\mu - g\gamma_\mu (A^\mu - \partial^\mu \Lambda) - m)\psi(x) \\
&= (i\gamma_\mu (\partial^\mu - ig\partial^\mu \Lambda) - g\gamma_\mu A^\mu - m)\psi(x)
\end{aligned}$$

から、ゲージ変換で形が変わります (ゲージ変換に対して共変でない)。

(4) と (5) は電磁場中の荷電粒子を記述し、電磁場はゲージ変換 (3) で不変です ((5) が不変)。なので、電磁場の影響のもとでの荷電粒子が従う方程式もゲージ変換で変わらないはず。そうすると、(4) の形はゲージ変換で変更されないべきで、言い換えれば (2) が不変であるべきです。なので、電磁場のゲージ変換のとき $\psi(x)$ も変換されると考えます。

$\psi(x)$ の変換を

$$\psi'(x) = e^{ig\Lambda(x)}\psi(x) \quad (6)$$

とします。これを (3) と合わせれば

$$\begin{aligned}
0 &= (i\gamma_\mu \partial^\mu - g\gamma_\mu A'^\mu - m)\psi'(x) \\
&= (i\gamma_\mu (\partial^\mu - ig(\partial^\mu \Lambda)) - g\gamma_\mu A^\mu - m)e^{ig\Lambda}\psi(x) \\
&= e^{ig\Lambda}(i\gamma_\mu (\partial^\mu + ig(\partial^\mu \Lambda) - ig\partial^\mu \Lambda) - g\gamma_\mu A^\mu - m)\psi(x) \\
&= (i\gamma_\mu \partial^\mu - g\gamma_\mu A^\mu - m)\psi(x)
\end{aligned}$$

となり、ゲージ変換前後で同じ形にできます。ラグランジアンも同様に不変になります (後で直接見ます)。

(6) は局所的 (local) ゲージ変換、第二種ゲージ変換 (gauge transformation of the second kind)、局所的位相変換と呼ばれます。群論の言葉では、局所的 $U(1)$ 変換です。局所的は、位相変換 $e^{i\alpha}$ での α が定数でなく x^μ に依存しているからです (定数なら時空全体で同じ α での変換)。また、今のような話では、(3) と (6) を合わせてゲージ変換と呼ぶことが多いです。ここでは、(3) をゲージ変換、(6) を局所的位相変換、2 つ合わせて局所的ゲージ変換と呼びます。

α が定数のときは、大域的 (global) ゲージ変換、第一種ゲージ変換 (gauge transformation of the first)、大域的位相変換と呼ばれます。大域的ゲージ変換では明らかにラグランジアン密度は不変です。

というわけで、局所的ゲージ変換 (3),(6) でラグランジアンは不変です。今度は局所的ゲージ変換の不変性が、電磁場の導入と相互作用の形を決めることを見ます。

ディラック場のラグランジアンだけから始めます。大域的位相変換を

$$\psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x)$$

とすれば、ディラック場のラグランジアンは

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_d &= \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{i\alpha}\psi(x) \\
&= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \\
&= \mathcal{L}_d
\end{aligned}$$

となって、不変です。局所的位相変換ではラグランジアンの変分部分は

$$\partial_\mu \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x))\psi(x) \quad (\alpha(x) = g\Lambda(x))$$

となり、 $i\partial_\mu \alpha(x)$ の項のために不変ではありません。この変換で不変になるようにディラック場のラグランジアンを書き換えます。

不変でないのは、局所的位相変換を $U(x)$ とすれば

$$\psi'(x+dx) - \psi'(x) = U(x+dx)\psi(x+dx) - U(x)\psi(x) \neq U(x)\partial_\mu \psi dx^\mu$$

となるためです ($\bar{\psi}' \partial_\mu \psi' = \bar{\psi} U^\dagger U \partial_\mu \psi$ になれば不変)。なので、微分部分を修正し、変換後に U が演算子の前に出てくるようにします。つまり、

$$(D_\mu \psi(x))' dx^\mu = U(x) D_\mu \psi dx^\mu \quad (7)$$

となる、新しい微分演算子 D_μ を作ります。そのために

$$\psi(x+dx) - \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) dx^\mu$$

において、別の $\psi_p(x+dx)$ を使うことで微分を D_μ に置き換えられるとして

$$\psi_p(x+dx) - \psi(x) = D_\mu \psi(x) dx^\mu \quad (8)$$

そして、 $\psi_p(x+dx)$ の変換を

$$\psi_p'(x+dx) = U(x)\psi_p(x+dx)$$

と与えれば

$$(D_\mu \psi(x))' dx^\mu = \psi_p'(x+dx) - \psi'(x) = U(x)\psi_p(x+dx) - U(x)\psi(x) = U(x)D_\mu \psi dx^\mu$$

となり、目的の状況が作れます。後はこうなる D_μ を与えればいいです。 ψ_p は最後にまた触れます。

$\psi_p(x+dx)$ と $\psi(x+dx)$ の差を $\delta\psi$ とすれば、 dx^μ の 1 次までで

$$\psi_p(x+dx) = \psi(x+dx) + \delta\psi = \psi(x) + \partial_\mu \psi(x) dx^\mu + \delta\psi = \psi(x) + D_\mu \psi(x) dx^\mu$$

$D_\mu \psi$ とするために $\delta\psi$ は、(7) を満たす関数を $f_\mu(x)$ として (f_μ の符号をマイナスに取っている場合もある)

$$D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu + f_\mu(x))\psi(x), \quad \delta\psi = f_\mu(x)\psi(x) dx^\mu$$

そうすると

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \psi(x))' &= (\partial_\mu + f'_\mu(x))\psi'(x) = (\partial_\mu + f'_\mu(x))U(x)\psi(x) \\
 &= \partial_\mu(U(x)\psi(x)) + f'_\mu(x)U(x)\psi(x) \\
 &= (\partial_\mu U)\psi + U\partial_\mu\psi + f'_\mu U\psi
 \end{aligned}$$

(7) での右辺は

$$U(x)D_\mu\psi(x) = U(x)(\partial_\mu\psi(x) + f_\mu(x)\psi(x)) = U(x)\partial_\mu\psi(x) + U(x)f_\mu(x)\psi(x)$$

なので

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu U)\psi + U\partial_\mu\psi + f'_\mu U\psi &= U\partial_\mu\psi + Uf_\mu\psi \\
 f'_\mu U\psi &= -(\partial_\mu U)\psi - U\partial_\mu\psi + U\partial_\mu\psi + Uf_\mu\psi \\
 f'_\mu U &= -\partial_\mu U + Uf_\mu \\
 f'_\mu &= -(\partial_\mu U)U^\dagger + Uf_\mu U^\dagger
 \end{aligned}$$

これが f_μ の変換となります。 U, f はただの関数なので交換できますが、「ヤン・ミルズ理論」との対応のために交換できないとした形にしています。

というわけで、ラグランジアンでの微分を

$$D_\mu = \partial_\mu + f_\mu(x)$$

によって置き換えれば、局所変換

$$\psi'(x) = U(x)\psi(x), \quad f'_\mu(x) = -(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x) + U(x)f_\mu(x)U^\dagger(x)$$

で不変なラグランジアンとなります。 D_μ を共変微分 (covariant derivative) と呼び、(7) によって定義されます。共変微分は (7) から

$$D'_\mu = UD_\mu U^\dagger \quad (U^\dagger D'_\mu U = D_\mu)$$

と変換されます。

重要なのは不変にするために f_μ が新しく導入されている点です。 f_μ の変換は $U = e^{i\alpha(x)}$ から

$$f'_\mu(x) = e^{i\alpha(x)}f_\mu e^{-i\alpha(x)} - (\partial_\mu\alpha(x))e^{i\alpha(x)}e^{-i\alpha(x)} = f_\mu - \partial_\mu\alpha(x)$$

となり、ゲージ変換になります。なので、係数も合わせて

$$f_\mu = igA_\mu$$

とすれば、電磁場のゲージ変換

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x) = A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x)$$

となります。というわけで、不変性の要求によって電磁場が導入されます。そして、共変微分は電磁場を使って

$$D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu + igA_\mu(x))\psi(x)$$

と書けます。

微分 ∂_μ を共変微分 D_μ に変えると局所的ゲージ変換で不変なラグランジアンになることを、 ψ と A_μ の変換

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x)$$

を使って、実際に確かめます。場 $\psi'(x)$ に共変微分 D' を作用させると

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi'(x) &= (\partial_\mu + igA'_\mu)\psi'(x) \\ &= (\partial_\mu + ig(A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x)))e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu\psi(x) + i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x) + igA_\mu\psi(x) - i(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x)) \\ &= e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu\psi(x) + igA_\mu\psi(x)) \\ &= e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x) \end{aligned}$$

このように、 $\partial_\mu\psi'$ での余計な項が消されます ((7) と同じ)。よって、共変微分に置き換えたラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) \\ &= \mathcal{L}_D \end{aligned}$$

となり、局所的ゲージ変換で不変です。これは (2) での $\mathcal{L}_d + \mathcal{L}_{int}$ 部分なので、局所的ゲージ不変性から相互作用項が決まります。

局所的ゲージ変換の不変性から導入される場はゲージ場 (gauge field) と呼ばれます。なので、電磁場はゲージ場で、 A_μ は交換できることから (古典的な A_μ 同士が交換できる)、可換ゲージ場 (abelian gauge field) と呼ばれます。

電磁場の変換はエルミート共役を取って ($\psi'^\dagger = \psi^\dagger U^\dagger$, $A'^\dagger_\mu = A_\mu$)

$$\begin{aligned}
D_\mu^\dagger \psi^{\dagger'} &= (D_\mu^\dagger \psi^\dagger) U^\dagger \\
(\partial_\mu - igA'_\mu) \psi^{\dagger'} &= (\partial_\mu - igA_\mu) \psi^\dagger U^\dagger \\
(\partial_\mu - igA'_\mu) \psi^{\dagger'} U^\dagger &= (\partial_\mu - igA_\mu) \psi^\dagger U^\dagger \\
\psi^\dagger (\partial_\mu U^\dagger) + (\partial_\mu \psi^\dagger) U^\dagger - igA'_\mu \psi^\dagger U^\dagger &= (\partial_\mu \psi^\dagger) U^\dagger - igA_\mu \psi^\dagger U^\dagger \\
(\partial_\mu U^\dagger) \psi^\dagger - igA'_\mu \psi^\dagger U^\dagger &= -igA_\mu \psi^\dagger U^\dagger \\
\psi^\dagger ((\partial_\mu U^\dagger) - igA'_\mu U^\dagger) &= -igA_\mu \psi^\dagger U^\dagger \\
(\partial_\mu U^\dagger) - igA'_\mu U^\dagger &= -igA_\mu U^\dagger \\
U(\partial_\mu U^\dagger) - igA'_\mu &= -igA_\mu \\
A'_\mu &= A_\mu - \frac{i}{g} U(\partial_\mu U^\dagger)
\end{aligned}$$

という形にもできます。

また、局所的ゲージ変換は $\alpha(x) = g\Lambda(x)$ として

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= e^{i\alpha(x)} \psi(x) = e^{ig\Lambda(x)} \psi(x) \\
A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x) = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x)
\end{aligned}$$

という2つの形が使われています。計算するときに電荷 g が出てこない方を選ぶと楽です。また、上での f_μ の符号をマイナスにすれば

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \quad A'_\mu = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger = A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x) = A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$$

となるので、どの定義を使っているのかに注意する必要があります。

ここで重要なのは、局所的ゲージ不変性の要求によって電磁場と相互作用項 $A_\mu J^\mu$ が出てくることです。局所的ゲージ変換による対称性によって相互作用の形が制限され、今の場合ではディラック場と電磁場の相互作用が決められています。このように、ゲージ不変性によってゲージ場が導入され相互作用の形が決まることを、ゲージ原理と言います。そして、ゲージ不変性をもとにする理論をゲージ理論と呼び、素粒子での中心的なものとなっています。

ラグランジアンでの変換性から共変微分を導入しましたが、別の視点から見ておきます。点 x と微小に離れた点 $x + dx$ を用意し、 ψ_p は x から $x + dx$ へ ψ を平行移動させたときのディラック場とします。そうすると

$$\psi_p(x + dx) = \psi(x + dx) + \delta\psi$$

での $\delta\psi$ は平行移動とのズレとなります。つまり、点 x での $\psi(x)$ を $x + dx$ に平行移動させたとき $\psi_p(x + dx)$ になるなら、 $\psi(x + dx)$ から $\delta\psi$ だけズレることを言っています。このズレを微分に含めたのが共変微分で、それによって変換の不変性を作っています。

これは曲がった空間でのベクトルの平行移動と同じ状況です。曲がった空間では曲率の影響で平行移動でズレが生じるのと同じように (平坦空間でのベクトルの平行移動は $v^\mu(x) = v^\mu(x + dx)$)、今は電磁場の影響でズレが起きている。また、一般相対論では一般座標変換 $T^\mu_\nu(x)$ によってベクトル v^μ は

$$v'^\mu(x) = T^\mu_\nu(x)v^\nu(x)$$

と変換されるので、同じように微分が $T^\mu_\nu(x)$ に作用します。なので、共変微分が出てきます。平行移動との関係は一般相対性理論の「アフィン接続係数と平行移動」、「共変微分」、「リーマン曲率テンソル・ビアンキの恒等式」を見てください。

電磁場の影響とはっきりさせるために、一般相対論と同じように、平行四角形上の平行移動を行います。点 A から出発して平行移動によって点 B, C, D を経由して点 A に帰ってくるとします。移動した先が ψ_p になる場合が知りたいので

$$\psi_p(x + dx) = \psi(x) + D_\mu \psi(x) dx^\mu$$

を使って動かしていきます。まず、点 A から点 B へは (点 A と点 B は Δx 離れているとする)、普通の微分と同じように 2 次までの展開を共変微分で行い

$$\psi(B) = (1 + \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu) \psi(A)$$

ここから点 C に行くので、点 B と点 C が $\Delta x'$ 離れているとして

$$\begin{aligned} \psi(C) &= (1 + \Delta x'^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu D_\mu D_\nu) \psi(B) \\ &= (1 + \Delta x'^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu D_\mu D_\nu) (1 + \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu) \psi(A) \\ &= (1 + \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu + \Delta x'^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu D_\mu D_\nu + \Delta x'^\mu \Delta x^\mu D_\mu D_\mu) \psi(A) \\ &= (1 + (\Delta x^\mu + \Delta x'^\mu) D_\mu + (\frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu + \Delta x'^\mu \Delta x^\nu) D_\mu D_\nu) \psi(A) \end{aligned}$$

微小な $\Delta x, \Delta x'$ が 3 つ含まれる項は落としています。また、 $\Delta x'^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu$ は添え字を変えて揃えています。点 D に行くには $-\Delta x$ 動かすので

$$\begin{aligned}
\psi(D) &= (1 - \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu) \psi(C) \\
&= (1 - \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu) (1 + (\Delta x^\mu + \Delta x^{\mu'}) D_\mu \\
&\quad + (\frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu + \Delta x'^\mu \Delta x^\nu) D_\mu D_\nu) \psi(A) \\
&= (1 + (\Delta x^\mu + \Delta x^{\mu'}) D_\mu + (\frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu + \Delta x'^\mu \Delta x^\nu) D_\mu D_\nu \\
&\quad - \Delta x^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x^\mu \Delta x^\nu D_\mu D_\nu - (\Delta x^\mu \Delta x^\nu + \Delta x^\mu \Delta x'^\nu) D_\mu D_\nu) \psi(A) \\
&= (1 + \Delta x'^\mu D_\mu + (\frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu + \Delta x'^\mu \Delta x^\nu - \Delta x^\mu \Delta x'^\nu) D_\mu D_\nu) \psi(A)
\end{aligned}$$

最後に点 A に行くためには $-\Delta x'$ 動かして

$$\begin{aligned}
\psi'(A) &= (1 - \Delta x'^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu D_\mu D_\nu) \psi(D) \\
&= (1 - \Delta x'^\mu D_\mu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu D_\mu D_\nu) (1 + \Delta x'^\mu D_\mu + (\frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu + \Delta x'^\mu \Delta x^\nu - \Delta x^\mu \Delta x'^\nu) D_\mu D_\nu) \psi(A) \\
&= (1 + \Delta x'^\mu D_\mu + (\frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu + \Delta x'^\mu \Delta x^\nu - \Delta x^\mu \Delta x'^\nu) D_\mu D_\nu \\
&\quad - \Delta x'^\mu D_\mu - \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu D_\mu D_\nu) \psi(A) \\
&= (1 + (\Delta x'^\mu \Delta x^\nu - \Delta x^\mu \Delta x'^\nu) D_\mu D_\nu) \psi(A) \\
&= (1 + \Delta x'^\mu \Delta x^\nu (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)) \psi(A) \\
&= (1 + \Delta x'^\mu \Delta x^\nu [D_\mu, D_\nu]) \psi(A)
\end{aligned}$$

これでもとの位置に戻ってきました。直線座標系では一周してもとの位置にすればもとの値に戻りますが、今の場合はもとに戻らなく、 $\Delta x'^\mu \Delta x^\nu [D_\mu, D_\nu]$ という項が出てきます。

交換関係 $[D_\mu, D_\nu]$ は、場 ψ に作用することに注意して展開すれば

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + igA_\mu, \partial_\nu + igA_\nu] \\
&= [\partial_\mu, \partial_\nu] + ig[A_\mu, \partial_\nu] + ig[\partial_\mu, A_\nu] + (ig)^2[A_\mu, A_\nu] \\
&= ig(A_\mu \partial_\nu - \partial_\nu A_\mu - A_\nu \partial_\mu + \partial_\mu A_\nu + A_\nu \partial_\mu - A_\mu \partial_\nu) + (ig)^2[A_\mu, A_\nu] \\
&= ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - g^2[A_\mu, A_\nu]
\end{aligned}$$

第一項に電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ が出てきたので、電磁場の影響によって ψ がもとの位置に戻っても値がズレると言えます。第二項の交換関係は電磁場は交換可能なので 0 ですが、交換関係が 0 にならない非可換ゲージ場との比較のために最後まで残しています。こういったことから $F_{\mu\nu}$ を場の強さ (Field strength) と呼んだりします。交換関係を消せば

$$[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}$$

となります。また、一般相対論では A_μ は接続、 $F_{\mu\nu}$ は曲率として出てきます。

・補足

別の視点からも同じ相互作用項が出てくることを示します。上での話はディラック場に対して局所的ゲージ不変性を要求して共変微分を導入するという流れだったので、今度は先に電磁場側から導入します。量子力学での「スピン」と同じことをしますが、ここでは特殊相対論から始めます。

特殊相対論での自由粒子の作用は

$$S = -m \int dt (g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt})^{\frac{1}{2}} = -m \int dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} \quad (\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt})$$

と書けます (一般相対性理論の「測地線と運動方程式」の補足参照)。時間積分は始点 $(t_i, \mathbf{x}_i)$ 、終点 $(t_f, \mathbf{x}_f)$ の範囲でのものです。自由粒子が素電荷 $e > 0$ を持つとして、静止している電荷 e によるポテンシャル V を加えます。そうすると、電荷 e を持つ自由粒子に対する V はスカラーポテンシャル $\phi(x)$ によって

$$V(x) = e\phi(x)$$

位置が時間に依存するので

$$V(t) = e\phi(t, \mathbf{x}(t))$$

ポテンシャルはラグランジアンに $L = T - V$ と入ってくるので (T は運動エネルギー)

$$L = -m\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - e\phi(x)$$

ϕ は 4 元ベクトルポテンシャル A_μ の $A_0 = \phi$ なので

$$L = -m\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - eA_0(x)$$

よって、作用は

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - e \int dt A_0(x)$$

このポテンシャル部分を 4 元ベクトルに拡張すると

$$\begin{aligned} S &= -m \int dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - e \int dt A_0(x) - e \int dx^1 A_1(x) - \dots \\ &= -m \int dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - e \int dx_0 A_0(x) - e \int dx^i A_i(x) \\ &= -m \int dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - e \int dx^\mu A_\mu(x) \end{aligned}$$

空間積分部分を時間積分に書き換えると

$$\begin{aligned}
S &= -m \int dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - e \int dt A_0(x) + e \int dt \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{A}(x) \\
&= -m \int dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - e \int dt (A_0(x) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x)) \\
&= \int dt (-m \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} - e(A_0(x) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x)))
\end{aligned}$$

このときの共役な運動量は

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2}} + e\mathbf{A}(x) \quad (9)$$

この共役運動量によってハミルトニアンは

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$$

(9) を $\mathbf{v}$ の式に変えると

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} - e\mathbf{A} &= \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2}} \\
(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 &= \frac{m^2 |\mathbf{v}|^2}{1 - |\mathbf{v}|^2} \\
(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 (1 - |\mathbf{v}|^2) &= m^2 |\mathbf{v}|^2 \\
(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 &= m^2 |\mathbf{v}|^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 |\mathbf{v}|^2 \\
|\mathbf{v}|^2 &= \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p} - e\mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}}
\end{aligned}$$

これをハミルトニアンに入れると

$$\begin{aligned}
H &= \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{p} - e\mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} - L \\
&= \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{p} - e\mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} + m\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2} + eA_0 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \\
&= \frac{|\mathbf{p}|^2 - e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} + m\left(1 - \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}\right)^{1/2} + eA_0 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \\
&= \frac{|\mathbf{p}|^2 - e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} + m \frac{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} + eA_0 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \\
&= \frac{|\mathbf{p}|^2 - e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} + \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} + eA_0 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \\
&= \frac{m^2 + |\mathbf{p}|^2 - e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} + eA_0 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \\
&= \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} + \frac{e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - e^2|\mathbf{A}|^2}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} + eA_0 - \frac{e\mathbf{p} - e^2\mathbf{A}}{\sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}} \cdot \mathbf{A} \\
&= \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} + eA_0
\end{aligned}$$

これの非相対論的極限を取ると $((\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 \ll m^2)$

$$H \simeq m + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + eA_0$$

このハミルトニアンを使ってシュレーディンガー方程式を作ると

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \hat{H}\psi \\
&= \left(m + \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 + eA_0\right)\psi \\
\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right)\psi &= \left(m + \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2\right)\psi
\end{aligned}$$

右辺の運動量演算子を微分演算子にして

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right)\psi = \left(m + \frac{1}{2m}(-i\nabla - e\mathbf{A})^2\right)\psi$$

これと相互作用のない自由粒子のみの非相対論的なハミルトニアン

$$H_0 \simeq m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

によるシュレーディンガー方程式

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \hat{H}_0\psi \\
&= (m + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m})\psi \\
&= (m + \frac{1}{2m}(-i\nabla)^2)\psi
\end{aligned}$$

を比較すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + ieA_0, \quad \nabla \Rightarrow \nabla - ie\mathbf{A}$$

となるので、4元ベクトルで書くと

$$\partial_\mu \Rightarrow (\partial_0 + ieA_0, \partial_i + ieA_i) = \partial_\mu + ieA_\mu$$

となります ($A_\mu = (A_0, A_i) = (A_0, -\mathbf{A})$)。よって、相互作用のない状況から、この置き換えによって相互作用のある状況に持っていけることが分かります。この置き換えは共変微分への変更と全く同じです。