

電磁場の量子化

電磁場を正準量子化の手続きを使って量子化します。電磁場を量子化するときに面倒なのは、ゲージ変換による余計な非物理的自由度が存在することです。

最初にクーロングージで行い、次にローレンツゲージで行います。

同じローマ文字の添え字では 1 から 3 の和を取ります。

ベクトルポテンシャル A_μ による電荷のない真空中でのマクスウェル方程式

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0$$

に対して場の量子化を行います。対応するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

正準共役な場 π_μ は

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \quad \pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = E^i$$

E^i は電場です。

電磁場ではゲージ条件があるので、まずはクーロングージの場合から見ていきます。この条件では、そのまま電磁場の物理的な自由度 2 になりますが、共変性はなくなります。

- クーロングージ

クーロングージは

$$A_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

この場合、ベクトルポテンシャルの 0 成分が消えます。そして、 $\pi_0 = 0$ なので、クーロングージでは場の演算子の同時刻交換関係を 3 次元成分だけで ($i, j = 1, 2, 3$)

$$[A_i(\mathbf{x}, t), E_j(\mathbf{x}', t)] = -i\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$[A_i(\mathbf{x}, t), A_j(\mathbf{x}', t)] = [\pi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = 0$$

このように作れると考えます (ただし相対論的な共変性は無くなる)。演算子化してもハットを付けずに書いていきます。また、3 次元成分のみを考えるので添え字の上下は意味がなくなります。

しかし、上の交換関係の発散を取ると、左辺は $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (もしくは $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) から

$$[\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), E_j(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial^i A^i = \partial_i A_i)$$

となりますが、右辺はデルタ関数の微分 $\nabla \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ のせいで 0 にはなりません。このため、交換関係の右辺を変更するという力技に出ます。デルタ関数はフーリエ変換

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$

の形にし、 δ^{ij} を適当な T^{ij} に置き換えて

$$[A_i(\mathbf{x}, t), E_j(\mathbf{x}', t)] = -\frac{iT_{ij}}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$

この右辺が発散で 0 になればいいので

$$-\frac{iT_{ij}}{(2\pi)^3} \int d^3 k \partial_i e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} k_i T_{ij} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = 0$$

から

$$T_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (k_i T_{ij} = k_j - \frac{k^2 k_j}{k^2} = 0)$$

とすれば、右辺は 0 になります。よって、交換関係は

$$[A_i(\mathbf{x}, t), E_j(\mathbf{x}', t)] = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3 k (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (1)$$

と修正します。

生成、消滅演算子を取り出すために、場 A を展開して

$$\begin{aligned} A(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} (A^-(\mathbf{k}) e^{-ikx} + A^+(\mathbf{k}) e^{ikx}) \quad (k_0 = |\mathbf{k}|) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) (a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) e^{ikx}) \end{aligned}$$

A は実数なので「クライン・ゴールドン場～実スカラー場～」と同じように展開し、後で演算子化するのでエルミート共役で書いています。 $\epsilon^{(\lambda)}$ は偏極ベクトルで、クーロンゲージでは横波成分しかないので $\lambda = 1, 2$ です。 E の展開は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) ((-ik_0)a_{\lambda}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + (ik_0)a_{\lambda}^{\dagger}(\boldsymbol{k})e^{ikx}) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 ik_0 \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) (a_{\lambda}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} - a_{\lambda}^{\dagger}(\boldsymbol{k})e^{ikx})
\end{aligned}$$

これらを交換関係に入れると ($e^{ik'x'}$ と書きますが時間成分は t です)

$$\begin{aligned}
& [A_i(\mathbf{x}, t), E_j(\mathbf{x}', t)] \\
&= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 2k_0 2k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 i k'_0 \\
&\quad \times (\epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda')}(\mathbf{k}') (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x'} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x'}) \\
&\quad - \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda')}(\mathbf{k}') (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x'} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x'}) (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx})) \\
&= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 i k'_0 \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times [a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(kx+k'x')} - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(kx-k'x')} \\
&\quad + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k'x'-kx)} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(kx+k'x')} \\
&\quad - (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i(kx+k'x')} + a_{\lambda'}(\mathbf{k}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(k'x'-kx)} \\
&\quad - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i(kx-k'x')} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{i(kx+k'x')}] \\
&= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 i k'_0 \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times ((a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') - a_{\lambda'}(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k})) e^{-i(kx+k'x')} \\
&\quad + (a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')) e^{-i(kx-k'x')} \\
&\quad + (a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') - a_{\lambda'}(\mathbf{k}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})) e^{-i(k'x'-kx)} \\
&\quad + (a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')) e^{i(kx+k'x')}) \\
&= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 i k'_0 \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times ([a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}(\mathbf{k}')] e^{-i(kx+k'x')} + [a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}'), a_\lambda(\mathbf{k})] e^{-i(kx-k'x')} \\
&\quad + [a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_{\lambda'}(\mathbf{k}')] e^{-i(k'x'-kx)} + [a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}'), a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})] e^{i(kx+k'x')}) \\
&= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 i k'_0 \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times ([a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}'), a_\lambda(\mathbf{k})] e^{-i(kx-k'x')} + [a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_{\lambda'}(\mathbf{k}')] e^{-i(k'x'-kx)})
\end{aligned}$$

ここで (1) を満たすように、演算子 $a_\lambda(\mathbf{k}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ の交換関係を

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = 2k_0 (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = [a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

とします。そうすると

$$\begin{aligned}
[A_i(\mathbf{x}, t), E_j(\mathbf{x}', t)] &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 i\epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times \left(-2k_0(2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{-i(k_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - (k'_0 t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'))} \right. \\
&\quad \left. - 2k_0(2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{-i(k'_0 t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - (k_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}))} \right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^6 4k_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 i\epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda')}(\mathbf{k}) \\
&\quad \times \left(-2k_0(2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} e^{-i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}')} - 2k_0(2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} e^{-i(-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^6 4k_0} \sum_{\lambda=1}^2 i\epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_j^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \\
&\quad \times \left(-2k_0(2\pi)^3 e^{-i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}')} - 2k_0(2\pi)^3 e^{-i(-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4k_0} (-2ik_0) \left(-g_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) (e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}) \\
&= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-g_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\
&= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}
\end{aligned}$$

偏極ベクトルの関係

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_i^{(\lambda)} \epsilon_j^{(\lambda)} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2}$$

を使っています。よって、 $a_\lambda(\mathbf{k}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ は生成、消滅演算子です。電磁場を量子化することで出てくる粒子は光子なので、横波の光子に対する生成、消滅演算子です。というわけで、電磁場を量子化することで粒子が現れ、それを横波光子として導入されました。

生成、消滅演算子が作れたので、ハミルトニアン演算子

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

を求めておきます。クライン・ゴールドン場と同じように無限大が出てくるので正規積を取って

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \frac{1}{2} : (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) :$$

$\mathbf{E}^2$ は

$$\begin{aligned}
E^2 &= \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 i k_0 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) \\
&\quad \times i k'_0 \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}') (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x}) \\
&= - \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 k'_0 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k'+k)x} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k'-k)x} \\
&\quad - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k'-k)x} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k'+k)x}) \\
&= - \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 k'_0 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\
&\quad - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k})) \\
&= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0^2 (\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad + \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}))) \\
&= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 k_0^2 (\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad + \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k})))
\end{aligned}$$

磁場 B は $B = \nabla \times A$ から

$$\begin{aligned}
B &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \nabla \times \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 i \mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx})
\end{aligned}$$

B^2 は

$$\begin{aligned}
B^2 &= - \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})) (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')}(\mathbf{k}')) \\
&\quad \times (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x}) \\
&= - \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})) (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')}(\mathbf{k}')) \\
&\quad \times (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k'+k)x} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k'-k)x} \\
&\quad - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k'-k)x} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k'+k)x}) \\
&= - \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})) (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')}(\mathbf{k}')) \\
&\quad \times (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\
&\quad - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' + \mathbf{k})) \\
&= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 ((\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})) (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')}(\mathbf{k})) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad + (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})) (-\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')}(-\mathbf{k})) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k})))
\end{aligned}$$

$E^2 + B^2$ は

$$\begin{aligned}
E^2 + B^2 &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0^2 (\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k})) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad + \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k})) \\
&\quad - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} ((\mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}))(\mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k})) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad + (\mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}))(-\mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k})) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}))) \\
&= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} (\mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}))(\mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k})) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k})) \\
&\quad - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} (\mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}))(-\mathbf{k} \times \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k})) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k})) \\
&= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} \mathbf{k}^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k})) \\
&\quad - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} (-\mathbf{k}^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k})) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k})) \\
&= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} (k_0^2 + \mathbf{k}^2) \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) (-a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k})) \\
&\quad - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} (k_0^2 - \mathbf{k}^2) \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(-\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(-\mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(-\mathbf{k}))
\end{aligned}$$

ベクトルの関係

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

を使っています。そして、電磁場なので $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0$ から

$$E^2 + B^2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 2k_0^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) (a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) + a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}))$$

というわけで、ハミルトニアンは正規積によって

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 2k_0^2 \epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}) (a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) + a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k})) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 2k_0^2 \delta_{\lambda\lambda'} (a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) + a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k})) \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 k_0 a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}) a^{(\lambda)}(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

全運動量は同様に

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \int d^3 x : \mathbf{E} \times \mathbf{B} : \\
&= - \int d^3 x : \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 2k_0 2k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 (\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \times (\mathbf{k}' \times \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}')) \\
&\quad \times (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x}) : \\
&= - \int d^3 x : \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 2k_0 2k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 ((\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}')) \mathbf{k}' - (\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}') \epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{k}')) \\
&\quad \times (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x}) : \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{k} a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}) a^{(\lambda)}(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

ベクトルの関係

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

を使っています。これでクーロンゲージでの話は終わりにします。

- ローレンツゲージ

クーロンゲージでは相対論的な共変性が無くなっているので、相対論的に扱うのに不便です。なので、共変性を持つローレンツゲージを使います。しかし、 $\pi^0 = 0$ なので、 A_μ, π^μ の同時刻交換関係を作る時に 0 成分が成立しません。これの対処を行います。

そのためにラグランジアンを

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\rho A^\rho)^2 \quad (2)$$

と変更します。これはフェルミ (Fermi) によって与えられました。これをさらに一般化すると

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\rho A^\rho)^2$$

α は任意パラメータで、この項をゲージ固定項 (gauge-fixing term) と言います。 $1/\alpha$ を α と書いても問題はないです。下の補足でもう少し細かく触れています。

このラグランジアン第二項をオイラー・ラグランジュ方程式に入れると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\alpha}\partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_\rho A^\rho)^2 &= 2\frac{1}{2\alpha}\partial_\mu g^\mu{}_\rho g^{\rho\nu}(\partial_\mu A_\nu) = \frac{1}{\alpha}\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) \\ \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial A_\nu}(\partial_\rho A^\rho)^2 &= 0\end{aligned}$$

これが第一項のマクスウェル方程式に加わるので

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = \square A_\mu - (1 - \frac{1}{\alpha})\partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0$$

$\alpha = 1$ でローレンツゲージでのマクスウェル方程式

$$\square A_\mu = 0$$

になります。特に、 $\alpha = 1$ をファインマンゲージ、 $\alpha = 0$ をランダウゲージと呼びます。このとき、ローレンツゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ は要求されていません。

修正されたラグランジアンを使うことで π_0 は

$$\pi_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^0} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\dot{A}^0}(\partial_0 A^0 + \dots + \partial_3 A^3)^2 = -\frac{1}{\alpha}(\partial_\rho A^\rho) \quad (\dot{A}^0 = \partial_0 A^0)$$

となり、0 になりません。

ここからはファインマンゲージを取って話を進めていきます。このときのマクスウェル方程式は $\square A_\mu = 0$ から、質量のないクライン・ゴールドン方程式と同じ形なのでラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$$

とも書けます。共役な場 π_μ は

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu} = -\dot{A}_\mu$$

ハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = -\pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \\
&= -\pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} (\partial_0 A_\nu \partial^0 A^\nu + \partial_1 A_\nu \partial^1 A^\nu + \partial_2 A_\nu \partial^2 A^\nu + \partial_3 A_\nu \partial^3 A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} (\partial_1 A_\nu \partial^1 A^\nu + \partial_2 A_\nu \partial^2 A^\nu + \partial_3 A_\nu \partial^3 A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial_j A_\mu \partial^j A^\mu \quad (j = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

同時刻交換関係は

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = -[A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] = ig^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0$$

と作ります。共変性を持たせるために、右辺に計量 $g^{\mu\nu}$ を使います (クロネッカーデルタだと共変性がない)。

共変性を持つように交換関係を設定できましたが、別の問題が起きます。このときポアンカレ変換に対する不変性が要求されますが、場 A_μ を演算子としたときにローレンツゲージ

$$\partial^\mu A_\mu = 0$$

が成立しません。そもそも、質量 0 ではラグランジアンから式としてこれは導けないです (質量があればラグランジアンから導ける)。このことは、演算子とした $\partial_\mu A^\mu$ と A^ν の交換関係から直接見れます。交換関係は

$$\begin{aligned}
[\partial_\mu A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] &= [\partial_0 A^0 + \nabla \cdot \mathbf{A}, A^\nu(\mathbf{x}', t)] \\
&= [\partial_0 A^0, A^\nu(\mathbf{x}', t)] + [\nabla \cdot \mathbf{A}, A^\nu(\mathbf{x}', t)] \\
&= [\partial_0 A^0, A^\nu(\mathbf{x}', t)] + \nabla \cdot [\mathbf{A}, A^\nu(\mathbf{x}', t)] \\
&= ig^{0\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0
\end{aligned}$$

なので、演算子としての $\partial_\mu A^\mu$ は 0 ではないです。ローレンツゲージが成立していないので、 A_μ の独立成分を減らすための条件として使えません。これが問題を起こします。ちなみに、クーロンゲージでは前提条件として演算子方程式としての条件を成立させることで交換関係が設定でき、自動的に自由度 2 になっていました。また、ポアンカレ不変性を要求することで、マクスウェル方程式とローレンツゲージが演算子の方程式として成立しないことを示せますが、省きます。

問題になるのはハミルトニアンが正にならないことです。ハミルトニアン演算子を求めて、それを見ます。場 A^μ をフーリエ展開して

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon^{\mu(\lambda)}(\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx})$$

今は制限がないので偏極ベクトルは $\lambda = 0, 1, 2, 3$ です。展開係数 $a_\lambda(\mathbf{k}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ の交換関係を求めます。 A^μ の共役な場 π^μ は

$$\begin{aligned}\pi^\mu &= -\dot{A}^\mu = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) (-ik_0 a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + ik_0 a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})(\mathbf{k}) e^{ikx}) \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 k_0 \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx})\end{aligned}$$

A^μ, π^ν の同時刻交換関係は (ここでも $kx, k'x'$ での時間は同じ t とします)

$$\begin{aligned}[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= i \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 (\epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')\nu}(\mathbf{k}') (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x'} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x'}) \\ &\quad - \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')\nu}(\mathbf{k}') (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x'} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x'}) (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx})) \\ &= i \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')\nu}(\mathbf{k}') \\ &\quad \times ((a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x'} e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x'} e^{ikx} \\ &\quad - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x'} e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x'} e^{ikx} \\ &\quad - (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ik'x'} e^{-ikx} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k}) e^{ik'x'} e^{-ikx}) \\ &\quad - (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-ik'x'} e^{ikx} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik'x'} e^{ikx})) \\ &= i \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')\nu}(\mathbf{k}') \\ &\quad \times ((a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') - a_{\lambda'}(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k})) e^{-ik'x'} e^{-ikx} \\ &\quad + (a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')) e^{ik'x'} e^{ikx} \\ &\quad + (a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k}) - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')) e^{ik'x'} e^{-ikx} \\ &\quad + (a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') - a_{\lambda'}(\mathbf{k}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})) e^{-ik'x'} e^{ikx})\end{aligned}$$

$a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_\lambda(\mathbf{k})$ の交換関係は

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = -2k_0 (2\pi)^3 g_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3a)$$

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = [a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (3b)$$

とすれば

$$\begin{aligned}
[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= i \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')\nu}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times (2k_0(2\pi)^3 g_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{ik'x'} e^{-ikx} + 2k_0(2\pi)^3 g_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{-ik'x'} e^{ikx})
\end{aligned}$$

デルタ関数によって、 $k_0 = |\mathbf{k}| = k'_0$ から $k'_0 x_0 - k_0 x_0 = 0$ になるので

$$\begin{aligned}
[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} 2k_0^2 g_{\lambda\lambda'} \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')\nu}(\mathbf{k}) (e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} + e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}) \\
&= \frac{i}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\lambda\lambda'} \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')\nu}(\mathbf{k}) (\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})) \\
&= i \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\lambda\lambda'} \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\lambda')\nu}(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\
&= i g^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x})
\end{aligned}$$

最後に偏極ベクトルの関係

$$\sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 g_{\lambda\lambda'} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_\nu^{(\lambda')}(\mathbf{k}) = g_{\mu\nu}$$

を使っています。よって $a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}), a^{(\lambda')}(\mathbf{k}')$ の交換関係を (3a), (3b) とすれば、場の演算子の同時刻交換関係が成立します。というわけで、今の場合での生成、消滅演算子が求まりました。

ハミルトニアン演算子は

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x : \left(-\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial_j A_\mu \partial^j A^\mu \right) : \\
&= \int d^3x : \left(-\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu - \frac{1}{2} \nabla A_\mu \cdot \nabla A^\mu \right) : \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 2k_0 2k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times : \left(-k_0 k'_0 (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x}) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' (a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}) (a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x} - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik'x}) \right) : \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} (k_0 k'_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times : \left(a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k+k')x} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k'-k)x} \right. \\
&\quad \left. - a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(k'-k)x} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k+k')x} \right) : \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} (k_0 k'_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times \left(a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k+k')x} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{-i(k'-k)x} \right. \\
&\quad \left. - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i(k'-k)x} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k+k')x} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda, \lambda'} (k_0 k'_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \epsilon^{(\lambda)\mu}(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^{(\lambda')}(\mathbf{k}') \\
&\quad \times \left(a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-i2k_0 x_0} - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right. \\
&\quad \left. - a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') a_\lambda(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') e^{-i2k_0 x_0} \right)
\end{aligned}$$

デルタ関数から $k_0 = k'_0$ としています。 $k_0 k'_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$ は、第一項と第四項では $k_0^2 - \mathbf{k}^2$ 、第二項と第三項では $k_0^2 + \mathbf{k}^2$ なので、 $k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 0$ から第二項と第三項だけが残ります。そして、偏極ベクトルの直交性

$$\epsilon^{\mu(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^{(\lambda')}(\mathbf{k}) = g_{\lambda\lambda'}$$

から

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} g_{\lambda \lambda'} (k_0^2 + \mathbf{k}^2) (-a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}) - a_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k})) \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4k_0^2} \sum_{\lambda, \lambda'} 2k_0^2 (-g_{\lambda \lambda'} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k})) \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda, \lambda'} k_0 (-g_{\lambda \lambda'} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k})) \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 k_0 (-g_{\lambda \lambda} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}))
\end{aligned}$$

最後に計量は $\lambda = \lambda'$ 以外では 0 となることを使っています。このハミルトニアン演算子はマイナスを含んでいます。成分を分けると

$$H = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \left(-a_0^{\dagger}(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) + \sum_{\lambda=1}^3 a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \right)$$

偏極ベクトルが $\lambda = 0$ でマイナスになり、 $\lambda = 1, 2, 3$ ではプラスです。これは運動量の場合でも同様に起きて、結果だけ示せば

$$K = \int d^3 x : \dot{A}_{\mu} \nabla A^{\mu} := \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} \mathbf{k} \left(-a_0^{\dagger}(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) + \sum_{\lambda=1}^3 a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \right)$$

このように、 $a_0^{\dagger}, a_0$ による粒子 (スカラー光子) のために、負の値を持てます。

このことをさらに見ていきます。運動量 q 、偏極 λ での 1 粒子状態は

$$\sqrt{2q_0} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{q}) |0\rangle$$

として作れるので、これによる波束を

$$|1^{(\lambda)}(\mathbf{q})\rangle = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2q_0} f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{q}) |0\rangle \quad \left(\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} |f(\mathbf{q})|^2 = 1 \right)$$

とします。そうすると、ハミルトニアンの固有値は

$$\begin{aligned}
H|1^{(\lambda)}(\mathbf{q})\rangle &= - \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^6 2k_0 2q_0} k_0 a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{q}) |0\rangle \\
&\quad + \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^6 2k_0 2q_0} k_0 \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger(\mathbf{k}) a_i(\mathbf{k}) f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}) |0\rangle \\
&= - \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^6 2k_0 2q_0} f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} k_0 a_0^\dagger(\mathbf{k}) (a_\lambda^\dagger(\mathbf{q}) a_0(\mathbf{k}) - 2k_0 (2\pi)^3 g_{0\lambda} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q})) |0\rangle \\
&\quad + \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^6 2k_0 2q_0} f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} k_0 \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger(\mathbf{k}) (a_\lambda^\dagger(\mathbf{q}) a_i(\mathbf{k}) - 2k_0 (2\pi)^3 g_{i\lambda} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q})) |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} k_0 g_{0\lambda} a_0^\dagger(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) |0\rangle \\
&\quad - \int \frac{d^3k d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} k_0 \sum_{i=1}^3 g_{i\lambda} a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) |0\rangle \\
&= q_0 g_{0\lambda} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} a_0^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle - q_0 \sum_{i=1}^3 g_{i\lambda} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} f(\mathbf{q}) \sqrt{2q_0} a_\lambda^\dagger(\mathbf{q}) |0\rangle \\
&= (q_0 g_{0\lambda} - q_0 \sum_{i=1}^3 g_{i\lambda}) |1^{(\lambda)}(\mathbf{q})\rangle
\end{aligned}$$

これは $\lambda = 0, \lambda = i$ のどちらでも $q_0 |1^{(\lambda)}(\mathbf{q})\rangle$ なので負になっていません。

しかし、1 粒子状態の自乗ノルムは

$$\begin{aligned}
\langle 1^{(\lambda')}(\mathbf{q}') | 1^{(\lambda)}(\mathbf{q}) \rangle &= \int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^6 2q_0 2q'_0} \sqrt{2q_0} \sqrt{2q'_0} f^*(\mathbf{q}') f(\mathbf{q}) \langle 0 | a_{\lambda'}(\mathbf{q}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^6 2q_0 2q'_0} \sqrt{2q_0} \sqrt{2q'_0} f^*(\mathbf{q}') f(\mathbf{q}) \\
&\quad \times \langle 0 | (a_{\lambda'}(\mathbf{q}') a_\lambda^\dagger(\mathbf{q}) - 2q_0 (2\pi)^3 g_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{q}' - \mathbf{q})) | 0 \rangle \\
&= - \int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^3 2q_0 2q'_0} 2q_0 \sqrt{2q_0} \sqrt{2q'_0} f^*(\mathbf{q}') f(\mathbf{q}) g_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \langle 0 | 0 \rangle \\
&= - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 (2q_0)^2} (2q_0)^2 |f(\mathbf{q})|^2 g_{\lambda\lambda'} \langle 0 | 0 \rangle \\
&= - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} |f(\mathbf{q})|^2 g_{\lambda\lambda'}
\end{aligned}$$

計量の符号のために、 $\lambda, \lambda' = 0$ で自乗ノルムが負になります。このように負の自乗ノルムを持つ時、その空間 (ヒルベルト空間やフォック空間) は不定計量 (indefinite metric) を持つと言います。負の自乗ノルムが存在してしまうと、例えば波動関数の確率解釈ができなくなり、かなり厄介な状況になります。

この状況はディラック場のときと似ているので、生成演算子を a_0 、消滅演算子を $a_0^\dagger$ とすればいいように思えますが、 a_λ の時間と空間が区別されることになり、共変性がなくなります。なので、共変性を保とうとしている今の状況ではこの方法は使えません。

ちなみに、負の自乗ノルムを持つ状態 (奇数個の $a_0^\dagger$ によって生成される) をゴーストと呼んでいます。正常な粒子のように見えても物理的におかしな性質を一部持つときの呼称がゴーストです。

そもそも物理的な自由度は 2 で、横波となる $\lambda = 1, 2$ だけです。なので、物理的には他の成分は消えるべきです。クーロンゲージでは条件となる演算子方程式が存在するために、素直に消えています。しかし、上で触れたように、演算子方程式としてのローレンツゲージが存在しないです。これをどうにかするのが Gupta-Bleuler の条件で、演算子に条件がなければ状態の方につけてしまえというものです。このとき大事なのは、マクスウェル方程式とローレンツゲージは期待値において成立させることです。

実際に見ていきます。演算子化した A_μ を $A_\mu = A_\mu^- + A_\mu^+$ として、 A_μ^- を

$$A_\mu^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} \quad (A_\mu^- = (A_\mu^+)^\dagger)$$

として、消滅演算子を含む項とします。ここで、状態 $|\psi\rangle$ に

$$\partial^\mu A_\mu^- |\psi\rangle = 0$$

という条件をつけます。 A_μ^+ では

$$\langle\psi|\partial^\mu A_\mu^+ = 0$$

A_μ^- は消滅演算子を含んでいるので、 $|\psi\rangle$ は真空に対する消滅演算子のように作用させています。この条件によって、ローレンツゲージは

$$\langle\psi|\partial^\mu A_\mu|\psi\rangle = \langle\psi|\partial^\mu A_\mu^-|\psi\rangle + \langle\psi|\partial^\mu A_\mu^+|\psi\rangle = 0$$

として、期待値において成立します。マクスウェル方程式も期待値において

$$\langle\psi|\Box A_\nu|\psi\rangle - \partial_\nu \langle\psi|\partial^\mu A_\mu|\psi\rangle = 0$$

となります。

条件が与えられた $|\psi\rangle$ を使うとどうなるのか求めます。 $\partial^\mu A_\mu^- |\psi\rangle$ は

$$\partial^\mu A_\mu^- |\psi\rangle = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^3 k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} |\psi\rangle = 0$$

分かりやすくするために

$$\epsilon^{(0)\mu}(\mathbf{k}) = (1, 0, 0, 0), \quad \epsilon^{(3)\mu}(\mathbf{k}) = (0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|})$$

とすれば、直交性から $k^\mu \epsilon_\mu^{(1,2)} = 0$ なので

$$\sum_{\lambda=0}^3 k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} a_\lambda |\psi\rangle = (k^\mu \epsilon_\mu^{(0)} a_0 + k^\mu \epsilon_\mu^{(3)} a_3) |\psi\rangle = (k_0 a_0 - |\mathbf{k}| a_3) |\psi\rangle$$

$k_0 = |\mathbf{k}|$ から

$$(a_0 - a_3) |\psi\rangle = 0$$

同様に

$$\langle\psi| (a_0^\dagger - a_3^\dagger) = 0$$

これらから

$$\langle\psi| a_0^\dagger a_0 |\psi\rangle = \langle\psi| a_0^\dagger a_3 |\psi\rangle = \langle\psi| a_3^\dagger a_3 |\psi\rangle$$

この関係によって、 $|\psi\rangle$ によるハミルトニアンの期待値は

$$\begin{aligned} \langle\psi| H |\psi\rangle &= \langle\psi| \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 (-a_0^\dagger a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger a_i) |\psi\rangle \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 (\langle\psi| (-a_0^\dagger a_0 + a_3^\dagger a_3) |\psi\rangle + \langle\psi| (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) |\psi\rangle) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \langle\psi| (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) |\psi\rangle \end{aligned}$$

このように、非物理的なスカラー光子と縦波光子が打ち消しあって、物理的な状態 $\lambda = 1, 2$ による粒子数演算子によって構成されています (負にならない)。これはクーロンゲージでのハミルトニアンと一致しています。

・補足

新しい場を伴ってゲージ固定項を書くこともできます。その新しい場を $B(x)$ とすると、ゲージ固定項を加えたラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - B(x) \partial^\mu A_\mu(x) + \frac{\alpha}{2} B^2(x)$$

$B(x)$ のことを補助場 (auviliary field) と呼びます。第二項以降のゲージ固定項を見ると、 $B(x)$ に微分がかかっていないので、 $\dot{B}$ と共役な運動量は存在しません。なので、これも運動方程式とならず、拘束条件になります。実際に、オイラー・ラグランジュ方程式からは

$$\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu B)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} \\ \alpha B(x) &= \partial^\mu A_\mu\end{aligned}\tag{4}$$

という拘束条件になります。

A_μ でのオイラー・ラグランジュ方程式からは、第二項部分が新しく加わり

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -\partial_\nu B(x)\tag{5}$$

補助場によって運動方程式が変更されるように見えますが、拘束条件 (4) を使うことで

$$\begin{aligned}\partial^\mu F_{\mu\nu} &= -\frac{1}{\alpha}\partial_\nu\partial^\mu A_\mu \\ 0 &= \partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{\alpha}\partial_\nu\partial^\mu A_\mu \\ &= \partial^\mu\partial_\mu A_\nu - (1 - \frac{1}{\alpha})\partial_\nu\partial^\mu A_\mu\end{aligned}$$

これは上で求めたものと一致しています。ラグランジアン上でも

$$-B\partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}B^2 = -\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

となって一致します。

(5) に ∂^ν を作用させると $F_{\mu\nu}$ が反対称であることから

$$\square B(x) = 0$$

このため $B(x)$ は質量 0 のクライン・ゴールドン方程式に従います。

このように補助場 $B(x)$ を入れる理由は、 $B(x)$ によって物理的な空間に対する条件を与えられるからです。物理的な空間と言っているのは負のノルムを持たない空間です (例えば、ハミルトニアンが正になる)。その条件は $B(x)$ を演算子としたときに、任意の時間で物理的な状態 $|\psi_{\text{Phys}}\rangle$ に対して

$$B(x)|\psi_{\text{Phys}}\rangle = 0$$

が成立するというものです。Gupta-Bleuler の条件はここから派生してきているものです。