

南部-Jona-Lasinio モデル

QCD の代表的なモデルである南部-Jona-Lasinio モデルについて大雑把に触れていきます (Jona-Lasinio で 1 人の名前です)。このモデルは QCD の非摂動的な話をするときにかなり頻繁に使われているので、その分野に興味がある人は知っておいたほうが良いと思います。

QCD は近似的にカイラル対称性を持たせることができるために、カイラル対称性の扱いがかなり重要な部分となっているんですが、QCD の複雑な構造のためにそう簡単には理解できなくなっています。特にカイラル対称性が重要になってくる低エネルギー領域は摂動論が使えない面倒な部分です。しかしハドロンの構造、クォーク質量の起源などの重要な問題に絡んでいるために、なんとか理解したい領域です。

これに対して、より簡単なモデルを使って QCD が持っている性質を部分的にでも理解しようとするときに使われる代表的なものが南部-Jona-Lasinio モデルで、カイラル対称性を自発的に破るモデルであるということが重要な点になっています。このモデルは相当に QCD の性質を引き継いでいるのでわりと信頼されています。しかし、本当に QCD の低エネルギー領域を記述していると言うには、何かしらかの極限において QCD のラグランジアンと一致している必要があります (もしくは逆に、QCD から出発して低エネルギーで南部-Jona-Lasinio モデルに一致する)。

最初に QCD とカイラル対称性について、いろいろと見ておきます。非可換ゲージ場でのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$$

このようになっています (ローマ字の添え字が重なっている項も和を取る)。QCD の場合、3 色のカラー (色荷) による対称性を考えるために $SU(3)$ の非可換ゲージ場を使います。そのため、 a, b, c は $a, b, c = 1, \dots, 8$ となります。煩わしくなりすぎるので、ディラック場には $SU(3)$ の添え字をつけていません。つけるなら

$$\sum_{i,j=1}^3 \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu(D_\mu)_{ij} - M)\psi_j, \quad (D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{(\sigma^a)_{ij}}{2}$$

となります。カラーの自由度があるということを忘れなければ、添え字を書かなくても困らないと思います。

QCD ではさらにディラック場を区別させます。なぜなら、クォークはフレーバ (flavor) によって区別されるからです。フレーバは単純にクォークの種類のこと、現在のところ u (up、アップ), d (down、ダウン), s (strange、ストレンジ), c (charm、チャーム), b (bottom、ボトム), t (top、トップ) の 6 種類です。そして、クォークの質量はフレーバごとに異なっています。なので、質量項は C をカラー、 f をフレーバとして

$$\bar{\psi}M\psi = \sum_{C=1}^3 \sum_{f=1}^6 m_f \bar{\psi}^{fC} \psi^{fC} = \sum_{C=1}^3 m_1 \bar{\psi}^{1C} \psi^{1C} + \sum_{C=1}^3 m_2 \bar{\psi}^{2C} \psi^{2C} + \dots$$

のように書かれます。運動項は $\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu \psi$ では単純にフレーバで区別された ψ_f それぞれに作用します。つまり

$$(\bar{\psi}_1 \ \bar{\psi}_2 \ \cdots \ \bar{\psi}_6) \begin{pmatrix} i\gamma^\mu D_\mu \psi_1 \\ i\gamma^\mu D_\mu \psi_2 \\ \vdots \\ i\gamma^\mu D_\mu \psi_6 \end{pmatrix}$$

みたいになっているというだけです。

このように QCD のディラック場にはカラー、フレーバ、スピノールの自由度が含まれています。これらの添え字を書いていると煩わしいために、大抵の場合で添え字が書かれていないので、どの自由度に対する計算を行っているのかをちゃんと把握しておく必要があります。

これから先の話にカラーは本筋に絡んでこないで、これ以降無視していきます。

フレーバごとの質量は大体

$$u = 4\text{MeV}, \quad d = 8\text{MeV}, \quad s = 150\text{MeV}, \quad c = 1.2\text{GeV}, \quad b = 4.2\text{GeV}, \quad t = 170\text{GeV}$$

となっています。これは直接的な観測値ではないことに注意してください。クォークはハドロンの閉じ込めという現象のために直接観測はできません。これらの値はカレント代数と呼ばれるものからの推測です (これらをカレント・クォーク質量と呼びます)。

フレーバの数を限定して、軽い u, d クォークだけを考えることにします (2 フレーバ QCD)。この二つの質量は QCD の大まかなエネルギースケール 300MeV に比べて十分小さいので無視するのは近似として十分有効です (s クォークもエネルギースケールより小さいので u, d, s クォークで考えることも多いです)。そうすると質量項は

$$m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d$$

となります。ここで、 u, d クォークの波動関数をそれぞれ u, d としています。「カイラル対称性の破れ」の最初に触れたように、こういった質量項はカイラル対称性を壊します。なので、今の場合でのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{chiral} - (m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d)$$

のように、カイラル対称な項とそうでない項に分離して書けます。で、「カイラル対称性の破れ」で触れたように、カイラル対称性の自発的破れによってパイオン等が生成されるという立場を取ることにすれば $\mathcal{L}_{chiral}$ だけを見ればいいです。つまり、QCD はカイラル対称性を持っているという立場を取ります。特に u, d クォークは質量が小さいので近似的にカイラル対称性を持たせるには都合がいいです。

次に考えることは、QCD なんていう扱いづらいものを直に考えるより、扱いやすい似たモデルを作ってみようということです。ここで言う似たモデルというのは QCD と同じ対称性を持ったモデルという意味です。というわけで、対称性についてもう少しみておきます。

まず、今は u, d クォークだけを扱っているので ψ は、それぞれのクォークに対するスピノール u, d を使って

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

と書け、これは $SU(2)$ のアイソスピンの対称性が関係してくることが予想できると思います。より単純には $U(1)$ の対称性も持ちます。ちゃんと変換を示せば、右手系、左手系を使った $U(1)$ では

$$\psi_R \Rightarrow \exp[i\theta_R]\psi_R, \quad \psi_L \Rightarrow \exp[i\theta_L]\psi_L$$

$SU(2)$ では

$$\psi_R \Rightarrow \exp[i\frac{\varphi_R^a \tau^a}{2}] \psi_R, \psi_L \Rightarrow \exp[i\frac{\varphi_L^a \tau^a}{2}] \psi_L$$

$U(1)$ の方は「カイラル対称性の破れ」で出てきたもので、 $SU(2)$ はそれにアイソスピンによるパウリ行列 τ^a をくっつけたものです。なので、2 フレーバ QCD の全体の対称性は $SU_R(2), SU_L(2), U_R(1), U_L(1)$ の対称性を持ちます。これは右手系、左手系による表現ですけど、別の表現の方が見やすいのでそっちを使います。これも「カイラル対称性の破れ」で出てきたやつで、 $U(1)$ が

$$\psi \Rightarrow \exp[i\gamma^5 \alpha] \psi$$

このようになっているものです。単純に $U(1)$ と言っていますが、他にも $U(1)$ 変換として

$$\psi \Rightarrow \exp[i\beta] \psi$$

というのもあります。で、今使っているラグランジアン $\mathcal{L}_{chiral}$ はどちらでも不変になっていることはすぐに分かると思います。なので、この二つは区別して

$$U_A(1) : \psi \Rightarrow \exp[i\gamma^5 \alpha] \psi$$

$$U_V(1) : \psi \Rightarrow \exp[i\beta] \psi$$

と書かれます。 A は axial、 V は vector を表しています。vector はベクトル変換に対応し、axial は軸性変換に対応していることを表しています。で、この軸性変換がカイラル変換のことです。同じことを $SU(2)$ でも考えれば

$$SU_A(2) : \psi \Rightarrow \exp[i\frac{\gamma^5 \theta^a \tau^a}{2}] \psi \quad \quad \quad SU_V(2) : \psi \Rightarrow \exp[i\frac{\varphi^a \tau^a}{2}] \psi$$

となっています。 $SU_V(2)$ は「ヤン・ミルズ理論」での 2 成分スピノールの変換 (アイソスピンの変換) そのものです。これらが実際に右手系、左手系の表現に対応することを示しておきます。

$$\psi = \psi_L + \psi_R$$

に対して (ψ_L, ψ_R はそれぞれ左手系、右手系の u, d によって作られる)、 $SU(2)$ 変換をかければ

$$\psi \Rightarrow e^{i\varphi_L^a \tau^a / 2} \psi_L + e^{i\varphi_R^a \tau^a / 2} \psi_R$$

となって、この時に、 $\varphi_L^a = \varphi_R^a = \theta^a$ みたいになっているとすれば

$$e^{i\theta^a \tau^a / 2} \psi_L + e^{i\theta^a \tau^a / 2} \psi_R = e^{i\theta^a \tau^a / 2} (\psi_L + \psi_R) = e^{i\theta^a \tau^a / 2} \psi$$

となって、 $SU_V(2)$ に対応します。今度は $\varphi_L^a = -\varphi_R^a = -\theta^a$ ととれば

$$e^{-i\theta^a\tau^a/2}\psi_L + e^{i\theta^a\tau^a/2}\psi_R = e^{-i\theta^a\tau^a/2}\frac{1-\gamma_5}{2}\psi + e^{i\theta^a\tau^a/2}\frac{1+\gamma_5}{2}\psi$$

このときに単位ベクトルとして

$$\hat{\theta}^a = \frac{\theta^a}{|\theta|}$$

このようなものを作れば ($|\theta|$ は θ^a の絶対値)、

$$\theta^a\tau^a = \hat{\theta}^a\tau^a|\theta|$$

であることから $\exp$ を展開すると

$$\begin{aligned} e^{-i\theta^a\tau^a/2} &= 1 - i\hat{\theta}^a\tau^a\frac{|\theta|}{2} + (\hat{\theta}^a\tau^a)^2\frac{|\theta|^2}{8} \dots \\ &= 1 - i\hat{\theta}^a\tau^a\frac{|\theta|}{2} + \frac{|\theta|^2}{8} \dots \quad ((\hat{\theta}^a\tau^a)(\hat{\theta}^b\tau^b) = 1) \\ &= \cos\frac{|\theta|}{2} - i\hat{\theta}^a\tau^a\sin\frac{|\theta|}{2} \end{aligned}$$

τ^a はパウリ行列が使えるので、パウリ行列の性質から $(\hat{\theta}^a\tau^a)(\hat{\theta}^b\tau^b) = 1$ となります。これによって

$$\begin{aligned} e^{-i\theta^a\tau^a/2}\frac{1-\gamma_5}{2}\psi + e^{i\theta^a\tau^a/2}\frac{1+\gamma_5}{2}\psi &= (\cos\frac{|\theta|}{2} - i\hat{\theta}^a\tau^a\sin\frac{|\theta|}{2})\frac{1-\gamma_5}{2}\psi + (\cos\frac{|\theta|}{2} + i\hat{\theta}^a\tau^a\sin\frac{|\theta|}{2})\frac{1+\gamma_5}{2}\psi \\ &= (\cos\frac{|\theta|}{2} - i\gamma_5\hat{\theta}^a\tau^a\sin\frac{|\theta|}{2})\psi \\ &= e^{-i\gamma^5\theta^a\tau^a/2}\psi \end{aligned}$$

となって、 $SU_A(2)$ に一致します ($U(1)$ も同様)。

これで $\mathcal{L}_{chiral}$ を不変にする変換として

$$SU_A(2) : \psi \Rightarrow \exp[i\frac{\gamma^5\theta^a\tau^a}{2}]\psi$$

$$SU_V(2) : \psi \Rightarrow \exp[i\frac{\varphi^a\tau^a}{2}]\psi$$

$$U_A(1) : \psi \Rightarrow \exp[i\gamma^5\alpha]\psi$$

$$U_V(1) : \psi \Rightarrow \exp[i\beta]\psi$$

という4つがあることになりました。これらに対する保存カレント (ネーターカレント) は、いちいち計算するのが面倒ですし、変換の形からなんとなく予想できると思うので、結果だけを書けば

$$SU_A(2) : j_{5\mu}^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^a\psi$$

$$SU_V(2) : j_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau^a\psi$$

$$U_A(1) : j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$$

$$U_V(1) : j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

この中で $U_A(1)$ のカレントだけがかなり特殊な扱いを受けます。この事は、 $U_A(1)$ のカレントを計算してみると、量子的な効果による変な項が現れてしまいカレントが保存しなくなることから来ています。この変な項は異常項と呼ばれ、このように量子効果で対称性がなくなること、量子異常とかアノマリー (anomaly) と呼んでいます。今の状況に合わせて軸性ベクトルの異常項なんて言われたりもします。この問題はインスタントンと関係していてとんでもなくグチャグチャした領域の話なので飛ばします (大雑把に言ってしまうと、インスタントンによって $U_A(1)$ は破られており、ゴールド・ストーンボソンを作るが、そのゴールド・ストーンボソンは物理的な粒子としては存在しないということになっています)。

変換の話は終わりにして、本題のカイラル対称性を持つモデルを作っていきます。 $SU_A(2)$ でも同じように計算されるので簡単のために $U_A(1)$ を使って変換をみておきます。まずは、 $U_A(1)$ 変換に対して不変になるような項を作ります。 $\bar{\psi}\psi$ (スカラー) は変換に対して

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &\Rightarrow \psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta}\gamma_0 e^{i\gamma^5\theta}\psi = \psi^\dagger(1 - i\gamma^5\theta - \frac{1}{2}\theta^2\cdots)\gamma_0(1 + i\gamma^5\theta - \frac{1}{2}\theta^2\cdots)\psi \\ &= \psi^\dagger(\cos\theta - i\gamma^5\sin\theta)\gamma_0(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\psi \\ &= \bar{\psi}(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\psi \\ &= \bar{\psi}(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\gamma^5\cos\theta\sin\theta)\psi \quad (\gamma^5\gamma^5 = 1) \\ &= \bar{\psi}(\cos 2\theta + i\gamma^5\sin 2\theta)\psi \quad (\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta, \quad 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta) \\ &= \bar{\psi}\psi\cos 2\theta + \bar{\psi}i\gamma^5\psi\sin 2\theta\end{aligned}$$

これは質量項を作るものなので、不変になっていないのは当たり前です。次に $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ (擬スカラー) に対して変換を行ってみます

$$\begin{aligned}\bar{\psi}i\gamma^5\psi &\Rightarrow \psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta}\gamma_0 i\gamma^5 e^{i\gamma^5\theta}\psi \\ &= \psi^\dagger(\cos\theta - i\gamma^5\sin\theta)\gamma_0 i\gamma^5(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\psi \\ &= \bar{\psi}i\gamma^5(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\psi \\ &= \bar{\psi}i\gamma^5(\cos 2\theta + i\gamma^5\sin 2\theta)\psi \\ &= \bar{\psi}i\gamma^5\psi\cos 2\theta - \bar{\psi}\psi\sin 2\theta\end{aligned}$$

これも不変にはなっていません。しかし、 $\bar{\psi}\psi$ と $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ の変換後の形が三角関数の性質から上手いこと消えてくれそうな雰囲気を出しています。というわけで、二乗して足してみると

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 &\Rightarrow (\bar{\psi}\psi \cos 2\theta + \bar{\psi}i\gamma^5\psi \sin 2\theta)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi \cos 2\theta - \bar{\psi}\psi \sin 2\theta)^2 \\
&= (\bar{\psi}\psi)^2 \cos^2 2\theta + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 \sin^2 2\theta + 2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}i\gamma^5\psi) \cos 2\theta \sin 2\theta \\
&\quad + (\bar{\psi}\psi)^2 \sin^2 2\theta + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 \cos^2 2\theta - 2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}i\gamma^5\psi) \cos 2\theta \sin 2\theta \\
&= (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2
\end{aligned}$$

となります。つまり、

$$(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2$$

は $U_A(1)$ 変換のもとで不変になっています。この項を使うことによってカイラル不変なラグランジアンとして

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2$$

というのが作れます。ここからさらに一步踏み込んで、第二項と第三項が相互作用項になっているとして

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2] \quad (1)$$

このように結合定数 G を加えます。これが最も簡単な南部-Jona-Lasinio モデルのラグランジアンです。このモデルでの相互作用がどうなっているのかは、相互作用項を見れば明らかなようにフェルミオンによる 4 点相互作用です (ϕ^4 理論のように、4 つのフェルミオンによって頂点が作られている)。つまり、QCD と違いグルーオン (ゲージ場) の交換による相互作用という形でなく、直接フェルミオン、反フェルミオンによる相互作用をします。

ここで次元解析をしてみると、ラグランジアン次元は質量次元で 4 なので、第一項から ψ の次元は $3/2$ となることが分かります。そうすると相互作用項には ψ が 4 ついることから 6 の次元をもつことになります。つまり、結合定数 G は無次元にはなってなく -2 の次元を持ちます。これは「くり込み理論」で出てきた話から、南部-Jona-Lasinio モデルはくり込み不可能な理論であることを示しています。

また、 $SU(2)$ まで拡張してやっても同じように計算されるので

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\tau^a\psi)^2]$$

となるだけです (2 フレーバでの南部-Jona-Lasinio モデル)。一応この場合でも $SU_A(2)$ の変換でどうなるのか示しておきます。 $SU_A(2)$ は

$$\psi \Rightarrow \exp[i\frac{\gamma^5\tau^a\theta^a}{2}]\psi = \exp[i\frac{\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\theta}{2}]\psi \quad (\hat{\theta}^a = \frac{\theta^a}{\theta}, \theta = |\theta^a|)$$

なので、 $\bar{\psi}\psi$ は

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi &\Rightarrow \psi^\dagger e^{-i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\theta/2}\gamma_0 e^{i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\theta/2}\psi \\
&= \psi^\dagger(1 - i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2})^2\cdots)\gamma_0(1 + \frac{1}{2}i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\theta - \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2})^2\cdots)\psi \quad ((\tau^a\hat{\theta}^a)^2 = 1) \\
&= \psi^\dagger(\cos\frac{\theta}{2} - i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2})\gamma_0(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= \bar{\psi}(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= \bar{\psi}(\cos^2\frac{\theta}{2} - (\tau^a\hat{\theta}^a)^2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})\psi \\
&= \bar{\psi}(\cos\theta + i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\theta)\psi \\
&= \bar{\psi}\psi\cos\theta + i\bar{\psi}\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\psi\sin\theta
\end{aligned}$$

$\bar{\psi}i\gamma^5\tau^a\psi$ では

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}i\gamma^5\tau^k\psi &\Rightarrow \psi^\dagger e^{-i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\theta/2}\gamma_0 i\gamma^5\tau^k e^{i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\theta/2}\psi \\
&= \psi^\dagger(\cos\frac{\theta}{2} - i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2})\gamma_0 i\gamma^5\tau^k(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= \bar{\psi}i\gamma^5(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2})\tau^k(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= \bar{\psi}i\gamma^5(\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} - \tau^a\hat{\theta}^a\tau^k\tau^b\hat{\theta}^b\sin^2\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^k\tau^b\hat{\theta}^b\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^a\tau^k\hat{\theta}^a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= \bar{\psi}i\gamma^5[\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} - (2\delta^{ak} - \tau^k\tau^a)\hat{\theta}^a\tau^b\hat{\theta}^b\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&\quad + i\gamma^5\tau^k\tau^b\hat{\theta}^b\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + i\gamma^5(2\delta^{ak} - \tau^k\tau^a)\hat{\theta}^a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}]\psi \\
&= \bar{\psi}i\gamma^5[\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} - (2\hat{\theta}^k\tau^b\hat{\theta}^b - \tau^k)\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\gamma^5\hat{\theta}^k\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}]\psi \\
&= \bar{\psi}i\gamma^5[\tau^k - \hat{\theta}^k\tau^b\hat{\theta}^b(1 - \cos\theta) + i\gamma^5\hat{\theta}^k\sin\theta]\psi \quad (\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)) \\
&= \bar{\psi}i\gamma^5\tau^k\psi - (\bar{\psi}i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\psi)\hat{\theta}^k(1 - \cos\theta) - \bar{\psi}\psi\hat{\theta}^k\sin\theta
\end{aligned}$$

後は二乗して足せば上手いこと打ち消しあって、変換に対して不変になっていることが分かります。さらに $SU(3)$ でも作ることができるんですが飛ばします。

上での事情があるので $U_A(1)$ が特殊なんですけど、これからやっていく計算は $SU_A(2)$ でも同じなので、簡単のために $U(1)$ の場合を使います (次に出てくる π が 3 成分を持つように変更すればいい)。

南部-Jona-Lasinio モデルにおいても、質量項は存在していないのでフェルミオンは質量がないままのように見えます。しかし、カイラル対称性が自発的に破れているような真空が南部-Jona-Lasinio モデルで実現していれば、質量を得ることになります。というわけで、ここから南部-Jona-Lasinio モデルの真空がどうなっているのか見ます (カラーとフレーバは無視しますが、それらがあっても大抵トレースをとる時にカラーとフレーバの数をかける

だけですみます)。そのためには、有効ポテンシャルが必要なのでそれを求めます。まず経路積分上に (1) のラグランジアンを乗せます

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2]] \right]$$

これを、直接計算せずに小細工します。まず

$$\int \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{g^2}{G}\sigma^2 + \frac{g^2}{G}\pi^2 \right) \right] \quad (2)$$

という積分を作ります。 g は無次元のパラメータです。で、これはガウス積分なので定数になるんですが、経路積分の規格化定数によって 1 になっているのだとします (「経路積分～電磁場～」で出てきた方法と同じ)。そうすると、1 なので Z にこの積分を差し込んででも何の影響もないことから

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2] - \frac{g^2}{G}(\sigma^2 + \pi^2)] \right]$$

変数変換として

$$\sigma \Rightarrow \sigma + \frac{G}{g}\bar{\psi}\psi$$

$$\pi \Rightarrow \pi + \frac{G}{g}\bar{\psi}i\gamma^5\psi$$

このように行えば (積分測度は変わらない)

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{G}(\sigma^2 + \frac{G^2}{g^2}(\bar{\psi}\psi)^2 + 2\frac{G}{g}\sigma\bar{\psi}\psi + \pi^2 + \frac{G^2}{g^2}(\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 + 2\frac{G}{g}\pi\bar{\psi}i\gamma^5\psi)] \right] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 - (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{g^2}{G}(\sigma^2 + 2\frac{G}{g}\sigma\bar{\psi}\psi + \pi^2 + 2\frac{G}{g}\pi\bar{\psi}i\gamma^5\psi)] \right] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi - 2g(\sigma\bar{\psi}\psi + \pi\bar{\psi}i\gamma^5\psi) - \frac{g^2}{G}(\sigma^2 + \pi^2)] \right] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\pi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - 2g(\sigma + i\gamma^5\pi))\psi - \frac{g^2}{G}(\sigma^2 + \pi^2)] \right] \end{aligned}$$

このように変形させられます。この手続きをボソン化と言ったりもします。

この形よりは、(1) で

$$\frac{G}{2}[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2]$$

とし、これに合わせて (2) を

$$\int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp[-i \int d^4x (\frac{g^2}{2G} \sigma^2 + \frac{g^2}{2G} \pi^2)]$$

とした方が $\bar{\psi}, \psi$ に挟まれた部分に余計な係数 2 が出てこないなので、こっちの形を使います。その場合は

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - g(\sigma + i\gamma^5 \pi))\psi - \frac{g^2}{2G}(\sigma^2 + \pi^2)] \right] \quad (3)$$

となります。というわけで、南部-Jona-Lasinio モデルのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - g(\sigma + i\gamma^5 \pi))\psi - \frac{g^2}{2G}(\sigma^2 + \pi^2)$$

と等価となっています (質量次元で g は無次元、 σ と π は 1)。見て分かるように、相互作用の形がフェルミオンによる 4 点相互作用から、フェルミオン-フェルミオン-ボソンによる相互作用に変わっています。で、この形の方がこれからの話には便利です。新しく導入された σ と π の運動方程式をオイラー・ラグランジュ方程式から作ってみると

$$\begin{aligned} -g\bar{\psi}\psi - \frac{g^2}{G}\sigma &= 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{G}{g}\bar{\psi}\psi \\ -g\bar{\psi}i\gamma^5\psi - \frac{g^2}{G}\pi &= 0 \quad \Rightarrow \quad \pi = -\frac{G}{g}\bar{\psi}i\gamma^5\psi \end{aligned}$$

このようになっています。

次に、 ψ と $\bar{\psi}$ の積分を実行します。(3) の $\exp$ 内での ψ と $\bar{\psi}$ が絡んでいる部分は

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp[-\bar{\psi} A \psi] = \det A$$

で全て計算できる形になっているのですぐに実行できて (数学的な安全性からは一旦ユークリッド空間に持って行ってから使う)

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - g(\sigma + i\gamma^5 \pi))\psi] \right] \\ = \det[-i\gamma_\mu \partial^\mu + g(\sigma + i\gamma^5 \pi)] \quad (id^4x \Rightarrow d^4x_E) \end{aligned}$$

これを $\exp$ の中に戻したければ、 $\log$ をつけて

$$\log \det[-i\gamma_\mu \partial^\mu + g(\sigma + i\gamma^5 \pi)]$$

とすれば

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp \left[\log \det [-i\gamma_\mu \partial^\mu + g(\sigma + i\gamma^5 \pi)] - i \frac{g^2}{2G} \int d^4x (\sigma^2 + \pi^2) \right]$$

さらに $\log \det A = \text{tr} \log A$ を使って

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp \left[\text{tr} \log [-i\gamma_\mu \partial^\mu + g(\sigma + i\gamma^5 \pi)] - i \frac{g^2}{2G} \int d^4x (\sigma^2 + \pi^2) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp [i S_{eff}] \end{aligned}$$

ここでのトレースはスピノール成分に対して行い、4次元空間積分を持っているとします

$$\text{tr} A = \int d^4x \bar{\text{tr}} \langle x | A | x \rangle$$

$\bar{\text{tr}}$ は行列に対するトレースだとします (今の場合はスピノール)。

今知りたいことは真空構造なので、真空期待値を使った有効作用を作ります。この時、 σ は 0 でない真空期待値を持ち、 π の真空期待値は 0 になるのだと予想します。なので

$$\sigma(x) \Rightarrow \sigma_c + \sigma(x)$$

と置き換えます (ここからは、 σ_c が定数の古典場、 σ がそこからのズレを表わす場になります)。ここでの $\sigma(x)$ には

$$\int d^4x \sigma(x) = 0$$

という制限を与えます。そうすると、作用は

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \frac{1}{i} \text{tr} \log [-i\gamma_\mu \partial^\mu + g(\sigma + i\gamma^5 \pi)] - \frac{g^2}{2G} \int d^4x (\sigma^2 + \pi^2) \\ &\Rightarrow \frac{1}{i} \text{tr} \log [-i\gamma_\mu \partial^\mu + g(\sigma_c + \sigma + i\gamma^5 \pi)] - \frac{g^2}{2G} \int d^4x ((\sigma_c + \sigma)^2 + \pi^2) \end{aligned}$$

$\log$ を展開し

$$\begin{aligned} \log [-i\gamma_\mu \partial^\mu + g(\sigma_c + \sigma + i\gamma^5 \pi)] &= \log [-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c] + \log \left[1 + \frac{g(\sigma + i\gamma^5 \pi)}{-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c} \right] \\ &= \log [-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c] + \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{g(\sigma + i\gamma^5 \pi)}{-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c} \right)^n \end{aligned}$$

これの第二項は無視すれば

$$S_{eff} = \frac{1}{i} \text{tr} \log [-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c] - \frac{g^2}{2G} \int d^4x (\sigma_c^2 + \sigma^2 + 2\sigma\sigma_c + \pi^2)$$

となり、上手いこと σ, π を分離できます。本当は無視した項も重要な寄与を与えるので無視すべきではないんですが、ここで見たいことには無関係なので無視します。

π と σ の積分はガウス積分なので、結局

$$S_{eff} = \frac{1}{i} \text{tr} \log[-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c] - \frac{g^2}{2G} \int d^4x \sigma_c^2$$

ということになります。本当は経路積分にはフェルミオンの源 $\eta, \bar{\eta}$ による項がのっかっているのですが、その項も出てくるんですが関係ないので無視しています。

Z が求まったので $W = -i \log Z$ によって

$$W = -i \log Z = -i \text{tr} \log[-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c] - \frac{g^2}{2G} \int d^4x \sigma_c^2$$

そして有効作用は

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x)$$

今の場合、源はフェルミオンのものしかないので、結局

$$\Gamma[\sigma_c] = -i \text{tr} \log[-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c] - \frac{g^2}{2G} \int d^4x \sigma_c^2$$

第一項を運動量空間に変換します。そのために対数を展開して

$$\begin{aligned} \text{tr} \log[-i\gamma_\mu \partial^\mu + g\sigma_c] &= \text{tr} \left(\log[-i\gamma_\mu \partial^\mu] + \log \left[1 + \frac{ig\sigma_c}{\gamma_\mu \partial^\mu} \right] \right) \\ &= \text{tr} \left(\log[-i\gamma_\mu \partial^\mu] + \frac{ig\sigma_c}{\gamma_\mu \partial^\mu} - \frac{1}{2} \left(\frac{ig\sigma_c}{\gamma_\mu \partial^\mu} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{ig\sigma_c}{\gamma_\mu \partial^\mu} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{ig\sigma_c}{\gamma_\mu \partial^\mu} \right)^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (4)$$

第一項には有効ポテンシャルへ寄与を与える σ_c がいないので無視します。第二項以降では

$$\begin{aligned} \text{tr} \frac{\gamma_\mu \partial^\mu}{(\gamma_\mu \partial^\mu)^2} &= \overline{\text{tr}} \int d^4x \langle x | \frac{1}{\gamma_\mu \partial^\mu} | x \rangle \\ &= \overline{\text{tr}} \int d^4p \int d^4k \int d^4x \langle x | p \rangle \langle p | k \rangle \frac{1}{\gamma_\mu \partial^\mu} \langle k | x \rangle \\ &= \overline{\text{tr}} \int d^4p \int d^4k \int d^4x \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{1}{i\gamma_\mu k^\mu} e^{ikx} (2\pi)^4 \delta^4(p - k) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \overline{\text{tr}} \int d^4p \int d^4k \int d^4x \frac{i\gamma_\mu k^\mu}{(i\gamma_\mu k^\mu)^2} e^{i(k-p)x} \delta^4(p - k) \\ &= \overline{\text{tr}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int d^4x \frac{i\gamma_\mu k^\mu}{-k^2} \end{aligned}$$

このようにして運動量空間に移します。微分演算子の逆は、形式的に $\partial_\mu (\partial^\mu)^{-1} = 1$ と $ik_\mu / (ik^\mu)^{-1} = 1$ の対応から分かりますが、微分演算子の逆はフーリエ変換によって

$$\frac{1}{-\partial_\mu \partial^\mu} f(x) = \int d^4 y e^{ik(x-y)} \frac{1}{k^2} f(y)$$

と定義されています。

ガンマ行列が奇数個ある項はトレースで落ちるので

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{ig\sigma_c \gamma_\mu \partial^\mu}{(\gamma_\mu \partial^\mu)^2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{ig\sigma_c \gamma_\mu \partial^\mu}{(\gamma_\mu \partial^\mu)^2} \right)^4 + \dots \right] \\ &= \overline{\text{tr}} \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{(ig\sigma_c)^2}{2} \frac{-k^2}{(-k^2)^2} - \frac{(ig\sigma_c)^4}{4} \frac{(-k^2)^2}{(-k^2)^4} + \dots \right] \\ &= \overline{\text{tr}} \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{(ig\sigma_c)^2}{2} \frac{1}{-k^2} - \frac{(ig\sigma_c)^4}{4} \frac{1}{(-k^2)^2} + \dots \right] \\ &= \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[-2 \frac{-(g\sigma_c)^2}{-k^2} - \frac{(g\sigma_c)^4}{(-k^2)^2} + \dots \right] \\ &= 2 \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{(g\sigma_c)^2}{-k^2} - \frac{1}{2} \frac{(g\sigma_c)^4}{(-k^2)^2} + \dots \right] \\ &= 2 \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \log \left[1 + \frac{(g\sigma_c)^2}{-k^2} \right] \\ &= 2 \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \log[-k^2 + (g\sigma_c)^2] \end{aligned}$$

最後に行く時に、(4) と同じように座標空間で $\log \partial^2$ となる項を無視しています (別のやり方を下の補足に載せています)。これによって有効作用は

$$\Gamma[\sigma_c] = -i2 \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \log[-k^2 + (g\sigma_c)^2] - \frac{g^2}{2G} \int d^4 x \sigma_c^2 \quad (5)$$

よって有効ポテンシャル V_{eff} は $\Gamma = -V_{eff} \int d^4 x$ なので

$$V_{eff} = i2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \log[-k^2 + (g\sigma_c)^2] + \frac{g^2}{2G} \sigma_c^2$$

真空において、 $\sigma_c \neq 0$ とするような構造を持っているのか知るためには、有効ポテンシャルの極値を計算する必要があります

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \sigma_c} = 0$$

これを計算すると

$$i4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g^2 \sigma_c}{-k^2 + (g\sigma_c)^2} + \frac{g^2}{G} \sigma_c = 0 \quad (6)$$

という方程式が出てきます。

(5) から気づくことは $\log$ の中身の形から $g\sigma_c$ が質量を表わしているだろうということです。つまり、もともとの南部-Jona-Lasinio モデル (1) にはフェルミオンの質量項はなかったのに、 $\sigma_c \neq 0$ ならフェルミオンの質量が現われることになります。これが特徴で、 σ が 0 でない真空期待値を持つとき、フェルミオンには質量が与えられ、カイラル対称性が自発的に破られます。この時に、対称性を破るパラメータ (オーダパラメータ) となるのは σ ですが、これは運動方程式から

$$\sigma = -\frac{G}{g}\bar{\psi}\psi$$

であるために、実際にはフェルミオン場と反フェルミオン場によってオーダパラメータが与えられています。このことを、真空でのフェルミオン凝縮 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ と呼んでいます。

(6) は質量を決める方程式であるので、ギャップ方程式と呼ばれる種類の方程式です。(6) から σ_c が 0 でない解を持つのはどんな時なのか知るために、積分を実行します。そのために、まずユークリッド空間に移します

$$i4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g^2 \sigma_c}{-k^2 + (g\sigma_c)^2} \Rightarrow -4 \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{g^2 \sigma_c}{k_E^2 + (g\sigma_c)^2}$$

この積分は明らかに発散する形なのでどうにかしないとイケないんですが、単に運動量に切断 Λ を入れるだけで済ませます。これによって

$$\begin{aligned} -4 \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{g^2 \sigma_c}{k_E^2 + (g\sigma_c)^2} &= -4 \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} \int_0^\Lambda \frac{d|k_E|}{(2\pi)^4} \frac{g^2 \sigma_c k_E^3}{k_E^2 + (g\sigma_c)^2} \\ &= \frac{-8\pi^2 g^2 \sigma_c}{2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{d|k_E|^2}{(2\pi)^4} \frac{k_E^2}{k_E^2 + (g\sigma_c)^2} \\ &= \frac{-8\pi^2 g^2 \sigma_c}{2} \int_{(g\sigma_c)^2}^{\Lambda^2 + (g\sigma_c)^2} \frac{dA}{(2\pi)^4} \frac{A - (g\sigma_c)^2}{A} \quad (A = k_E^2 + (g\sigma_c)^2) \\ &= \frac{-8\pi^2 g^2 \sigma_c}{2(2\pi)^4} \left[\Lambda^2 - (g\sigma_c)^2 \log \frac{\Lambda^2 + (g\sigma_c)^2}{(g\sigma_c)^2} \right] \\ &= -\frac{g^2 \sigma_c}{4\pi^2} \left[\Lambda^2 - (g\sigma_c)^2 \log \left[1 + \frac{\Lambda^2}{(g\sigma_c)^2} \right] \right] \end{aligned}$$

これを (6) にいれて

$$\begin{aligned} -\frac{g^2 \sigma_c}{4\pi^2} \left[\Lambda^2 - (g\sigma_c)^2 \log \left[1 + \frac{\Lambda^2}{(g\sigma_c)^2} \right] \right] + \frac{g^2}{G} \sigma_c &= 0 \\ \frac{g^2 \sigma_c}{4\pi^2} (g\sigma_c)^2 \log \left[1 + \frac{\Lambda^2}{(g\sigma_c)^2} \right] &= -\frac{g^2}{G} \sigma_c + \frac{g^2 \sigma_c}{4\pi^2} \Lambda^2 \\ \frac{g^2}{4\pi^2} (g\sigma_c)^2 \log \left[1 + \frac{\Lambda^2}{(g\sigma_c)^2} \right] &= -\frac{g^2}{G} + \frac{g^2}{4\pi^2} \Lambda^2 \end{aligned} \tag{7}$$

結合定数 G が $\frac{g^2}{G} = \Lambda^2$ となっているように設定したとすれば右辺は

$$-\Lambda^2 + \frac{g^2}{4\pi^2} \Lambda^2 = -\Lambda^2 \left(1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \right)$$

(7) で $(g\sigma_c)^2 > 0$ 、 $\log$ は正の値を取るような構造をしているので、右辺に対して

$$-\Lambda^2(1 - \frac{g^2}{4\pi^2}) > 0$$

という条件を与え、これは g に対して

$$g^2 > 4\pi^2$$

という制限を与えることになり、(6) はこの領域で σ_c が意味のある解 ($\sigma_c \neq 0$) を持ちます。つまり、この制限を満たしていない時には $\sigma_c = 0$ になるだろうと考えられるので、その時は質量が作られません。そして、 g は (3) から分かるように相互作用項に対する結合定数であることを踏まえると、相互作用が強くなった時に σ_c が 0 でない解を持つと言うことが出来ます。なので、相互作用が強くなるとフェルミオン凝縮が起こり、質量が生成されることとなります。この状況は「カイラル対称性の破れ」で触れた、結合定数が大きなところで質量が生成されカイラル対称性が破られているというのと同じです。

南部-Jona-Lasinio モデルでの、真空においてフェルミオン凝縮を起こしカイラル対称性を破っているということを QCD の立場から見れば、QCD では低エネルギーで強くなる相互作用によってクォークと反クォークのペアが凝縮してカイラル対称性を破るのだと言うことができます。この考えはかなり信用されていて、QCD の低エネルギーでの振舞いに対する考えはこれを元に発展しています。

また、フェルミオン凝縮によって真空でのカイラル対称性が破られるという特徴から、質量 0 のゴールドストーンボソンが出てくるはずで、実際にそれを確かめることは出来ませんがここでは触れません。

・補足

上とは別の tr log の計算の仕方を示します。まず、 tr log を行列式に直して

$$\text{tr log}[-i\gamma_\mu \partial^\mu + m] = \log \det[-i\gamma_\mu \partial^\mu + m]$$

行列式の性質

$$\det(BAB^{-1}) = \det A$$

と $\gamma_5 = \gamma_5^{-1}$, $\gamma_5^2 = 1$, $\gamma_5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_5$ の性質を使って

$$\begin{aligned} \log \det[-i\gamma_\mu \partial^\mu + m] &= \frac{1}{2} \log \det[-i\gamma_\mu \partial^\mu + m] + \log \det[-i\gamma_\mu \partial^\mu + m] \\ &= \frac{1}{2} \log \det[-i\gamma_\mu \partial^\mu + m] + \frac{1}{2} \log \det[\gamma_5(-i\gamma_\mu \partial^\mu + m)\gamma_5^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \log \det[(-i\gamma_\mu \partial^\mu + m)\gamma_5(-i\gamma_\mu \partial^\mu + m)\gamma_5^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \log \det[(-i\gamma_\mu \partial^\mu + m)(i\gamma_\mu \partial^\mu + m)\gamma_5\gamma_5^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \log \det[(\gamma_\mu \partial^\mu)^2 + m^2] \\ &= \frac{1}{2} \log \det[-(i\partial_0)^2 + (-i\nabla)^2 + m^2] \end{aligned}$$

これはスピノール成分があることに気をつければ、「1 ループでの有効ポテンシャル」と同じです。なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \log \det [-(i\partial_0)^2 + (-i\nabla)^2 + m^2] &= \frac{1}{2} 4 \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log [-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2] \\ &= 2 \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log [-p^2 + m^2]\end{aligned}$$

4 はスピノール成分です。

もう少し細かい話もしておきます。ディラック方程式のハミルトニアン

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m\beta = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m\gamma_0 \quad (\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla) \\ \hat{H}^2 &= (\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m\gamma_0)(\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m\gamma_0) = (\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 + m^2 + m\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \gamma_0 \\ &= \hat{\mathbf{p}}^2 + m^2\end{aligned}$$

を使うとすれば

$$\log \det [-(i\partial_0)^2 + (-i\nabla)^2 + m^2] = \log \det [-(i\partial_0)^2 + \hat{\mathbf{p}}^2 + m^2] = \log \det [-(i\partial_0)^2 + \hat{H}^2]$$

ディラック方程式のハミルトニアン演算子は正負のエネルギーに対応する固有値を持っているので

$$\hat{H}\Psi_s = \pm E\Psi_s$$

s はスピノール成分です。スピノール Ψ_s を正エネルギーの上 2 成分と、負エネルギーの下 2 成分に分けたとすれば、 $i\partial_0$ の固有値を p_0 として

$$\begin{aligned}\log \det [\square + m^2] &= 2 \sum_{\epsilon=\pm 1} \text{tr} \log [-p_0^2 + (\epsilon E)^2 + m^2] = 4 \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \log [-p_0^2 + E^2 + m^2] \\ &\quad (E = |\mathbf{p}|^2)\end{aligned}$$

真ん中の式での 2 は分けたスピノールの 2 成分のものです。

ついでに、 $\text{tr} \det [k_\mu \gamma^\mu + \sigma + i\gamma^5 \pi]$ の計算の仕方も載せておきます。 γ_5 で囲んでも第二項と第三項は何も変わらないので、ひねります。上で計算したように、 $U_A(1)$ 変換からは

$$\bar{\psi}\psi \Rightarrow \bar{\psi}\psi \cos 2\theta + \bar{\psi}i\gamma^5\psi \sin 2\theta$$

$$\bar{\psi}i\gamma^5\psi \Rightarrow \bar{\psi}i\gamma^5\psi \cos 2\theta - \bar{\psi}\psi \sin 2\theta$$

というように $\bar{\psi}\psi$ からは $i\gamma_5$ 項、 $\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ からは $\bar{\psi}\psi$ が出てきます。なので、上手いこと θ を選べば、 $\sigma + i\gamma^5\pi$ から $i\gamma_5$ を取り除けると予想できます。このために

$$\det e^{i\gamma_5\theta} = \exp[i\theta\text{tr}\gamma_5] = 1 \quad (\det e^A = \exp[\text{tr}A])$$

を使って

$$\det[k_\mu\gamma^\mu + \sigma + i\gamma^5\pi] = \det[e^{-i\gamma_5\theta}(k_\mu\gamma^\mu + \sigma + i\gamma^5\pi)e^{-i\gamma_5\theta}]$$

と変形します。 θ は任意です。 $k_\mu\gamma^\mu$ は γ_5 と γ^μ が反交換することから $k_\mu\gamma^\mu$ になるだけです。第二項と第三項は、上で計算したように

$$\begin{aligned} e^{-i\gamma_5\theta}(\sigma + i\gamma^5\pi)e^{-i\gamma_5\theta} &= (\cos 2\theta - i\gamma^5 \sin 2\theta)(\sigma + i\gamma^5\pi) \\ &= \sigma \cos 2\theta + \pi \sin 2\theta + i\gamma_5(\pi \cos 2\theta - \sigma \sin 2\theta) \end{aligned}$$

ここで、 $\tan 2\theta = \pi/\sigma$ となるように θ を選べば

$$\begin{aligned} \sigma \cos 2\theta + \pi \sin 2\theta + i\gamma_5 \cos 2\theta(\pi - \sigma \tan 2\theta) &= \sigma \cos 2\theta + \pi \sin 2\theta + i\gamma_5 \cos 2\theta(\pi - \pi) \\ &= \sigma \cos 2\theta + \pi \sin 2\theta \\ &= \sigma \cos 2\theta(1 + \frac{\pi}{\sigma} \tan 2\theta) \\ &= \sigma \cos 2\theta(1 + \tan^2 2\theta) \\ &= \sigma \frac{1}{\cos 2\theta} \\ &= \sigma \sqrt{\frac{1}{\cos^2 2\theta}} \\ &= \sigma \sqrt{\frac{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta}} \\ &= \sigma \sqrt{1 + \tan^2 2\theta} \\ &= \sqrt{\sigma^2 + \pi^2} \end{aligned}$$

よって

$$\det[k_\mu\gamma^\mu + \sigma + i\gamma^5\pi] = \det[k_\mu\gamma^\mu + \sqrt{\sigma^2 + \pi^2}]$$

となります。