ネーターの定理

解析力学で出てくるネーターの定理を場を使って表現します。ネーターの定理は保存量と関係する定理です。素粒子関連の話はネーターの定理が使われている部分が多々あります。
補足に解析力学での話を簡単にしています。

ネーター (Noether) の定理で重要なのは、ネーターカレントと呼ばれるもので、保存カレントとも呼ばれます。ネーターカレントは 4 元ベクトルとなっていて、その時間成分を空間積分したものが保存量となります。このことを示していきます。

場の理論の作用は場 $\phi(x)$ によって構成されています。なので、位置の変換だけでなく場の変換も考えます。位置に対する無限小変換は

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$$

と与え (座標は 4 次元で $\mu = 0, 1, 2, 3$)、同じ位置での場そのものの無限小変換を

$$\phi'_r(x) = \phi_r(x) + \bar{\delta}\phi_r(x)$$

と与えます。ϕ の添え字の r は、場の持っている何かしらの自由度を表します。例えば、フェルミオンだとすればスピノールによる成分になります。面倒なら、r のことは無視していいです。そして、位置の変換によって場の変換も起きている場合を

$$\delta\phi_r(x) = \phi'_r(x') - \phi_r(x)$$

と与え、そのときのラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)$$

$$(\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)/\partial x_\mu)\ ,\ \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial\phi'(x')/\partial x'_\mu))$$

と表記します。後で実際にみるように、$\delta\phi_r$ は位置も変化させているために微分と交換しません。

$\bar{\delta}\phi_r(x)$ は $\delta\phi$ を使って書くと

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}\phi_r(x) &= \phi'_r(x) - (\phi'_r(x') - \phi'_r(x')) - \phi_r(x) \\
&= \phi'_r(x) - \phi'_r(x') + \phi'_r(x') - \phi'_r(x') + \delta\phi_r(x) \\
&= \delta\phi_r(x) + \phi'_r(x) - \phi'_r(x') \\
&= \delta\phi_r(x) - (\phi'_r(x') - \phi'_r(x)) \\
&= \delta\phi_r(x) - (\phi'_r(x+\delta x) - \phi'_r(x)) \\
&= \delta\phi_r(x) - \big((\phi'_r(x) + \frac{\partial\phi'_r(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \cdots) - \phi'_r(x)\big) \\
&\simeq \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi'_r(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \\
&= \delta\phi_r(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\phi_r(x) + \bar{\delta}\phi_r(x))\delta x_\mu \\
&= \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu
\end{aligned}
\tag{1}
$$

微小量の 1 次までを拾っています ($\bar{\delta}\phi_r(x)\delta x_\mu$ は微小量の 2 次なので無視)。このように、$\bar{\delta}$ と δ は δx_μ の 1 次のオーダで異なっています。言い換えれば、座標変換がなければ 2 つの変分は一致します (オイラー・ラグランジュ方程式を出すときと同じ状況)。

$\bar{\delta}$ は微分に対して、$\bar{\delta}$ を関数 $F(x)$ を x を変えずに $F'(x) - F(x)$ にする演算記号と見たとき、位置 x_μ に関与しないことから、$\bar{\delta}$ は微分は交換できます。実際に

$$
\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\delta}F(x) = \frac{\partial F'(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial F(x)}{\partial x_\mu} = \bar{\delta}\big(\frac{\partial F(x)}{\partial x_\mu}\big)
$$

なので

$$
\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{\delta}\phi_r(x) = \bar{\delta}\big(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\big)
$$

となっています。一方で、$\delta\phi_r(x)$ の微分をとってみると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\phi_r(x) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\phi'_r(x')-\phi_r(x)) \\
&= \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu} + \Big(\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu}\Big) \\
&= \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} \\
&= \delta(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}) + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} \\
&= \delta(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}(x^\nu+\delta x^\nu)\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} \\
&= \delta(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}) + \big(g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta x^\nu)\big)\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} \\
&= \delta(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}) + \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} + \frac{\partial(\delta x^\nu)}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} \\
&= \delta(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}) + \frac{\partial(\delta x^\nu)}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'^\nu}
\end{aligned}
$$

このように δ と微分は交換せずに余計な項が現れます。

作用を

$$
S[\phi] = \int_\Omega d^4x\ \mathcal{L}(x)\ ,\ S[\phi'] = \int_{\Omega'} d^4x'\mathcal{L}'(x')
$$

とします。ここでの無限小変換のもとでの作用の変化 δS は、作用積分 (ラグランジアン密度の 4 次元積分) によって

$$
\delta S = S[\phi'] - S[\phi] = \int_{\Omega'} d^4x'\mathcal{L}'(x') - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x)
$$

Ω, Ω' は 4 次元時空の範囲です。これは $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)$ を使って書き換えれば

$$
\delta S = \int_\Omega d^4x'\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x'\delta\mathcal{L}(x) - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x)
$$

第一項と第二項の積分を d^4x にするために、d^4x' と d^4x のヤコビアンを求めると

$$
\begin{aligned}
d^4x' = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| d^4x &= \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\delta x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^0} & 1+\frac{\partial\delta x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1+\frac{\partial\delta x^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} d^4x \\
&= (1+\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu})d^4x
\end{aligned}
$$

δx_μ の 1 次のオーダーまでを残しています。これと (1) を使えば作用は

$$
\begin{aligned}
\delta S =& \int_\Omega d^4x(1+\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu})\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x(1+\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu})\delta\mathcal{L}(x) - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x) \\
=& \int_\Omega d^4x(1+\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu})\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x(1+\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu})\delta\mathcal{L}(x) - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x) \\
=& \int_\Omega d^4x\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x\delta\mathcal{L}(x) \\
=& \int_\Omega d^4x\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}\mathcal{L}(x) + \int_\Omega d^4x(\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu) \\
=& \int_\Omega d^4x\big(\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathcal{L}(x)\delta x^\mu)\big)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$\bar{\delta}\mathcal{L}(x)$ は $\mathcal{L}'(x)-\mathcal{L}(x)$ なので、2 変数のテーラー展開によって 1 次のオーダまでを拾うことで

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta}\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}(\phi'_r(x),\frac{\partial \phi'_r}{\partial x^\mu}) - \mathcal{L}(\phi_r(x),\frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu}) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r}\bar{\delta}\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}(\partial_\mu\phi_r) \quad (\partial_\mu\phi_r = \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu}) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r}\bar{\delta}\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\partial_\mu\phi_r + \big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\phi_r - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\phi_r\big) \\
&= \big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\big)\bar{\delta}\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\partial_\mu\phi_r \\
&= \big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\big)\bar{\delta}\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\phi_r\big)
\end{aligned}
$$

μ だけでなく、r についても同じ項に 2 つあるなら和を取るようにします $(r=1,\cdots,N)$。これを (2) に入れて

$$
\begin{aligned}
\delta S =& \int_\Omega d^4x\big(\bar{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\mathcal{L}(x)\delta x_\mu)\big) \\
=& \int_\Omega d^4x\Big(\big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\big)\bar{\delta}\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\phi_r\big) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathcal{L}(x)\delta x^\mu)\Big) \\
=& \int_\Omega d^4x\Big(\big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\big)\bar{\delta}\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\phi_r + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu\big)\Big)
\end{aligned}
$$

もし、作用が変換によって変化しないなら、右辺の括弧内は 0 になるので

$$
\Big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\Big)\bar{\delta}\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\bar{\delta}\phi_r(x) + \mathcal{L}(x)\delta x^\mu\Big) = 0
$$

第一項はオイラー・ラグランジュ方程式なので、成立しているとして 0 にします。このため、このときの ϕ_r は任意でなく、オイラー・ラグランジュ方程式に従うものです。これは on-shell 条件 (質量殻上条件) と呼ばれ、ϕ_r がオイラー・ラグランジュ方程式 (運動方程式) に従っていることを指します。

第二項が 0 になるとして

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi_r)}\bar{\delta}\phi_r(x)+\mathcal{L}(x)\delta x_\mu\Big)=0 \tag{3}$$

(1) を使って $\delta\phi_r(x)$ に変えれば

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi_r)}(\delta\phi_r(x)-\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu}\delta x_\nu)+\mathcal{L}(x)\delta x_\mu\Big)=0 \tag{4}$$

この括弧の部分を f_μ とすれば

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}f_\mu=0$$

この f_μ をネーターカレント (Noether current) と呼びます。連続の方程式の形になっていることからも分かるように、ネーターカレント f_μ が保存することを表します。そのため、多くの場合で保存カレントと呼ばれます。この導出において大事なのは途中で仮定した変換に対して作用の変化が 0 になるという制限です。作用の変化はラグランジアン密度の変化と言い換えることもできるので、ラグランジアン密度を変化させない変換を行ったときに、保存するネーターカレントが現れることになります。

　ネーターカレントを 3 次元積分すれば、ガウスの発散定理から

$$\begin{aligned}0=\int_V d^3x\frac{\partial}{\partial x_\mu}f_\mu &= \int_V d^3x\frac{\partial}{\partial x_0}f_0+\int_V d^3x\nabla\cdot\boldsymbol{f}(x)\\ &= \int_V d^3x\frac{\partial}{\partial x_0}f_0+\int_{\partial V} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{f}(x)\end{aligned}$$

∂V は 3 次元空間の領域 V の表面で、$d\boldsymbol{s}$ は表面の法線方向を向いています。第二項は、$\boldsymbol{f}(x)$ が x_μ の増加で十分早く 0 になるとして、消します。そして、第一項の時間成分は

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\int_V d^3x\ f_0=0\ \Rightarrow\ \int_V d^3x\ f_0=C$$

として、時間に依存しない定数 C となり、C は保存量と分かります。よって、ネーターカレントの時間成分 f_0 の三次元積分は保存量になっています。これがネーターの定理で、連続的な対称変換を行うと（系が連続的な対称性を持っている)、その変換に対応する何かしらかの保存則が導かれるというものです。

　対称変換は、ここで見てきたようなラグランジアン密度 (作用) がその変換によって形が変わらないものを指します。単語の使い方ですが、ラグランジアン密度が変化しないことを、使った変換に対してラグランジアン密度が不変とか、ラグランジアン密度は対称であると言ったりします。また、対称性に伴う保存量は群論で言うところの生成子に対応しています (「生成子・ポアンカレ群」参照)。

　もっとお手軽な導出も示しておきます。作用に対する最小作用の原理は汎関数微分を使うと、「古典場」でも触れたように

$$\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}=0$$

と書けます。計算してみれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} &= \int d^4y \frac{\delta\mathcal{L}(\phi(y),\partial_\mu\phi(y))}{\delta\phi(x)} \\
&= \int d^4y \Big(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi(y),\partial_\mu\phi(y))}{\partial\phi(y)} \frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} + \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(y),\partial_\mu\phi(y))}{\partial(\partial_\mu\phi(y))} \frac{\delta(\partial_\mu\phi(y))}{\delta\phi(x)} \Big) \\
&= \int d^4y \Big(\frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial\phi(y)} \delta^4(y-x) + \frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial(\partial_\mu\phi(y))} \partial_\mu\delta^4(y-x) \Big) \\
&= \int d^4y \Big(\frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial\phi(y)} \delta^4(y-x) + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial(\partial_\mu\phi(y))} \partial_\mu\delta^4(y-x) \Big) - \delta^4(y-x)\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}(y)}{\partial(\partial_\mu\phi(y))} \Big) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(y),\partial_\mu\phi(y))}{\partial\phi(y)} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(y),\partial_\mu\phi(y))}{\partial(\partial_\mu\phi(y))}
\end{aligned}
$$

となって、オイラー・ラグランジュ方程式になります (下から二行目の第二項は表面項なので落としています)。偏微分で書けるのは変数が完全に一致しているからです。この結果を利用します。この場合では、場だけを $\phi(x)\to\phi(x)+\bar{\delta}\phi(x)$ と変換して、座標は変換しないようにします。

$\bar{\delta}=\delta$ と表記します。ラグランジアン密度の変化 $\delta\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}'(x)-\mathcal{L}(x)$ は、微分と δ は入れ替え可能なので

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta(\partial_\mu\phi(x)) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\partial_\mu\delta\phi(x)
\end{aligned}
$$

と書けて、これに汎関数微分によるオイラー・ラグランジュ方程式

$$
\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}
$$

を入れれば

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(x) &= \Big(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} + \frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\Big)\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\partial_\mu\delta\phi(x) \\
&= \Big(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\Big)\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\partial_\mu\delta\phi(x) + \frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x) \\
&= \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta\phi(x)\Big) + \frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x)
\end{aligned}
$$

となります。第二項は ϕ はオイラー・ラグンランジュ方程式に従っているとして消して、ラグランジアン密度の変化が 0 とすれば

$$
\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta\phi(x)\Big) = \partial_\mu f^\mu = 0
$$

となって、ネーターカレント f^μ が

$$f^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))}\delta\phi(x)$$

として出てきます。今の場合では座標に対して変換していないので、(4) での δx_μ の項をなくしたものと一致します。このようにして出すと、ネーターカレントはラグランジアン密度が変換によって変化しないとしたときに現れるというのが見やすいです。そして、ラグランジアン密度の変化とネーターカレントの発散 $\partial_\mu f^\mu$ が等しいことが分かります。

場の量子論ではラグランジアン密度を不変にする変換が沢山出てきますが、基本的な内容で出てくる変換で座標と場を同時に変換するのは下で出てくるローレンツ変換ぐらいです。後はどちらか片方だけを変換するものばかりです。

具体的な例をみていきます。

- 4 次元時空の平行移動

単純に 4 次元座標を平行移動させる

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

という変換を使います。この変換に対して不変である場合を並進不変と言ったりします。平行移動を受けた場 $\phi(x)$ は移動後も同じ値を持つとして

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x) = 0)$$

と与えます (点 x から平行移動した点 x' で値 $\phi(x)$ になる関数 ϕ' になる)。これは 4 次元時空の平行移動でスカラーは変化しないことを要求するためです (特殊相対論の要求)。

そうすると、この場合のネーターカレント $\theta_{\mu\nu}$ は (4) から

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\epsilon_\nu - \epsilon_\mu\mathcal{L}(x)\Big) \\
&= \epsilon^\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)\Big) \\
&= \epsilon^\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\theta_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

と求まります。$\partial\epsilon_\mu/\partial x_\mu = \partial^\mu\epsilon_\mu = g_{\mu\boldsymbol{\nu}}\partial^\mu\epsilon^{\boldsymbol{\nu}} = \partial^\mu\epsilon_\mu$ を使って変形しています。

もしくは、(3) を使うなら、δx^μ の 1 次までで

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\phi_r(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x' - \delta x^\mu) - \phi(x) &\simeq \phi'(x') + \delta x^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\phi'(x') - \phi(x) \\
&= \delta x^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\phi(x) \\
&= \delta x^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi(x)
\end{aligned}$$

となることを使えばいいです。最後へは偏微分の連鎖測

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu}=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}=\delta^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

を使っています。δ^μ_ν はクロネッカーデルタです ($\partial x^\mu/\partial x^\nu=\delta^\mu_\nu$)。これから、ネーターカレントは

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\epsilon^\nu\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\nu}+\epsilon_\mu\mathcal{L}(x)\Big)=\epsilon^\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\theta_{\mu\nu}$$

となり、保存量は

$$P_\nu=\int d^3x\ \theta_{0\nu}$$

となります。

$\theta_{\mu\nu}$ をエネルギー・運動量テンソルと呼びます。これは、時間の平行移動からはエネルギー P_0、3 次元空間の平行移動からは 3 次元運動量 P_i が出てくることを意味し、場の量子論での 4 元運動量の定義として使われます。

実際に、エネルギーと運動量になることを実数スカラー場を使って簡単に見ておきます。実スカラー場はラグランジアン密度が (簡単のために自然単位系を使います)

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2$$

と書けるものです (「クライン・ゴルドン場〜実スカラー場〜」参照)。そして、ハミルトニアンは

$$H=\int d^3x(\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2)$$

となっています。これにより $\theta^{\mu\nu}$ は

$$\theta^{\mu\nu}=(\partial^\mu\phi)(\partial^\nu\phi)-g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

そして、$\theta^{\mu\nu}$ を時間成分に対して計算してみると

$$\pi(x)=\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}$$

から、保存量は

$$\int d^3x\ \theta^{00}=\int d^3x(\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2)=H$$

となります。ハミルトニアンはエネルギーなので、エネルギー保存として出てきています。また、空間成分も同様に

$$
P^i = \int d^3x \ \theta^{0i} = -\int d^3x \ \pi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (g_{0i} = 0)
$$

となり、これは「クライン・ゴルドン場〜実スカラー場〜」で示しているように運動量と解釈できます。

このように、時間を動かすことでエネルギー保存、空間座標を動かすことで運動量保存が出てくるのは、質点系の場合でも同様に出てくる結果なので、期待通りと言えば期待通りです。今のように実際に対称性から保存量が導かれるという結果が起きるために、場の理論関係は対称性をもとにした多様な理論があります。

実数スカラー場でのエネルギー・運動量テンソル $\theta_{\mu\nu}$ は明らかに対称テンソルになっていますが、一般的にはエネルギー・運動量テンソルは対称テンソルにならないので、対称テンソルになるように小細工をします。

ネーターの定理はネーターカレントが連続の方程式

$$
\frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\mu = 0
$$

を満たせばいいので、この式を満たしさえすれば f_μ をいじってもいいです。このことからエネルギー・運動量テンソル $\theta_{\mu\nu}$ に新しい項を付け加えて

$$
T_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \partial^\lambda \chi_{\lambda\mu\nu}
$$

このように新しいエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を定義します。これは付け加えた項の $\chi_{\lambda\mu\nu}$ が λ と μ の交換に対して反対称テンソルになっていることを要求します ($\chi_{\lambda\mu\nu} = -\chi_{\mu\lambda\nu}$)。理由は微分を取ると分かって

$$
\partial^\mu \partial^\lambda \chi_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\mu \partial^\lambda (\chi_{\lambda\mu\nu} + \chi_{\lambda\mu\nu}) = \frac{1}{2}\partial^\mu \partial^\lambda (\chi_{\lambda\mu\nu} + \chi_{\mu\lambda\nu}) = \frac{1}{2}\partial^\mu \partial^\lambda (\chi_{\lambda\mu\nu} - \chi_{\lambda\mu\nu}) = 0
$$

$\partial^\mu \partial^\lambda = \partial^\lambda \partial^\mu$ から、添え字の付け直して、反対称テンソルであることを使っています。これから、$\partial^\lambda \chi_{\lambda\mu\nu}$ という項を加えても

$$
\partial^\mu T_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\lambda \chi_{\lambda\mu\nu} = \partial^\mu \theta_{\mu\nu} = 0
$$

となって連続の方程式を満たします。よって、$\chi_{\lambda\mu\nu}$ を $T_{\mu\nu}$ が対称テンソルになるように選んでやればいいことになります。ちなみに、$T_{\mu\nu}$ のことを正準エネルギー・運動量テンソル (canonical energy-momentum tensor) と呼びます。また、エネルギー・運動量テンソルを対称テンソルにする理由は、例えば一般相対論でのアインシュタイン方程式のエネルギー・運動量テンソルは対称になっているからです。

- ローレンツ変換

無限小変換として

$$
x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \delta w^{\mu\nu} x_\nu
$$

としたものが、微小なローレンツ変換の一般的な形になります。$\delta w^{\mu\nu}$ は反対称テンソルで、反対称テンソルである理由は、$x^\mu x_\mu$ はローレンツ変換で不変と要求されているので、$\delta w^{\mu\nu}$ の 1 次までで

$$x^{\mu\prime}x'_\mu = x^\mu x_\mu + 2x_\mu x_\nu \delta w^{\mu\nu} = x^\mu x_\mu$$

を満たす必要があるからです。

ローレンツ変換でも実数スカラー場 $\phi(x)$ は

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

とします。これはスカラーはローレンツ変換で不変という要求からです (最初の平行移動とローレンツ変換を合わせたものをポアンカレ変換と呼ぶ)。$\delta\phi = 0$ として、ネーターカレントを求めれば

$$\begin{aligned}
f_\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\delta x^\nu + \mathcal{L}(x)\delta x_\mu =& -\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda + \mathcal{L}(x)\delta w_\mu{}^\lambda x_\lambda \\
=& -\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)\right) \\
=& -\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda\theta_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{5}$$

添え字のつけ替えと、$\delta w^{\nu\lambda}$ は反対称であることを利用して

$$\begin{aligned}
f_\mu = -\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda\theta_{\mu\nu} =& -\frac{1}{2}(\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda\theta_{\mu\nu} + \delta w^{\nu\lambda}x_\lambda\theta_{\mu\nu}) \\
=& -\frac{1}{2}(\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda\theta_{\mu\nu} + \delta w^{\lambda\nu}x_\nu\theta_{\mu\lambda}) \\
=& -\frac{1}{2}(\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda\theta_{\mu\nu} - \delta w^{\nu\lambda}x_\nu\theta_{\mu\lambda}) \\
=& -\frac{1}{2}\delta w^{\nu\lambda}(x_\lambda\theta_{\mu\nu} - x_\nu\theta_{\mu\lambda})
\end{aligned}$$

よって、$\mu = 0$ での保存量は 3 次元積分から

$$\int d^3x(x_\lambda\theta_{0\nu} - x_\nu\theta_{0\lambda})$$

と与えられます。

$\theta_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルなので運動量 θ_{0j} は運動量です。そうすると、括弧内のその空間成分 $\nu, \lambda = 1, 2, 3$ に対して、

$$x_i\theta_{0j} - x_j\theta_{0i} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

x_j は 3 次元空間座標なので、これは運動量と座標の外積です。つまり、軌道角運動量に対応する量です。この結果はローレンツ変換が 3 次元回転を含んでいるためです。

別の方向からも軌道角運動量が出てくることが見れます。繰り返しになるので、わざわざ求める必要ありませんが、

$$\overline{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$$

から求めます (同じ結果になるだけ)。$\delta w^{\mu\lambda}$ の 1 次までで

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x' - \delta x) - \phi_r(x) \simeq \phi'(x') - \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\phi'(x') - \phi(x) \\
= -\delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi(x) \\
= -\delta w^{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi(x)
\end{aligned}$$

最後に偏微分の連鎖測

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\delta^\nu_\mu - \delta w^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu})\frac{\partial}{\partial x^\nu} \simeq \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

を使っています ($\partial x^\mu / \partial x_\nu = g^{\mu\nu}$)。これを (3) に入れれば分かるように、(4) による (5) と同じです。

これを

$$\begin{aligned}
\delta w^{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \frac{1}{2}(\delta w^{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \delta w^{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}) \\
&= \frac{1}{2}(\delta w^{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \delta w^{\nu\mu} x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}) \\
&= \frac{1}{2}(\delta w^{\mu\nu} x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \delta w^{\mu\nu} x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}) \\
&= -\frac{1}{2}\delta w^{\mu\nu} L_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

と変形して

$$\phi'(x) = \phi(x) + \overline{\delta}\phi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}\delta w^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\phi(x)$$

$L_{\mu\nu}$ は反対称テンソルです。

変換部分である第二項の $L_{\mu\nu}$ は $x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu$ です。そうすると $\phi(x)$ が平面波だとすれば、微分演算子 $i\partial_\mu$ は運動量 p_μ に置き換えられ、$x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$ となります。そうすると、レヴィ・チビタ記号 ϵ_{ijk} を使えば (同じローマ文字は 1 から 3 の和を取ります)、微分演算子を運動量に置き換えた $L^{(p)}_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$ は

$$\epsilon_{ijk}x_ip_j - \epsilon_{ijk}x_jp_i = \epsilon_{ijk}x_ip_j - \epsilon_{jik}x_ip_j = \epsilon_{ijk}x_ip_j + \epsilon_{ijk}x_ip_j = 2\epsilon_{ijk}x_ip_j$$

なので

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L^{(p)}_{jk} = \epsilon_{ijk}x_jp_k$$

として、位置と運動量の外積となり、軌道角運動量が出てきます。

少し一般化させて、$\phi'(x') = \phi(x)$ とせずに、$\delta\phi(x)$ が同様の形を持つと仮定して

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2}\delta w^{\mu\nu}I_{\mu\nu}\phi(x)$$

とします。$I_{\mu\nu}$ は反対称テンソルです。そうすると、ネーターカレント

$$f_\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\delta\phi(x) - \Big(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)\Big)\delta x^\nu$$

に適用すると、添え字の付け替えと $\delta w^{\nu\lambda}$ が反対称テンソルであることから

$$\begin{aligned}
f_\mu(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{1}{2}\delta w^{\nu\lambda}I_{\nu\lambda}\phi(x) - \Big(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)\Big)\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{1}{2}\delta w^{\nu\lambda}I_{\nu\lambda}\phi(x) - \theta_{\mu\nu}\delta w^{\nu\lambda}x_\lambda \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{1}{2}\delta w^{\nu\lambda}I_{\nu\lambda}\phi(x) - \frac{1}{2}\delta w^{\nu\lambda}(\theta_{\mu\nu}x_\lambda + \theta_{\mu\nu}x_\lambda) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}\frac{1}{2}\delta w^{\nu\lambda}I_{\nu\lambda}\phi(x) - \frac{1}{2}(\delta w^{\nu\lambda}\theta_{\mu\nu}x_\lambda + \delta w^{\lambda\nu}\theta_{\mu\lambda}x_\nu) \\
&= \frac{1}{2}\delta w^{\nu\lambda}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}I_{\nu\lambda}\phi(x) - (\theta_{\mu\nu}x_\lambda - \theta_{\mu\lambda}x_\nu)\Big)
\end{aligned}$$

括弧内を取り出して

$$M_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi)}I_{\nu\lambda}\phi(x) - (\theta_{\mu\nu}x_\lambda - \theta_{\mu\lambda}x_\nu)$$

と与えます。$\delta w^{\nu\lambda}$ は x と無関係なので、3 次元積分には関わらないことから無視します。連続の方程式として

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}M_{\mu\nu\lambda} = 0$$

これを $\mu = 0$ として、3 次元積分することで保存量を

$$M_{\nu\lambda} = \int d^3x M_{0\nu\lambda} = \int d^3x \Big(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^0 \phi)} I_{\nu\lambda}\phi(x) - (\theta_{0\nu}x_\lambda - \theta_{0\lambda}x_\nu) \Big)$$

と求められます。括弧内の第二項はすでに見たように 3 次元空間成分は軌道角運動量に対応します。第一項はスピン 0 であるスカラー場の要求を外すことで出てきた項と見れば、スピン角運動量と考えられます。スピンとの関連は「ディラック方程式の解とスピン」で触れます。

・補足

粒子 (質点) の場合も少し触れておきます。粒子ではラグランジアンは一般化座標 q によって $L(q, \dot{q})$ となります (ドットは時間微分)。一般化座標の変分 δq によってラグランジアンの変分は

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}$$

これにオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

を使うと

$$\begin{aligned}\delta L &= (\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \\ &= (\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q \\ &= \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q)\end{aligned}$$

δ と微分は交換できることを使っています (解析力学の「オイラー・ラグランジュ方程式」参照)。$q \to q + \delta q$ の変分に対してラグランジアンが不変とするなら、$\delta L = 0$ なので

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q) = 0$$

となり、括弧内が保存量となります。