規格化について

ローレンツ変換に対して不変になるように規格化定数を決めることが出来ます。しかし、そうすると規格化定数が煩わしくなることが多いために、ローレンツ不変性がそれほど重要でない話のときは計算が便利な規格化を使っていること多いです。

実スカラー場として、ローレンツ不変性を残すように規格化します。まず真空状態 $|0\rangle$ の規格化は単純に

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

と定義します。そして、運動量 $\boldsymbol{p}$ の状態 $|\boldsymbol{p}\rangle$ をどう規格化すればいいのか考えます。単純に生成演算子 $a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$ によって作ると

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle &= \langle 0|a_p a_q^\dagger|0\rangle \\
&= \langle 0|[a_p, a_q^\dagger] + a_p^\dagger a_q|0\rangle \\
&= \langle 0|((2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) + a_p^\dagger a_q)|0\rangle \\
&= (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})
\end{aligned}$$

これはローレンツ不変になっていません。ついでに

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ipx} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{ipx}) \quad (p_0 = E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2})$$

として、$\langle \boldsymbol{q}|\phi|0\rangle$ を見ると

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{q}|\phi|0\rangle &= \langle 0|a_q \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ipx} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{ipx})|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}e^{iqx}
\end{aligned}$$

となり、これもローレンツ不変ではないです。

これらをどうにかします。まず、$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$ を x^3 方向へブースト (ローレンツ変換) します。そうすると、4 元運動量 $p_\mu = (E_{\boldsymbol{p}}, -\boldsymbol{p})$ は

$$\begin{pmatrix} E' \\ -p_1' \\ -p_2' \\ -p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{\boldsymbol{p}} \\ -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix} \quad (\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta}}\ ,\ \beta = \frac{v}{c})$$

と変換されるので、変換された E' と p_3' は

$$E' = \gamma(E_{\boldsymbol{p}} + \beta p_3)\ ,\ p_3' = \gamma(p_3 + \beta E_{\boldsymbol{p}})$$

となります。これにデルタ関数が、$f(\alpha)=0$ となる $\alpha=\alpha_i$ $(i=1,2,,\dots,n)$ に対して

$$\delta(f(\alpha))=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|df/d\alpha|_{\alpha=\alpha_i}}\delta(\alpha-\alpha_i) \tag{1}$$

と変形できることから

$$\delta(f(\alpha)-f(\beta))=\frac{1}{|df/d\alpha|_{\alpha=\beta}}\delta(\alpha-\beta)$$

となることを使います（$G(\alpha)=f(\alpha)-f(\beta)$ とすれば、$\alpha=\beta$ で $G(\beta)=0$ になるから）。そうすると

$$\begin{aligned}
\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}') &= \delta(p'_1-q'_1)\delta(p'_2-q'_2)\delta(p'_3-q'_3)\\
&= \delta(p_1-q_1)\delta(p_2-q_2)\delta(p'_3(p_3)-q'_3(q_3))\\
&= \delta(p_1-q_1)\delta(p_2-q_2)\delta(p_3-q_3)\frac{1}{|dp'_3/dp_3|}\\
|\frac{dp'_3}{dp_3}|\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}') &= \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})
\end{aligned}$$

今は $E_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}$ なので

$$\begin{aligned}
\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) &= \delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')|\frac{d}{dp_3}(\gamma(p_3+\beta E_{\boldsymbol{p}}))|\\
&= \delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')|\gamma+\gamma\beta\frac{dE_{\boldsymbol{p}}}{dp_3}|\\
&= \delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')|\gamma+\gamma\beta\frac{p_3}{E_{\boldsymbol{p}}}|\\
&= \delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')\frac{1}{E_{\boldsymbol{p}}}|\gamma(E_{\boldsymbol{p}}+\beta p_3)|\\
&= \delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')\frac{E'}{E_{\boldsymbol{p}}}\\
E_{\boldsymbol{p}}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) &= E'\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')
\end{aligned}$$

これはローレンツ変換の前後で等式となっているので、デルタ関数をこの形で出てくるようにすればいいです。つまり、状態に対して

$$|\boldsymbol{p}\rangle=\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle=\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\sqrt{2E_q}\langle 0|a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}|0\rangle &= \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\sqrt{2E_q}\langle 0|([a_{\boldsymbol{p}},a^\dagger_{\boldsymbol{q}}]+a^\dagger_{\boldsymbol{q}}a_{\boldsymbol{p}})|0\rangle\\
&= \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\sqrt{2E_q}\langle 0|[a_{\boldsymbol{p}},a^\dagger_{\boldsymbol{q}}]|0\rangle\\
&= 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})
\end{aligned}$$

とできます。ここでの $2E_{\boldsymbol{p}}$ の 2 は便利だからというだけです。$\langle \boldsymbol{q}|\phi|0\rangle$ も

$$\langle \boldsymbol{q}|\phi|0\rangle = e^{iqx}$$

としてローレンツ不変になります ($q\cdot x$ はローレンツ不変なスカラー)。
　このように規格化したとき

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ipx}+a^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{ipx}) \ \Rightarrow\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(a'_{\boldsymbol{p}}e^{-ipx}+a'^\dagger_{\boldsymbol{p}}e^{ipx})$$

として、生成、消滅演算子を再定義することも行われます。これは

$$a'_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}a_{\boldsymbol{p}}$$

と置き換えているので、もとの生成演算子の作用から

$$|\boldsymbol{p}\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p}\rangle \ \Rightarrow\ |\boldsymbol{p}\rangle = a'^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$$

このときの交換関係は

$$[a'_{\boldsymbol{p}}, a'^\dagger_{\boldsymbol{p}'}] = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$$

となります。
　また、QED のとこで出できましたが、この規格化のために

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{f(E,\boldsymbol{p})}{2E}$$

といった積分が出てきます。これの積分は QED の「電子-陽子散乱〜スピン偏極〜」の補足で示したように

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}2\pi\delta(p^2-m^2)f(p)|_{p_0>0}$$

と変形でき、$f(p)$ がローレンツ不変ならこの式はローレンツ不変になります。
　例えば

$$f(E_{\boldsymbol{p},p}) = e^{-iE_{\boldsymbol{p}}x_0+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \qquad (E_{\boldsymbol{p}}>0)$$

とすれば、デルタ関数の性質 (1) での

$$\delta(p^2-m^2) = \delta(p_0^2-E_{\boldsymbol{p}}^2) = \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(\delta(p_0-E_{\boldsymbol{p}})+\delta(p_0+E_{\boldsymbol{p}}))$$

を使えば、$p_0>0$ の範囲で

$$\int_0^\infty \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi\delta(p^2 - m^2) e^{-ipx} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} e^{-iE_{\boldsymbol{p}}x_0 + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

また

$$f(E_{\boldsymbol{p},p}) = e^{iE_{\boldsymbol{p}}x_0 - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

なら、p_0 の積分範囲を $p_0 < 0$ に変えて

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi\delta(p^2 - m^2) e^{-ipx} &= \int_{-\infty}^0 dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} (\delta(p_0 - E_{\boldsymbol{p}}) + \delta(p_0 + E_{\boldsymbol{p}})) e^{-ipx} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} e^{iE_{\boldsymbol{p}}x_0 + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} e^{iE_{\boldsymbol{p}}x_0 - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}
\end{aligned}$$

最後で 3 次元運動量積分がいるので、$\boldsymbol{p}$ の符号を反転させています。そうすると

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} (e^{-iEx_0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - e^{iEx_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\epsilon(p_0)\delta(p^2 - m^2) e^{-ipx}$$

とまとめて書くことが出来ます。$\epsilon(p_0)$ は階段関数 $\theta(p_0)$ によって $\epsilon(p_0) = \theta(p_0) - \theta(-p_0)$ となる、符合関数です。

ちなみに量子力学のように体積 V の箱での規格化をしないのはブーストをかけたらローレンツ収縮によって体積が変化してしまうからです。

この規格化を使うとローレンツ不変にはなりますが、計算の途中に $1/2E$ が出てきて面倒と言えば面倒なことが起きるので、あまり規格化について細かいことを言わずに進めていきます。