

演算子積展開

演算子積展開について形式的な話を簡単にします。

まず、複合場 (composite field) について見ていきます。複合場は同じ 4 次元座標での場の積のことです。つまり、任意の場 (演算子) $O_i(x)$ の積

$$O_1(x)O_2(x)\cdots O_n(x)$$

というのが複合場です。カレントは複合場です。場の量子論ではこのような形が出てきますが、問題を起こします。例えば、相互作用のない伝播関数を見ればすぐに分かります。2 つの場の真空期待値によって

$$\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle$$

$T[]$ は時間順序積です。スカラー場では

$$\langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$$

この式で $x = y$ とすると、

$$\begin{aligned} \int dp_0 d^3p \frac{1}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 + i\epsilon} &= 4\pi \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \int_{-\infty}^\infty dp_0 \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= 4\pi \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \int_{-\infty}^\infty dp_0 \frac{|\mathbf{p}|^2}{2E} \left(\frac{1}{p_0 - (E - i\epsilon)} - \frac{1}{p_0 + (E - i\epsilon)} \right) \quad (E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}) \\ &= -4i\pi^2 \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

p_0 積分は複素平面で上半円を加えた経路での留数定理を使っています。この積分は明らかに発散します。このため、同一の座標における真空期待値を定義できてません。これは伝播関数に限ったことでなく、 n 点の場合でも同様です。

相互作用がある場合でも発散することを示しておきます。真空期待値は「Lehmann-Källén スペクトル表示」で出てきたように、3 次元運動量 p と状態を区別する適当な λ の固有状態によって

$$\langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p}, \lambda \rangle|^2 \quad (p_0 = E_p(\lambda))$$

$|\Omega\rangle$ は相互作用ありでの真空です。この固有状態は多粒子状態で、1 粒子数状態も含まれています。なので、1 粒子状態を $|p, 1\rangle$ とすれば

$$\sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p}, \lambda \rangle|^2 \geq |\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p}, 1 \rangle|^2$$

右辺は 1 粒子状態なので素直に $p_0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ となっていて (m は $\phi(x)$ の 1 粒子状態の質量)、さらに、on shell 条件 $p^2 = m^2$ から積分には引っかからないと考えて (共変性を考えれば p^2 に依存しているはず)

$$\sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p}, \lambda \rangle|^2 \geq |\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p}, 1 \rangle|^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}$$

右辺は明らかに発散します。このように、相互作用ありの場合でも発散します。というわけで、相互作用のありなしに関わらず同一座標での複合場は数学的に定義できません。これに対する対処を見ていきます。

ここからは相互作用はないとします。相互作用のない自由場では、正規積は (「ウィックの定理」参照)

$$: \phi(x) \phi(y) : = T[\phi(x) \phi(y)] - \langle 0 | T[\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle$$

右辺第 2 項が $x = y$ で発散する複合場の真空期待値になっています。つまり、正規積を使えば複合場は正則化された形で定義できます。これを使っていきます。具体的な複合場としてディラック場のカレントを使います。フェルミオン場 ψ の場合でも正規積は

$$: \psi(x) \bar{\psi}(y) : = T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] - \langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] | 0 \rangle$$

これを使ってカレント $j_{\mu}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x)$ を考えます。ここで知りたいのは真空期待値に挟まれている項なので、 $T[j^{\mu}(x) j^{\nu}(0)]$ を計算します。これはウィックの定理から

$$\begin{aligned}
T[j^\mu(x)j^\nu(0)] &= T(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0)) \\
&= : \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \overline{\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)}\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) :
\end{aligned}$$

縮約が消えないものを取り出していけば

$$\begin{aligned}
T[j^\mu(x)j^\nu(0)] &= : \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \langle 0|T[\overline{\psi}_a(x)\psi_d(0)]|0\rangle\gamma_{ab}^\mu\langle 0|T[\psi_b(x)\overline{\psi}_c(0)]|0\rangle\gamma_{cd}^\nu \\
&\quad - \gamma_{ab}^\mu\psi_b(x)\overline{\psi}_c(0)\gamma_{cd}^\nu\langle 0|T[\psi_d(0)\overline{\psi}_a(x)]|0\rangle \\
&\quad + \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\langle 0|T[\psi(x)\overline{\psi}(0)]|0\rangle\gamma^\nu\psi(0) \\
&= : \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad - \langle 0|T[\psi_d(0)\overline{\psi}_a(x)]|0\rangle\gamma_{ab}^\mu\langle 0|T[\psi_b(x)\overline{\psi}_c(0)]|0\rangle\gamma_{cd}^\nu \\
&\quad + \overline{\psi}_c(0)\gamma_{cd}^\nu\langle 0|T[\psi_d(0)\overline{\psi}_a(x)]|0\rangle\gamma_{ab}^\mu\psi_b(x) \\
&\quad + \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\langle 0|T[\psi(x)\overline{\psi}(0)]|0\rangle\gamma^\nu\psi(0) \\
&= : \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\overline{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) \\
&\quad + \text{tr}[\langle 0|T[\psi(0)\overline{\psi}(x)]|0\rangle\gamma^\mu\langle 0|T[\psi(x)\overline{\psi}(0)]|0\rangle\gamma^\nu] \\
&\quad + \overline{\psi}(0)\gamma^\nu\langle 0|T[\psi(0)\overline{\psi}(x)]|0\rangle\gamma^\mu\psi(x) \\
&\quad + \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\langle 0|T[\psi(x)\overline{\psi}(0)]|0\rangle\gamma^\nu\psi(0)
\end{aligned}$$

フェルミオン場の入れ替えを行う項ではスピノール成分を書いています。そして、これはフェルミオンの伝播関数

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] | 0 \rangle$$

を使うことで

$$\begin{aligned} T[j^\mu(x) j^\nu(0)] &= : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : + \text{tr}[S_F(0, x) \gamma^\mu S_F(x, 0) \gamma^\nu] \\ &\quad + \bar{\psi}(0) \gamma^\nu S_F(0, x) \gamma^\mu \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma^\mu S_F(x, 0) \gamma^\nu \psi(0) \end{aligned}$$

第1項は正規積なので発散がないです。

ここで、フェルミオンの伝播関数に対して通常とは違ったものを使います。今知りたいのは同一点での発散部分についてなので、伝播関数からその部分だけを取り出します。フェルミオンの伝播関数 $S_F(x)$ は

$$S_F(x) = (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) \Delta_F(x)$$

として、ボソンの伝播関数 Δ_F を微分すれば求まります。知りたいのは $x^2 = 0$ で特異性を持つ項なので、そこを取り出して考えます。位置表示でのボソンの伝播関数 (「位置表示の伝播関数」参照) は

$$\Delta_F(x) = -\frac{i}{4\pi} \delta(x^2) + \Theta(x^2) \frac{im}{8\pi\sqrt{x^2}} H_1^{(2)}(m\sqrt{x^2}) - \Theta(-x^2) \frac{m}{8\pi\sqrt{-x^2}} H_1^{(2)}(-im\sqrt{-x^2})$$

$H_1^{(2)}$ はハンケル関数、 $\Theta(x^2)$ は階段関数です。階段関数で時間的と空間的の区別を与えています。簡単にするために $m = 0$ にします。そのために、ハンケル関数 $H_1^{(2)}(z)$ の $z = 0$ の極限での展開

$$\lim_{z \rightarrow 0} H_1^{(2)}(z) = \frac{2i}{\pi z}$$

を使うことで

$$\begin{aligned} \Delta_F(x)|_{m=0} &= -\frac{i}{4\pi} \delta(x^2) + \Theta(x^2) \frac{im}{8\pi\sqrt{x^2}} \frac{2i}{\pi m\sqrt{x^2}} - \Theta(-x^2) \frac{m}{8\pi\sqrt{-x^2}} \frac{-2i}{i\pi m\sqrt{-x^2}} \\ &= -\frac{i}{4\pi} \delta(x^2) - \Theta(x^2) \frac{1}{4\pi^2 x^2} - \Theta(-x^2) \frac{1}{4\pi x^2} \\ &= -\frac{i}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{1}{4\pi^2 x^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} \end{aligned}$$

ボソンの伝播関数に含まれている $x^2 = 0$ で特異性を持つ項が取り出せています。これを微分すればフェルミオンの伝播関数になるので

$$S_F(x) = i\partial_\mu \gamma^\mu \Delta_F(x) = \frac{i}{2\pi^2} \frac{x_\mu \gamma^\mu}{(x^2 - i\epsilon)^2}$$

そうすると

$$\begin{aligned} T[j^\mu(x)j^\nu(0)] &= : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) : + \frac{x_\alpha x_\beta}{(x^2 - i\epsilon)^4} \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu] \\ &\quad - \frac{ix_\alpha}{2\pi^2} \bar{\psi}(0)\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \psi(x) \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^2} + \frac{ix_\alpha}{2\pi^2} \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \psi(0) \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

これが演算子積展開 (operator product expansion、略して OPE) の例です。この式は $x^2 = 0$ で発散する項によって展開された形で書かれています。演算子積展開は、このように発散する項によって展開していくことを指します。一般的に、演算子積展開は

$$A(x)B(y) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y)O_i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

と書かれます。 A, B, O_i は演算子、 $C_i(x-y)$ は c 数です。演算子 $O_i(x)$ は正則な演算子で、 $x=y$ で起きる発散は展開係数 (ウィルソン (wilson) 係数) $C_i(x-y)$ の方に含めます。上の式で言えば $1/(x^2 - i\epsilon)^2$ が $C_i(x-y)$ に当てはまります。 $C_i(x-y)$ の並びは $C_0(x-y)$ が一番強く発散し、次に強く発散するのを $C_1(x-y)$ に、といった順で書かれます。また、 $O_0(x)$ は普通は 1 に取ります。

この展開によって形式的に、例えば

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \phi(x)\phi(y) &= \lim_{y \rightarrow x} (C_0(x-y)O_0(x-y) + C_1(x-y)O_1(x-y)) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (C_0(x-y) + C_1(x-y)O_1(x-y)) \end{aligned}$$

から

$$\phi(x)\phi(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\phi(x)\phi(y) - C_0(x-y)}{C_1(x-y)} = O_1(x)$$

このように複合場を正則化した形で表現できます。

演算子積展開による重要な性質は短距離の効果を切り離して取り出せている点です (もとの発散が含まれていない項は長距離と短距離両方の全情報を持っている)。そのため、短距離の性質が重要なハドロンを調べる道具として使われています。例えば、演算子積展開でのクォークの伝播関数は

$$S(x) \simeq \Sigma_1(x) \frac{x_\mu \gamma^\mu}{(x^2)^2} + \Sigma_2(x) \frac{1}{x^2}$$

このように与えられて、 Σ_1, Σ_2 はウィルソン係数によって

$$\Sigma_1(x) = \frac{1}{2\pi^2} C_1$$

$$\Sigma_2(x) = \frac{m}{4\pi^2} C_2(x) - \frac{1}{4N_c} C_{\bar{\psi}\psi} x^2 \langle 0 | \bar{\psi}(0) \psi(0) | 0 \rangle$$

Σ_2 の第 2 項がクォーク凝縮の項です (クォーク凝縮は $\bar{\psi}(0)\psi(0)$ の真空期待値。実際はカラーの自由度による添え字がある)。 N_c はクォークのカラー自由度です (カラーは 3 なので $N_c = 3$)。これらは摂動論の計算から決定できます。

散乱計算での例として、電子と陽子の散乱を使います。細かい部分は話に関係しないので雑に求めます。まず、 S 行列を作ります。電子の状態を $|e^- \rangle$ 、陽子の状態を $|N \rangle$ で表すことにして、 S 行列は

$$S_{fi} = \langle e^-(k'), N(p') | S | e^-(k), N(p) \rangle$$

k, p, k', p' は運動量です。 S 行列演算子 S は

$$S = T \exp[i \int d^4x (\mathcal{L}_{QCD}^{int} + \mathcal{L}_{QED}^{int})]$$

ハドロンなので電磁相互作用だけでなく強い相互作用も含めています。 $\mathcal{L}^{int}$ は QCD、QED での相互作用項です。しかし、ここでは QCD 部分は無視して

$$S = T[1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{QED}^{int} + \frac{i^2}{2} \int d^4x \mathcal{L}_{QED}^{int}(x) \int d^4y \mathcal{L}_{QED}^{int}(y) + \dots]$$

として、QED 部分だけを使います。電子と陽子がいるので、相互作用項は

$$\mathcal{L}_{QED}^{int}(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) + e\bar{N}(x)\gamma^\mu N(x)A_\mu(x)$$

電子のディラック場は ψ 、陽子のディラック場は N 、電磁場は A_μ としています。QED の寄与は 2 次からなので

$$\begin{aligned} S_{fi} = \frac{-e^2}{2} \langle e^-(k'), N(p') | T[\int d^4x d^4y \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\bar{N}(y)\gamma^\nu N(y)A_\nu(y) \\ + \int d^4x d^4y \bar{N}(x)\gamma^\mu N(x)A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu(y)] | e^-(k), N(p) \rangle \end{aligned}$$

積分の x, y を入れ替えれば、どちらも同じになります。

これだと、点粒子での電子と陽子の散乱でしかないので変更します。陽子は内部構造を持つとして、散乱によって別の粒子になるとします。そうすると、電磁相互作用でのカレント $\bar{N}(x)\gamma^\mu N(x)$ はより複雑になるので、それを不明なカレント $J^\mu(x)$ として

$$S_{fi} = e^2 \langle e^-(k'), X(p') | T[\int d^4x d^4y \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)A_\nu(y)J^\nu(y) | e^-(k), N(p) \rangle$$

散乱後の粒子の状態を X としています。 J^ν は不明ですが、QED の摂動展開なので QED のファインマン則に従うことから、最低次での電子と陽子の散乱での不変振幅の形を流用して

$$\begin{aligned} \langle e^-(k'), X(p') | T[\int d^4x d^4y \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) A_\nu(y) J^\nu(y)] | e^-(k), N(p) \rangle \\ \Rightarrow \int d^4x d^4y \langle e^-(k') | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | e^-(k) \rangle D_{\mu\nu}(x, y) \langle X(p') | J^\nu(y) | N(p) \rangle \end{aligned}$$

$D_{\mu\nu}$ は電磁場の伝播関数です。陽子部分はそのままにし、電子は

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_s (a(k, s) u(k, s) e^{-ikx} + b^\dagger(k, s) v(k, s) e^{ikx}) \quad (E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$$

として (s はスピン) 電子の外線に $u(k) e^{-ikx}$ (s は省きます) を対応させ

$$\langle e^-(k') | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | e^-(k) \rangle = \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) e^{-i(k-k')x}$$

$D_{\mu\nu}$ は

$$D_{\mu\nu}(x, y) = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq(x-y)}$$

ファインマンゲージにしています。

不変振幅 $\mathcal{M}$ は S 行列から

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(\sim) \mathcal{M}$$

と定義され、デルタ関数の運動量保存は指数関数の積分から出てきます。なので、陽子部分からも指数関数を取り出すために

$$\langle X(p') | e^{iPy} J^\nu(0) e^{-iPy} | N(p) \rangle = \langle X(p') | J^\nu(0) | N(p) \rangle e^{-i(p-p')y}$$

P は運動量演算子で、 J^ν は演算子なので両側を挟んでいます。これを合わせることで、運動量保存のデルタ関数が

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4y e^{-i(k-k')x} e^{-iq(x-y)} e^{-i(p-p')y} &= \int d^4x d^4y e^{-i(k-k'+q)x} e^{iqy} e^{-i(p-p'-q)y} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k - k' + q) (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q) \\ &= (2\pi)^8 \delta^4(k + p - k' - p') \quad (q^\mu = k'^\mu - k^\mu) \end{aligned}$$

と出てきます。よって、不変振幅は

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \langle X(p') | J_\mu(0) | N(p) \rangle$$

陽子を電子と同じように点粒子とすれば、QED での「電子-陽子散乱」と同じです。散乱断面積の計算では、 $|\mathcal{M}|^2$ が必要なので

$$(2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p') \langle N(p) | J_\mu(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | J_\nu(0) | N(p) \rangle$$

という項が出てきます。これを

$$(2\pi)^4 \int d^4x \delta^4(p' - p - q) = \int d^4x e^{-i(p' - p - q)x} \quad (q^\mu = k'^\mu - k^\mu)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} & \int d^4x e^{-i(p' - p - q)x} \langle N(p) | J_\mu(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | J_\nu(0) | N(p) \rangle \\ &= \int d^4x e^{iqx} \langle N(p) | e^{ipx} J_\mu(0) e^{-ip'x} | X(p') \rangle \langle X(p') | J_\nu(0) | N(p) \rangle \\ &= \int d^4x e^{iqx} \langle N(p) | J_\mu(x) | X(p') \rangle \langle X(p') | J_\nu(0) | N(p) \rangle \end{aligned}$$

ここで観測の要求を入れます。実験において、散乱してくる電子のみを観測するとします。この設定での電子の散乱確率を求めるには、散乱後の可能な粒子 X の和を取る必要があります。なので、 $|X\rangle$ が完全系であるなら

$$\sum_X \langle N(p) | J_\mu(x) | X(p') \rangle \langle X(p') | J_\nu(0) | N(p) \rangle = \langle N(p) | J_\mu(x) J_\nu(0) | N(p) \rangle$$

として、 $J_\mu(x) J_\nu(0)$ が現れます。

一方で

$$\begin{aligned} & \int d^4x e^{iqx} \langle N(p) | J_\mu(0) J_\nu(x) | N(p) \rangle \\ &= \sum_X \int d^4x e^{iqx} \langle N(p) | J_\mu(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | e^{ipx} J_\nu(0) e^{-ip'x} | N(p) \rangle \\ &= \sum_X \int d^4x e^{i(p' - p + q)x} \langle N(p) | J_\mu(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | J_\nu(0) | N(p) \rangle \\ &= \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p' - p + q) \langle N(p) | J_\mu(0) | X(p') \rangle \langle X(p') | J_\nu(0) | N(p) \rangle \end{aligned}$$

このデルタ関数は運動量保存とは異なっているので、消える必要があり

$$\int d^4x e^{iqx} \langle N(p) | J_\mu(0) J_\nu(x) | N(p) \rangle = 0$$

これを使うと

$$\int d^4x e^{iqx} \langle N(p) | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | N(p) \rangle$$

時間順序積は階段関数 Θ によって

$$T[J_\mu(x) J_\nu(0)] = \Theta(x_0) J_\mu(x) J_\nu(0) + \Theta(-x_0) J_\nu(0) J_\mu(x)$$

$$T[J_\nu(0) J_\mu(x)] = \Theta(x_0) J_\nu(0) J_\mu(x) + \Theta(-x_0) J_\mu(x) J_\nu(0)$$

これは交換関係と

$$\begin{aligned} & T[J_\mu(x) J_\nu(0)] - T[J_\nu(0) J_\mu(x)] \\ &= \Theta(x_0) J_\mu(x) J_\nu(0) + \Theta(-x_0) J_\nu(0) J_\mu(x) - \Theta(x_0) J_\nu(0) J_\mu(x) - \Theta(-x_0) J_\mu(x) J_\nu(0) \\ &= \Theta(x_0) [J_\mu(x), J_\nu(0)] - \Theta(-x_0) [J_\mu(x), J_\nu(0)] \\ &= \frac{x_0}{|x_0|} [J_\mu(x), J_\nu(0)] \end{aligned}$$

となっているので、(1) が出てきます。今の話はハドロンの深非弾性散乱で出てきます。