

補足：ゲージ場の話を簡単にした例

ゲージ場の経路積分の話を簡単化した例を示します。見る積分は

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x-y)^2} \quad (1)$$

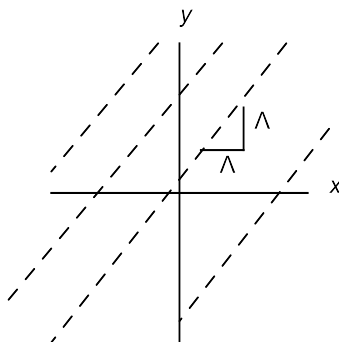
というものです。この積分は

$$x \Rightarrow x + \Lambda \quad (2)$$

$$y \Rightarrow y + \Lambda \quad (3)$$

という変換に対して不変です (Λ は実数)。もっと言えば、積分測度と $\exp$ 内の $(x-y)^2$ が不変です。このため、 xy 平面におけるある点 (x_0, y_0) を別の点 $(x_0 + \Lambda, y_0 + \Lambda)$ と動かしても、積分は不変になっています。この状況はゲージ場のときと同じです。このように、積分においてある x, y によって与えられた点が他の無数の点と等価だと出来る状況での積分がどうなるのかを見ます。変換 (2), (3) をゲージ変換と呼んでいきます。

積分を実行する前に状況をもう少し見ておきます。 xy 平面において、 x と y が与えられ $x-y=C$ (C は定数) となっているとき、この $x-y=C$ の線はゲージ変換に対して不変な線として書けます (x, y から $x+\Lambda, y+\Lambda$ と移りながら線になる。 $x-y=x+\Lambda-y-\Lambda=x'-y'$)。図にすると



C の値によって点線がいくつも出てきます。このような図はゲージの話をするときによく出てきて、点線はゲージ軌道 (gauge orbit) と言われ、 Z の積分においてこの各線上の点はゲージ変換によって等価です。というわけで、積分領域において等価な位置が存在しているのが具体的に分かります。

このように変換で位置 (x, y) が繋がっているものを含む積分がどうなるのかを実際に実行して見てみます。実行するために、

$$z_+ = \frac{1}{2}(x+y), \quad z_- = x-y$$

と置き換えます。 z_- は変換に対して不変ですが、 z_+ は不変ではありません。これのヤコビアンは

$$\begin{aligned}
J &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z_+}{\partial x} & \frac{\partial z_+}{\partial y} \\ \frac{\partial z_-}{\partial x} & \frac{\partial z_-}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial z_+}{\partial x} \frac{\partial z_-}{\partial y} - \frac{\partial z_+}{\partial y} \frac{\partial z_-}{\partial x} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

となっているので

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} |J| dz_+ dz_- e^{-z_-^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dz_+ \int_{-\infty}^{\infty} dz_- e^{-z_-^2}$$

z_- 積分はガウス積分なので

$$Z = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz_+$$

残った z_+ 積分は発散を持っています。 z_- 積分はゲージ軌道の $x-y$ なので、積分範囲は各 C の値の線を足したものに对应し、今はガウス積分となっています。そして、 z_+ 積分はそのガウス積分が無数にあるというように出てきています。つまり、同じもの (今はガウス積分の $\sqrt{\pi}$) を無限個足すようになっています。

これが積分範囲において等価 (積分の形を変えない) とみなせる点が無数にある場合の積分の結果で、ゲージ場におけるゲージ変換によって繋がっている物理的に等価なものを無限個足すために発散するという状況に対応します。今の場合は無限個のガウス積分の値を足しています。

次にゲージ固定を考えます。ゲージ固定は積分に制限を与えることで、ゲージ変換による等価な点を省く操作になります。まずは具体的にゲージ固定として x と y に条件 $x+y=0$ を与えます。これによって積分は $x+y=0$ の線とゲージ軌道 $z_- = x-y$ の線が交差したところを拾うことになります。各ゲージ軌道の1点を拾うのでゲージ変換で繋がっていない点だけを拾います。

この場合でも当然、 $x+y=0$ と z_- の交差した点は交差している z_- のゲージ軌道上の点と等価です。このため z_- の線上の各点はゲージ変換によって全て $x+y=0$ との交点に持っていけます。なので、 z_- の線上の各点を交点にもっていくゲージ変換によって z_- 積分の形は何も変更されずガウス積分の結果 $\sqrt{\pi}$ のままです。一方で z_+ は、 z_- の線上の点を交点に移す変換をしたとき、 $z_+ = (x+y)/2 + \Lambda$ に行きます。そして、ゲージ固定 $x+y=0$ があるので、 z_+ 積分は Λ 積分に変えられて

$$Z = \sqrt{\pi} \int d\Lambda$$

このように変換部分が分離して現れます。というわけで、ゲージ固定を入れることでゲージ変換による Λ が分離して出てきます。これは「経路積分～電磁場～」の最初の設定に対応します。

今の話はゲージ固定を積分の外側からいれているので、積分の中にゲージ固定をいれてやります。そのためにデルタ関数を差し込みます。ゲージ固定は $x+y=0$ なので $\delta(x-y)$ を入れます。デルタ関数を消すと元に戻る形は素直に (1) を

$$Z = \int d\Lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, 2\delta(x+y) e^{-(x-y)^2} \quad (4)$$

係数に2がついているのは

$$\begin{aligned}
Z &= \int d\Lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, 2\delta(x+y)e^{-(x-y)^2} \\
&= \int d\Lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx 2e^{-(2x)^2} \\
&= \int d\Lambda \int_{-\infty}^{\infty} dz_- e^{-z_-^2}
\end{aligned}$$

となっているからです。このようにゲージ固定した積分結果はゲージ固定の条件を含んだデルタ関数を入れることで作れます。次にゲージ固定の条件を一般的な場合にして考えます。

関数 $F(x, y)$ を用意し、この $F(x, y)$ が 0 だとしてゲージ固定を

$$F(x, y) = 0$$

とします。(4) と同じように F によるデルタ関数

$$\int dF \, \delta(F(x, y)) = 1$$

を使います。これはゲージ変換を行ったものだとすれば

$$\int dF \, \delta(F(x', y')) = 1 \quad (x' = x + \Lambda, \, y' = y + \Lambda)$$

F から Λ の積分に変えると ($dF/d\Lambda$ が正として)

$$\int d\Lambda \, \frac{dF(x', y')}{d\Lambda} \delta(F(x', y')) = 1$$

これに $\exp$ 部分をつけて x', y' 積分すれば (積分範囲は省いて書きます)

$$\int dx' dy' \int d\Lambda \, \frac{dF(x', y')}{d\Lambda} \delta(F(x', y')) e^{-(x'-y')^2} = \int dx' dy' e^{-(x'-y')^2} = Z$$

この $dF/d\Lambda$ は

$$\frac{dF}{d\Lambda} = \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \Lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \Lambda}$$

Λ 微分部分は

$$\left. \frac{dF}{d\Lambda} \right|_{F=0} = \left. \frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{F=0}$$

絶対値は $dF/d\Lambda$ が正だとしているのでつけていて、 $F = 0$ はデルタ関数からです。よって、 Λ の積分が分離されて

$$Z = \int d\Lambda \int dx dy \left. \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{F=0} \delta(F(x, y)) e^{-(x-y)^2} \quad (5)$$

となります (x', y' を x, y にしています)。というわけで、ゲージ固定の条件が一般的な場合でも Λ の積分を分離させられます。

同じ結果は別手順から出せます。まず

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} &= \int d\Lambda \delta(F(x', y')) \\ &= \int dF \left| \det \frac{d\Lambda}{dF} \right|_{F=0} \delta(F(x', y')) \\ &= \left| \det \frac{d\Lambda}{dF} \right|_{F=0}\end{aligned}$$

というのを作ります。今は 1 成分しかないので気にする必要はないですが、行列式になっているのは行列成分を持つように一般化したとき (例えば N 次元とか) も使えるようにしているのだとも思ってください。デルタ関数のときと同じように $\Delta^{-1}\Delta = 1$ を使うことで、

$$\begin{aligned}Z &= \int dx' dy' \Delta^{-1} \Delta e^{-(x'-y')^2} \\ &= \int dx' dy' \int d\Lambda \delta(F(\Lambda)) \left(\left| \det \frac{d\Lambda}{dF} \right|_{F=0} \right)^{-1} e^{-(x'-y')^2} \\ &= \int dx' dy' \int d\Lambda \left| \det \frac{dF}{d\Lambda} \right|_{F=0} \delta(F(x', y')) e^{-(x'-y')^2} \\ &= \int d\Lambda \int dx' dy' \left| \det \frac{dF}{d\Lambda} \right|_{F=0} \delta(F(x', y')) e^{-(x'-y')^2}\end{aligned}\tag{6}$$

このように Faddeev-Popov の行列式の形になります。行列式はここでは関係ないので (5) と一致します。ちなみに、(5) の絶対値部分を見ると分かるように、 $F = 0$ は $\Lambda = 0$ で成立するので、 $x' = x$ として絶対値についている $F = 0$ を $\Lambda = 0$ と書くこともできます。

実際に (6) でゲージ固定 $F(x, y) = x + y = 0$ を入れてみると

$$\left. \frac{dF}{d\Lambda} \right|_{F=0} = \left. \frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{F=0} = 2$$

なので

$$\begin{aligned}Z &= \int d\Lambda \int dx dy \, 2\delta(x+y) e^{-(x-y)^2} \\ &= \int d\Lambda \int dx \, 2e^{-(2x)^2}\end{aligned}$$

$dF/d\Lambda$ 微分は

$$\left. \frac{dF}{d\Lambda} \right|_{F=0} = \left. \frac{\partial F(x+\Lambda, y+\Lambda)}{\partial x} + \frac{\partial F(x+\Lambda, y+\Lambda)}{\partial y} \right|_{\Lambda=0} = 2$$

としても同じです。

今度はゲージ固定を $F(x, y) = 0$ とせず、 $F(x, y) = c$ とします。そうすると (6) から

$$Z = \int dx' dy' \int d\Lambda \left| \det \frac{dF}{d\Lambda} \right|_{F=c} \delta(F(x', y') - c) e^{-(x'-y')^2}$$

これにガウス積分

$$\int dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dz e^{-z^2} = 1$$

を入れて (x', y' を x, y と書きます)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx dy \int d\Lambda \int dc e^{-c^2} \left| \det \frac{dF}{d\Lambda} \right|_{F=c} \delta(F(x, y) - c) e^{-(x-y)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx dy \int d\Lambda \left| \det \frac{dF}{d\Lambda} \right|_{F=c} e^{-((x-y)^2 + F^2)} \end{aligned}$$

となって exp 内を作用だと思えば、作用内にゲージ固定項が入ってきた形になっています。

この話をゲージ場の経路積分で行ったのが、「経路積分～電磁場～」です。経路積分であることと汎関数が出てくることから複雑になっていますが、やっているのはこんなことです。数学的な厳密さを求めるとさらに面倒になります。