

経路積分～ディラック場～

演算子としたディラック場は反交換関係に従うので、経路積分に持っていくためにはそれを表現できる c 数を導入する必要があります。それがグラスマン数で、最初にその話をしてから経路積分の話に移ります。経路積分の形を求める手順は基本的にスカラー場と同じなので、いきなり結果にいています。

ディラック場の計算の前に数学の準備をします。なぜかという、フェルミオンは反交換関係に従っており、尚且つ経路積分ではその反交換関係を満たす通常の数 (c 数) として汎関数積分を行わなければならないからです。その演算子でないのに反交換関係を満たす代数のことをグラスマン代数といいます。

まずグラスマン代数の生成子 C_i (グラスマン数) として

$$\{C_i, C_j\} = C_i C_j + C_j C_i = 0$$

$$C_i^2 = 0$$

というをつくります。この関係によって、変数として C_1, C_2 を持つ任意の関数 $f(C_1, C_2)$ を作ろうと思うと

$$f(C_1, C_2) = a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_1 C_2 = a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 - a_3 C_2 C_1$$

のように作れる項が制限されます ($a_0, \dots, a_3$ は c 数)。この $f(C_1, C_2)$ を微分しようとする、右から作用させるか左から作用させるかで符号に違いがでて、左から (左微分) なら

$$\frac{\partial^L f}{\partial C_1} = a_1 + a_3 C_2$$

右から (右微分) なら

$$\frac{\partial^R f}{\partial C_1} = a_1 - a_3 C_2$$

となります。特に断らない限り微分するときは左から作用させるものを言う事にします。
微分演算は特殊で

$$C_1 f = a_0 C_1 + a_2 C_1 C_2$$

というのがあったときに微分すると

$$\frac{\partial}{\partial C_1} (C_1 f) = a_0 + a_2 C_2$$

このようになります。そうすると、グラスマン数でのライプニッツ則は

$$\frac{\partial}{\partial C_1} (C_1 f) = \frac{\partial C_1}{\partial C_1} f - C_1 \frac{\partial f}{\partial C_1} = f - C_1 a_1 - a_3 C_1 C_2 = a_0 + a_2 C_2$$

$$C_1 \frac{\partial f}{\partial C_1} = a_1 C_1 + a_3 C_1 C_2$$

このように、グラスマン数の微分演算がグラスマン数を飛び越えた時に符号が反転します (反ライプニッツ則)。

で、これらを組み合わせれば

$$\left(C_1 \frac{\partial}{\partial C_1} + \frac{\partial}{\partial C_1} C_1\right) f = a_1 C_1 + a_3 C_1 C_2 + a_0 + a_2 C_2 = f$$

となり両辺 f で割れば

$$C_1 \frac{\partial}{\partial C_1} + \frac{\partial}{\partial C_1} C_1 = 1$$

となります。つまり、反交換関係の形で

$$\left\{C_1, \frac{\partial}{\partial C_1}\right\} = 1$$

と書けます。一般化すれば

$$\left\{C_i, \frac{\partial}{\partial C_j}\right\} = \delta_{ij}$$

また、演算子同士に関しては

$$\left\{\frac{\partial}{\partial C_i}, \frac{\partial}{\partial C_j}\right\} = 0$$

連鎖則は通常通りで、 $C_i(t)$ (t は実数) が

$$C_i(t) = \sum_j a_{ij}(t) C_j'$$

($a_{ij}(t)$ は展開係数なのでグラスマン数ではない) と与えられているとき

$$\frac{d}{dt} f[C(t)] = \sum_i \frac{dC_i}{dt} \frac{\partial}{\partial C_i} f$$

となります。

n 個のグラスマン数の積を $C_1 C_2 \cdots C_n$ の並びにすると、レヴィ・チビタ記号 $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ ($\epsilon_{12 \cdots n} = 1$) によって

$$C_{i_1} C_{i_2} \cdots C_{i_n} = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} C_1 C_2 \cdots C_n \quad (1)$$

となります。例えば $n = 3$ では

$$C_1 C_3 C_2 = \epsilon_{132} C_1 C_2 C_3 = -C_1 C_2 C_3$$

$$C_2 C_1 C_3 = \epsilon_{213} C_1 C_2 C_3 = -C_1 C_2 C_3$$

$$C_3 C_1 C_2 = \epsilon_{312} C_1 C_2 C_3 = C_1 C_2 C_3$$

というようになり、 C_i の並びを入れ替えた結果になります。

次に積分を定義します。知りたい積分は

$$\int dC_1 dC_2 f(C_1, C_2)$$

についてです。グラスマン代数における積分は

$$\int dC_i C_i = 1, \quad \int dC_i = 0$$

のように定義されます。そうすると

$$\int dC_1 f(C_1, C_2) = \int dC_1 (a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_1 C_2) = a_1 + a_3 C_2$$

となって、微分と同じ結果を出します。また

$$\{dC_i, dC_j\} = 0, \quad \{dC_i, C_j\} = 0$$

n 個の積分を行うときは並びに注意する必要があります。素直に

$$\int dC_n \cdots dC_1 C_1 \cdots C_n = 1$$

と並んでいれば特に問題はないです。しかし、 $C_{i_1} C_{i_2} \cdots C_{i_n}$ となっているときは、(1) から

$$\int dC_n \cdots dC_1 C_{i_1} C_{i_2} \cdots C_{i_n} = \int dC_n \cdots dC_1 \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} C_1 C_2 \cdots C_n = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

3 個の場合で見れば、例えば

$$\int dC_3 dC_2 dC_1 C_1 C_3 C_2 = -1 \quad (\epsilon_{132} = -1)$$

$$\int dC_3 dC_2 dC_1 C_2 C_3 C_1 = +1 \quad (\epsilon_{231} = +1) \quad \int dC_3 dC_2 dC_1 C_3 C_1 C_2 = +1 \quad (\epsilon_{312} = +1)$$

となっています。もしくは、測度 dC_i の並びを合わせてもいいです (反交換する)。

次に複素数に広げて、 η_i, η_j^* というのをみます

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \{\eta_i^*, \eta_j^*\} \{\eta_i, \eta_j^*\} = 0$$

これらにも成分が二成分として

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \eta^* = \begin{pmatrix} \eta_1^* \\ \eta_2^* \end{pmatrix}$$

$$\eta^{*T} \eta = \eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2 = \sum_{i=1}^2 \eta_i^* \eta_i$$

これを二乗すると

$$\begin{aligned}
 (\eta^{*T} \eta)^2 &= (\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2)(\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2) \\
 &= \eta_1^* \eta_1 \eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2 \eta_1^* \eta_1 + \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 + \eta_2^* \eta_2 \eta_2^* \eta_2 \\
 &= \eta_2^* \eta_2 \eta_1^* \eta_1 + \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 \\
 &= 2\eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2
 \end{aligned}$$

並びを変えていくときは反交換関係のために1個ずらすたびに符号は反転します。expの肩にのせたものを展開すると

$$\begin{aligned}
 e^{-\eta^{*T} \eta} &= 1 - \eta^{*T} \eta + \frac{1}{2}(\eta^{*T} \eta)^2 \dots \\
 &= 1 - (\eta_1^* \eta_1 + \eta_2^* \eta_2) + \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 \dots
 \end{aligned}$$

これを積分すると、第二項は消えてしまうので

$$\begin{aligned}
 \int d\eta^{*T} d\eta e^{-\eta^{*T} \eta} &= \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 e^{-\eta^{*T} \eta} \\
 &= - \int d\eta_1^* d\eta_2^* d\eta_1 d\eta_2 e^{-\eta^{*T} \eta} \\
 &= - \int d\eta_1^* d\eta_2^* d\eta_1 d\eta_2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \eta_2 \\
 &= \int d\eta_1^* d\eta_2^* d\eta_1 d\eta_2 \eta_2 \eta_1^* \eta_1 \eta_2^* \\
 &= - \int d\eta_1^* d\eta_2^* d\eta_1 \eta_1 \eta_1^* \eta_2^* \\
 &= - \int d\eta_1^* d\eta_2^* \eta_1^* \eta_2^* \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2}$$

となります。

次に行列 M, N を使って

$$\eta_i = \sum_j M_{ij} \alpha_j, \quad \eta_i^* = \sum_j N_{ij} \alpha_j^*$$

というのを作ります。 α_j, α_j^* もグラスマン数です。ここからローマ文字の添え字が同じときも和を取るようになります。一般化せずに2成分 ($i = 1, 2$) しかないとして

$$\begin{aligned}
 \eta_1 \eta_2 &= (M_{11} \alpha_1 + M_{12} \alpha_2)(M_{21} \alpha_1 + M_{22} \alpha_2) \\
 &= (M_{11} \alpha_1 M_{22} \alpha_2 + M_{12} \alpha_2 M_{21} \alpha_1) \\
 &= (M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}) \alpha_1 \alpha_2 \\
 &= (\det M) \alpha_1 \alpha_2
 \end{aligned}$$

これはグラスマン数の積分において当然

$$\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$$

というようになっているので

$$\int d\eta_1 d\eta_2 (\det M) \alpha_1 \alpha_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$$

これから

$$d\eta_1 d\eta_2 = (\det M)^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2$$

であることがわかります。これは通常の体積要素の変換と違いヤコビアン²の逆 $(\det M)^{-1}$ となっています。
これを $\exp[-\eta^{*T} \eta]$ の積分にいて、添え字のない α を $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ だとすれば (2) より

$$\begin{aligned} \int d\eta^{*T} d\eta e^{-\eta^{*T} \eta} &= \int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 e^{-\eta^{*T} \eta} \\ &= - \int d\eta_1^* d\eta_2^* d\eta_1 d\eta_2 e^{-\eta^{*T} \eta} \\ &= -(\det N)^{-1} (\det M)^{-1} \int d\alpha_1^* d\alpha_2^* d\alpha_1 d\alpha_2 \exp[-\alpha^{*T} N^T M \alpha] \\ &= (\det N)^{-1} (\det M)^{-1} \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 \exp[-\alpha^{*T} N^T M \alpha] \\ &= (\det N)^{-1} (\det M)^{-1} \int d\alpha^{*T} d\alpha \exp[-\alpha^{*T} N^T M \alpha] \\ &= (\det[NM])^{-1} \int d\alpha^{*T} d\alpha \exp[-\alpha^{*T} N^T M \alpha] \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

行列式の中は $\det(NM) = \det(N^T M)$ なので、 $N^T M = A$ として

$$\int d\alpha^* d\alpha \exp[-\alpha^{*T} A \alpha] = \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 \exp[-\alpha^{*T} A \alpha] = \det A \quad (\alpha^{*T} = \alpha^\dagger)$$

となります (下の補足も参照)。

この結果は n 個のグラスマン数に一般化できて

$$\int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 \cdots d\alpha_n^* d\alpha_n \exp[-\alpha_i^* A_{ij} \alpha_j] = \det A \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

n 個あっても積分測度の変数変換で $(\det M)^{-1}$ が出てくることが分かればよくて、グラスマン数の並びと行列式がレヴィ・チビタ記号 $\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}$ によって

$$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \det M = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \cdots M_{i_n j_n}$$

と書けることに注意すれば出てきます。また、(3) において、 η から α に変数変換するときに測度の並びを $d\eta_1^* d\eta_2^* \cdots d\eta_n^* d\alpha_1 d\eta_2 \cdots d\eta_n$ のようにする必要があり、これは一般的に

$$d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \cdots d\eta_n^* d\eta_n = (-1)^{n(n-1)/2} d\eta_1^* d\eta_2^* \cdots d\eta_n^* d\alpha_1 d\eta_2 \cdots d\eta_n$$

このような符号になっています。これは入れ換えによる符号の反転の数から分かります。しかし、この並びに変えた後に結局元に戻して計算するようにしているので、符号はキャンセルされて何も起こしません。

一応、 $n = 3$ の場合も見ておきます。測度は

$$\int \mathcal{D}\alpha^* \mathcal{D}\alpha = \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3$$

で、 $i = 3$ では $\exp[-\alpha_i^* \alpha_i]$ は三次まで展開すればよくて、この積分で消えない部分を取り出すと

$$-\frac{1}{6}(6\alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \alpha_2 \alpha_3^* \alpha_3) = -\alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \alpha_2 \alpha_3^* \alpha_3$$

なので

$$\begin{aligned} - \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \alpha_2 \alpha_3^* \alpha_3 &= \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \alpha_2 \alpha_3^* \\ &= \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \alpha_2 \alpha_3^* \\ &= \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \alpha_2 \\ &= - \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 \alpha_2 \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \\ &= - \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって

$$\int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 \exp[-\alpha_i^* \alpha_i] = 1$$

となり、同じ結果を出します。
積分の注意として、測度の並びを

$$\int d\alpha_1 d\alpha_1^* d\alpha_2 d\alpha_2^* d\alpha_3 d\alpha_3^* \cdots$$

このようにしている場合には気をつけてください。1成分のときを見るのが分かりやすく

$$\int d\alpha d\alpha^* e^{-\alpha^* \alpha} = -1$$

となっており、符号が反転します。そのため、この並びのときには

$$\int d\alpha d\alpha^* e^{\alpha^* \alpha} = 1$$

となるようにします。これによって、例えば2成分の場合で

$$\begin{aligned}
\int d\eta^T d\eta^* e^{-\eta^{*T}\eta} &= \int d\eta_1 d\eta_1^* d\eta_2 d\eta_2^* e^{\eta^{*T}\eta} \\
&= - \int d\eta_1 d\eta_2 d\eta_1^* d\eta_2^* e^{-\eta^{*T}\eta} \\
&= -(\det N)^{-1}(\det M)^{-1} \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_1^* d\alpha_2^* \exp[\alpha^{*T} N^T M \alpha] \\
&= (\det[NM])^{-1} \int d\alpha_1 d\alpha_1^* d\alpha_2 d\alpha_2^* \exp[\alpha^{*T} N^T M \alpha] \\
&= 1
\end{aligned}$$

とすることができます。よってこの並びの場合では

$$\int d\alpha_1 d\alpha_1^* d\alpha_2 d\alpha_2^* \cdots d\alpha_n d\alpha_n^* \exp[+\alpha_i^* A_{ij} \alpha_j] = \det A$$

として、exp 内の符号を変えて定義されます。
まとめると、測度の並びに対して

$$\int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 \cdots d\alpha_n^* d\alpha_n \exp[-\alpha_i^* A_{ij} \alpha_j] = \det A$$

$$\int d\alpha_1 d\alpha_1^* d\alpha_2 d\alpha_2^* \cdots d\alpha_n d\alpha_n^* \exp[+\alpha_i^* A_{ij} \alpha_j] = \det A$$

このようになっています。上の場合では $\mathcal{D}\alpha^* \mathcal{D}\alpha$ 、下の場合では $\mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\alpha^*$ と書かれます。こんなことになっているので、1つの本で勉強している限りは問題ないですが、違う本を見る時には少し気に留めておいた方がいいかもしれません。他の並びも考えられますが、経路積分では通常この二つの並びを使うので、他のは気にしないでいいです。

ついでに

$$\int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 \cdots d\alpha_n^* d\alpha_n \alpha_k \alpha_l^* \exp[-\alpha_i^* A_{ij} \alpha_j] = A_{kl}^{-1} \det A$$

というようにもなっています。 A_{kl}^{-1} は A_{ij} の逆行列です。これは $\det A$ を A_{ij} で微分すれば $A_{ij}^{-1} \det A$ となることから分かると思います。

η_i としてきましたが連続値になっているとして $\eta(x)$ ならどうなのかというと、特に変化することなく

$$\{\eta(x), \eta(y)\} = 0$$

$$\frac{\delta \eta(x)}{\delta \eta(y)} = \delta(x - y)$$

となり、後はデルタ関数が出てくることに注意すればいいだけです。積分も

$$\int d\eta(x) = 0, \quad \int d\eta(x) \eta(x) = 1$$

です。

グラスマン数を変数に持つ関数 $f(\eta_1(t), \eta_2(t), \dots)$ の変化量を見てみます。グラスマン数 $\eta(t)$ の微分自体は

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\eta(t + \Delta t) - \eta(t)}{\Delta t}$$

て定義できます。このため

$$\frac{d}{dt}(\eta_1(t)\eta_2(t)) = \frac{d\eta_1(t)}{dt}\eta_2(t) + \eta_1(t)\frac{d\eta_2(t)}{dt}$$

という通常の微分の規則を持ちます。これは

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\eta_1(t)\eta_2(t)) &= \frac{d\eta_1(t)}{dt}\eta_2(t) + \eta_1(t)\frac{d\eta_2(t)}{dt} \\ &= \frac{d\eta_1(t)}{dt}\eta_2(t) - \frac{d\eta_2(t)}{dt}\eta_1(t) \\ &= \frac{d\eta_1}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_1}(\eta_1(t)\eta_2(t)) + \frac{d\eta_2}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_2}(\eta_1(t)\eta_2(t)) \end{aligned}$$

と変形できます。この形は一般化できて

$$\frac{d}{dt}(\eta_1(t)\eta_2(t)\cdots\eta_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_i}(\eta_1(t)\eta_2(t)\cdots\eta_n(t))$$

という形になります。

$f(\eta_1, \eta_2)$ は最初に示したように

$$f(\eta_1, \eta_2) = a_0 + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_1\eta_2$$

と展開されるので、 d/dt の

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\eta_1, \eta_2) &= \frac{d}{dt}(a_0 + a_1\eta_1(t) + a_2\eta_2(t) + a_3\eta_1(t)\eta_2(t)) \\ &= a_1 \frac{d}{dt}\eta_1(t) + a_2 \frac{d}{dt}\eta_2(t) + a_3 \frac{d}{dt}(\eta_1(t)\eta_2(t)) \\ &= a_1 \frac{d}{dt}\eta_1 + a_2 \frac{d}{dt}\eta_2 + a_3 \left(\frac{d\eta_1}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_1}(\eta_1\eta_2) + \frac{d\eta_2}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_2}(\eta_1\eta_2) \right) \\ &= a_1 \frac{d}{dt}\eta_1 + a_2 \frac{d}{dt}\eta_2 + a_3 \sum_{i=1}^2 \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_i}(\eta_1\eta_2) \end{aligned}$$

第一項と第二項は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta_1 &= \frac{d\eta_1}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_1}\eta_1 + \frac{d\eta_2}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_2}\eta_1 = \sum_{i=1}^2 \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_i}\eta_1 \\ \frac{d}{dt}\eta_2 &= \frac{d\eta_1}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_1}\eta_2 + \frac{d\eta_2}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_2}\eta_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_i}\eta_2 \end{aligned}$$

この変形によって

$$\frac{d}{dt}f(\eta_1, \eta_2) = \sum_{i=1}^2 \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_i} (a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_1\eta_2) = \sum_{i=1}^2 \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta_1, \eta_2)$$

これは一般化すれば

$$\frac{d}{dt}f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \quad (4)$$

となります。そうすると、 η_i を $\delta\eta_i$ 変化させたときの f の変化量 δf は

$$\delta f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{i=1}^n \delta\eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

と与えられます。実際に dt で割れば

$$\frac{d}{dt}f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{d\eta_i}{dt} \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

となり、(4)に戻ります。形自体は通常の数の場合と同じですが、グラスマン数なので $\delta\eta_i$ の位置を変えると符号が変わることに注意してください。また、汎関数 $F[\eta]$ の場合でも同じように変化量が左側にくることになり

$$\delta F = \int dt \delta\eta(t) \frac{\delta F}{\delta\eta(t)}$$

となります。

これで数学の準備ができたので、ディラック場に移ります。まず、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

そして、ハミルトニアンは ψ の共役な運動量が $\pi = i\psi^\dagger$ であることから

$$\mathcal{H} = i\psi^\dagger\dot{\psi} - \mathcal{L} = -i\bar{\psi}\gamma \cdot \nabla\psi + m\bar{\psi}\psi$$

このようになっていることと、ディラック場には独立な場が二つあることから源を二つくっつけて

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \right) \right]}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \right]}$$

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_i \int d\bar{\psi}_i d\psi_i = \int d\bar{\psi}_1 d\psi_1 d\bar{\psi}_2 d\psi_2 \cdots$$

$\bar{\psi}$ であることから源も $\bar{\eta}$ とし、 $\eta, \bar{\eta}$ が $\bar{\psi}$ と ψ の源になり、並びとしてはエルミート共役にします。そして、 $\eta, \bar{\eta}$ もディラックスピノールなのでスピノール成分の計算によって、このように源を入れたラグランジアンもスカラー量になっています。注意として、ディラック場ではクライン・ゴールドン場と違って場 ψ と共役な運動量 $i\psi^\dagger$ によるものとしては作っていません。現在の場合 (ξ をグラスマン数だとして)

$$\int d\xi^* d\xi |\xi\rangle e^{-\xi^* \xi} \langle \xi| = 1$$

というのを通常の完全性の代わりに使って行っています ($\det \gamma_0 = 1$ なので、測度は $\mathcal{D}\psi^\dagger = \mathcal{D}\bar{\psi}$)。通常の完全性と違うようになっているのは状態 $|\xi\rangle$ をコヒーレント状態と呼ばれるものとして使っているからです。フェルミオンにおけるコヒーレント状態は

$$|\xi\rangle = e^{a^\dagger \xi} |0\rangle = |0\rangle - \xi |1\rangle$$

として定義されます ($a^\dagger$ は生成演算子)。このように、経路積分の作り方は、正準共役な量を使って作る場合と、コヒーレント状態を使って作るという二通りがあります。

また、 $\psi, \bar{\psi}, \eta, \bar{\eta}$ は全てのスピノールの添え字と時空において反交換します

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = \{\psi_a(x), \eta_b(y)\} = \{\bar{\psi}_a(x), \bar{\eta}_b(y)\} = \dots = 0$$

ただし、これは演算子ではない c 数 (グラスマン数) としての関係です。そして、自由場では特に気にする必要はないですが、相互作用ありでの生成汎関数 Z を求める時に場を演算子として置き換えて Z_0 に作用させるという形にしましたが、ここだと

$$\psi \Rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \quad \bar{\psi} \Rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}$$

のように変化させます。マイナス符号が出てきたのはグラスマン数による微分の特徴です。全ての微分は左からかかるとして行うことにしていることから、 $\bar{\psi}\eta$ から $\bar{\psi}$ を外に出すための η 微分は η が $\bar{\psi}$ の左側にいる必要があるために反交換してマイナスが出てきます。

ディラック演算子を S^{-1} として Z_0 の分子を見ていきます。exp 内

$$Q(\psi(x), \bar{\psi}(x)) = \bar{\psi}(x) S^{-1} \psi(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)$$

が、最小になるのは微分して 0 なので $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ それぞれに対して

$$\bar{\psi}(x) S^{-1} + \bar{\eta}(x) = 0$$

$$S^{-1} \psi(x) + \eta(x) = 0$$

なので

$$\psi_m(x) = -S\eta(x)$$

$$\bar{\psi}_m(x) = -\bar{\eta}(x)S$$

となります ($SS^{-1} = 1$ が存在するとしています)。これを Q に代入すれば最小 Q_m として

$$Q_m = \bar{\eta}S\eta - \bar{\eta}S\eta - \bar{\eta}S\eta = -\bar{\eta}S\eta$$

これを使って Q を表現すると

$$\begin{aligned}
Q &= \bar{\psi} S^{-1} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \\
&= -\bar{\eta} S \eta + \bar{\psi} S^{-1} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} S \eta \\
&= -\bar{\eta} S \eta + \bar{\psi} S^{-1} \psi - \bar{\psi}_m S^{-1} \psi - \bar{\psi} S^{-1} \psi_m + \bar{\psi}_m S^{-1} \psi_m \\
&= Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m)
\end{aligned}$$

これを代入して $Z_0[\eta, \bar{\eta}]$ の分子は

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x (Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m)) \right] \\
&= \exp \left[i \int d^4x Q_m \right] \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m) S^{-1} (\psi - \psi_m) \right] \\
&= \exp \left[-i \int d^4x \bar{\eta} S \eta \right] \det(-i S^{-1})
\end{aligned}$$

で、分母は $\det(-i S^{-1})$ なので

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left[-i \int d^4x \bar{\eta} S \eta \right]$$

源の位置を区別させれば

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left[-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right]$$

明らかに $S(x-y)$ が伝播関数っぽいですが、ちゃんと確かめます。まず S は S^{-1} の逆としているんですが、そのような S は存在していて

$$S(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x)$$

で与えられます。 $\Delta_F(x)$ はクライン・ゴールドンの伝播関数の i がないやつです。実際に

$$\begin{aligned}
S^{-1} S &= (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) \Delta_F(x) \\
&= (-\square - m^2) \Delta_F(x) \\
&= \delta^4(x)
\end{aligned}$$

となっています。 S の存在が確かめられたので $Z_0[\eta, \bar{\eta}]$ を微分します

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0[\eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta(x_1) \delta \bar{\eta}(x_2)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} &= -\frac{\delta^2}{\delta \eta(x_1) \delta \bar{\eta}(x_2)} \exp \left[-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= i \frac{\delta}{\delta \eta(x_1)} \int d^4x d^4y \delta^4(x_2 - x) S(x-y) \eta(y) \exp \left[-i \int d^4x \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= i \int d^4x d^4y \delta^4(x_2 - x) \delta^4(x_1 - y) S(x-y) \exp \left[-i \int d^4x \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right] + \cdots \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= i S(x_2 - x_1) = \langle 0 | T (\psi(x_2) \bar{\psi}(x_1)) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

というわけで、ディラック場の伝播関数であることが示されました。スピノール成分を明確にせずにしてきましたが、スピノール成分 a, b を出して書けば

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\psi_a(x_2)\bar{\psi}_b(x_1))|0\rangle &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0[\eta, \bar{\eta}]}{\delta\eta_b(x_1)\delta\bar{\eta}_a(x_2)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= -\frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0[\eta, \bar{\eta}]}{\delta\bar{\eta}_a(x_2)\delta\eta_b(x_1)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \end{aligned}$$

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left[-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}_a(x) S_{ab}(x-y) \eta_b(y) \right]$$

グラスマン数による反交換の性質で、 $\eta, \bar{\eta}$ の入れ替えで符号が変わります。二行目の式の方が位置 x_1, x_2 の並びの対応が取れていて $\psi, \bar{\psi}$ を $\eta, \bar{\eta}$ の微分の形にした結果にそのままなるので、二行目の形で書いてあることが多いです。

注意として、ディラック場の場合、クライン・ゴールドン場と違い、相関関数の並びを

$$\langle 0|T(\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_n))|0\rangle = S(x_1, \cdots x_n; y_1 \cdots y_n)$$

と書くとして (ψ と $\bar{\psi}$ を区別して; で区切っています)、場に入れ替えに対して

$$\langle 0|T(\psi(x_2)\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_n))|0\rangle = -S(x_2, x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_n)$$

と、場の位置を一回動かすことで符号が反転します (同時刻でない限り演算子としての場の交換で余計な項は出ない)。

ちなみに、クライン・ゴールドン場、ディラック場と見てきましたが、伝播関数の形というのはラグランジアンの中の項の内、場が二つある演算子の逆となっていることがわかります。違う言い方だと、その運動方程式の演算子の逆です。例えばクライン・ゴールドンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

ですが、表面積分で落ちる項を除いてしまえば

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi$$

となり、伝播関数は $-(\square + m^2)$ の逆です (今の場合 $1/2$ が出ていますが複素場でやれば出てこないのも無視します)。もう少し分かりやすくするために、運動量表示に直せば

$$-(\square + m^2) \rightarrow p^2 - m^2$$

となり、これの逆は明らかに運動量表示の伝播関数 $1/(p^2 - m^2)$ になります。

生成汎関数をクライン・ゴールドン場とは違った方法で変形させましたが、クライン・ゴールドン場と同じ方法でも出来ます。 $\psi(x)$ から $\psi'(x)$ ずらしませんが、 $\psi'(x)$ と $\bar{\psi}'(x)$ は

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi'(x) = -\eta(x)$$

$$\bar{\psi}'(x)(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = \bar{\eta}(x)$$

$$(\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu = \partial_\mu\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu)$$

を満たすようにします。このとき演算子部分を $S^{-1}(x)$ とすれば

$$S^{-1}(x)\psi'(x) = -\eta(x)$$

$$\psi'^{\dagger}(x)(S^{-1}(x))^{\dagger} = -\eta^{\dagger}(x)$$

$$\psi'^{\dagger}(x)\gamma_0\gamma_0(S^{-1}(x))^{\dagger}\gamma_0 = -\bar{\eta}(x)$$

$$-\bar{\psi}'(x)\gamma_0(S^{-1}(x))^{\dagger}\gamma_0 = \bar{\eta}(x)$$

となっていることから、 $\bar{\psi}'(x)$ の演算子部分は $-\gamma_0 S^{-1\dagger}(x)\gamma_0$ となっています。そうすると

$$S^{-1}(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$$

$$-\gamma_0(S^{-1}(x))^{\dagger}\gamma_0 = (i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m)$$

となっていることから、 $\gamma_0 S^{-1\dagger}(x)\gamma_0 = S^{-1}(-x)$ と見なすことができます。このため、 $\psi'(x)$ のグリーン関数 (伝播関数) が

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S(x-y) = \delta^4(x-y)$$

と与えられているなら、スピノールによる行列のエルミート共役は

$$(S(x-y))^{\dagger}(-i\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = \delta^4(y-x)$$

$$-\gamma_0(S(x-y))^{\dagger}\gamma_0(-i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = \gamma_0\delta^4(y-x)\gamma_0$$

$$-\gamma_0 S^{\dagger}(x-y)\gamma_0(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = \delta^4(y-x)$$

$$S(y-x)(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = -\delta^4(y-x)$$

となります。というわけで、 $\psi'(x)$ と $\bar{\psi}'(x)$ は

$$\psi'(x) = -\int d^4y S(x-y)\eta(y)$$

$$\bar{\psi}'(x) = -\int d^4y \bar{\eta}(y)S(y-x)$$

これを使って $\psi(x) + \psi'(x), \bar{\psi}(x) + \bar{\psi}'(x)$ とすることで

$$\begin{aligned}
& \int [D\bar{\psi}D\psi] \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) + \bar{\psi}'(x)) (i\partial - m) (\psi(x) + \psi'(x)) \right] \\
& \quad \times \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) + \bar{\psi}'(x)) \eta(x) + \bar{\eta}(x) (\psi(x) + \psi'(x)) \right] \\
&= \int [D\bar{\psi}D\psi] \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi(x) + \bar{\psi}'(x) (i\partial - m) \psi'(x) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{\psi}'(x) (i\partial - m) \psi(x) + \bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi'(x) \right) \right] \\
& \quad \times \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}'(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi'(x)) \right] \\
&= \int [D\bar{\psi}D\psi] \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi(x) + \bar{\psi}'(x) (i\partial - m) \psi'(x) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \bar{\psi}'(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) \psi(x) + \bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi'(x) \right) \right] \\
& \quad \times \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}'(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi'(x)) \right] \\
&= \int [D\bar{\psi}D\psi] \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi(x) + \int d^4y \bar{\eta}'(y') S(y' - x) (i\partial - m) \int d^4y S(x - y) \eta(y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \psi(x) \int d^4y \bar{\eta}(y) S(y - x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) - \bar{\psi}(x) (i\partial - m) \int d^4y S(x - y) \eta(y) \right) \right] \\
& \quad \times \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) - \int d^4y \bar{\eta}(y) S(y - x) \eta(x) - \bar{\eta}(x) \int d^4y S(x - y) \eta(y)) \right] \\
&= \int [D\bar{\psi}D\psi] \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi(x) + \int d^4y \bar{\eta}'(y') S(y' - x) \int d^4y \delta^4(x - y) \eta(y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \psi(x) \int d^4y \bar{\eta}(y) \delta^4(y - x) - \bar{\psi}(x) \int d^4y \delta^4(x - y) \eta(y) \right) \right] \\
& \quad \times \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) - \int d^4y \bar{\eta}(y) S(y - x) \eta(x) - \bar{\eta}(x) \int d^4y S(x - y) \eta(y)) \right] \\
&= \int [D\bar{\psi}D\psi] \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi(x) + \int d^4y' \bar{\eta}(y') S(y' - x) \eta(x) - \psi(x) \bar{\eta}(x) - \bar{\psi}(x) \eta(x) \right) \right] \\
& \quad \times \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) - \int d^4y \bar{\eta}(y) S(y - x) \eta(x) - \int d^4y \bar{\eta}(x) S(x - y) \eta(y)) \right] \\
&= \int [D\bar{\psi}D\psi] \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) (i\partial - m) \psi(x)) \right] \exp \left[- i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(y) S(y - x) \eta(x) \right]
\end{aligned}$$

$S^{-1}(x - y)$ は (∂ は x の微分)

$$S^{-1}(x - y) = (i\partial - m) \delta^4(x - y)$$

となっており、これは

$$\begin{aligned}
\int d^4 z S^{-1}(x-z) S(z-y) &= \int d^4 z (i\partial - m) \delta^4(x-z) (i\partial + m) \Delta_F(z-y) \\
&= (i\partial - m + i\eta^+) (i\partial + m) \Delta_F(x-y) \\
&= \delta^4(x-y)
\end{aligned}$$

となっているので、上でやったやつの別の地点 x, y に分けて実行した場合です。

・補足

別手順で $\exp[-\alpha^{*T} A \alpha]$ の積分を求めてみます。まず 3 個の場合として

$$\begin{aligned}
&\int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 \exp[-\alpha^{*T} A \alpha] \\
&= \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 \left(1 - \alpha^{*T} A \alpha + \frac{1}{2!} (\alpha^{*T} A \alpha)^2 - \dots\right) \\
&= \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 \left(1 + \alpha_j \alpha_i^* A_{ij} + \frac{1}{2!} (\alpha_j \alpha_i^* A_{ij})^2 + \dots\right)
\end{aligned}$$

このとき積分で 0 にならないのは、 $\alpha_1^*, \alpha_1, \alpha_2^*, \alpha_2, \alpha_3^*, \alpha_3$ を 1 つずつ含んでいる項です。なので、1 つの項に α_i^*, α_i が 6 個あればいいので、3 次の項が 0 にならずに残り

$$\int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 \exp[-\alpha^{*T} A \alpha] = \frac{1}{3!} \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 (\alpha_j \alpha_i^* A_{ij})^3$$

という積分になります。

この積分を実行するために $\alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^*$ の並びになるようにします。3 乗は

$$\frac{1}{3!} (\alpha_j \alpha_i^* A_{ij})^3 = \frac{1}{3!} \alpha_{j_1} \alpha_{i_1}^* A_{i_1 j_1} \alpha_{j_2} \alpha_{i_2}^* A_{i_2 j_2} \alpha_{j_3} \alpha_{i_3}^* A_{i_3 j_3}$$

となります。 $\alpha_i^2 = 0$ であることに注意して j_1, j_2, j_3 をばらすと

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 1} \alpha_2 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 2} \alpha_3 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 3}, \quad \alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 1} \alpha_3 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 3} \alpha_2 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 2} \\
&\alpha_2 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 2} \alpha_1 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 1} \alpha_3 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 3}, \quad \alpha_2 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 2} \alpha_3 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 3} \alpha_1 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 1} \\
&\alpha_3 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 3} \alpha_1 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 1} \alpha_2 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 2}, \quad \alpha_3 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 3} \alpha_2 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 2} \alpha_1 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 1}
\end{aligned}$$

という 6 項の和になります。 $\alpha_j \alpha_i^*$ は通常の数と同じようにグラスマン数と交換するので (2 回反交換するから)、この組 $\alpha_j \alpha_i^*$ で動かせば符号は変わりません。そうすると、これら 6 個は

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 1} \alpha_2 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 2} \alpha_3 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 3} = \alpha_3 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 3} \alpha_2 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 2} \alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 1} \\
&\alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 1} \alpha_3 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 3} \alpha_2 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 2} = \alpha_3 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 3} \alpha_2 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 2} \alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 1}
\end{aligned}$$

というようになり、全部同じになります。よって、6 個のパターンは場合の数から $3! = 6$ として出てくるので

$$\frac{1}{3!} (\alpha_j \alpha_i^* A_{ij})^3 = \frac{1}{3!} 3! \alpha_3 \alpha_{i_3}^* A_{i_3 3} \alpha_2 \alpha_{i_2}^* A_{i_2 2} \alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_1 1} = \alpha_3 \alpha_{i_3}^* \alpha_2 \alpha_{i_2}^* \alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_3 3} A_{i_2 2} A_{i_1 1}$$

右辺を $\alpha_i^{*2} = 0$ に注意してばらすと

$$\begin{aligned}
& \alpha_3 \alpha_{i_3}^* \alpha_2 \alpha_{i_2}^* \alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_3 3} A_{i_2 2} A_{i_1 1} \\
&= \alpha_3 \alpha_1^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_3^* A_{13} A_{22} A_{31} + \alpha_3 \alpha_1^* \alpha_2 \alpha_3^* \alpha_1 \alpha_2^* A_{13} A_{32} A_{21} \\
&\quad + \alpha_3 \alpha_2^* \alpha_2 \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_3^* A_{23} A_{12} A_{31} + \alpha_3 \alpha_2^* \alpha_2 \alpha_3^* \alpha_1 \alpha_1^* A_{23} A_{32} A_{11} \\
&\quad + \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* A_{33} A_{12} A_{21} + \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^* A_{33} A_{22} A_{11} \\
&= -\alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^* A_{13} A_{22} A_{31} + \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^* A_{13} A_{32} A_{21} \\
&\quad + \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^* A_{23} A_{12} A_{31} - \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^* A_{23} A_{32} A_{11} \\
&\quad - \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^* A_{33} A_{12} A_{21} + \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^* A_{33} A_{22} A_{11} \\
&= \epsilon_{i_1 i_2 i_3} A_{i_3 3} A_{i_2 2} A_{i_1 1} \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^*
\end{aligned}$$

というわけで、

$$\begin{aligned}
& \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 \exp[-\alpha^{*T} A \alpha] \\
&= \int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 d\alpha_3^* d\alpha_3 \epsilon_{i_1 i_2 i_3} A_{i_1 1} A_{i_2 2} A_{i_3 3} \alpha_3 \alpha_3^* \alpha_2 \alpha_2^* \alpha_1 \alpha_1^* \\
&= \epsilon_{i_1 i_2 i_3} A_{i_1 1} A_{i_2 2} A_{i_3 3} \\
&= \det A
\end{aligned}$$

最後へはレヴィ・チビタ記号を使った行列式の関係そのものからです。これの N 個への一般化は

$$\begin{aligned}
& \int d\alpha_1^* d\alpha_1 \cdots d\alpha_N^* d\alpha_N \exp[-\alpha^{*T} A \alpha] = \frac{1}{N!} \int d\alpha_1^* d\alpha_1 \cdots d\alpha_N^* d\alpha_N (\alpha_j \alpha_i^* A_{ij})^N \\
& \frac{1}{N!} (\alpha_j \alpha_i^* A_{ij})^N = \frac{1}{N!} \alpha_{j_1} \alpha_{i_1}^* A_{i_1 j_1} \cdots \alpha_{j_N} \alpha_{i_N}^* A_{i_N j_N} = \alpha_N \alpha_{i_N}^* \cdots \alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_N N} \cdots A_{i_1 1} \\
& \alpha_N \alpha_{i_N}^* \cdots \alpha_1 \alpha_{i_1}^* A_{i_N N} \cdots A_{i_1 1} = \epsilon_{i_1 \dots i_N} A_{i_1 1} \cdots A_{i_N N} \alpha_N \alpha_N^* \cdots \alpha_1 \alpha_1^* = \alpha_N \alpha_N^* \cdots \alpha_1 \alpha_1^* \det A
\end{aligned}$$

となることを使えばそのまま

$$\int d\alpha_1^* d\alpha_1 d\alpha_2^* d\alpha_2 \cdots d\alpha_N^* d\alpha_N \exp[-\alpha_i^* A_{ij} \alpha_j] = \det A \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

となります。