

経路積分～電磁場～

電磁場の伝播関数を経路積分の方法によって導きます。まずは、ゲージ場として一般的な形からはじめ、使える式に辿り着いてから電磁場の形にします。なので、ここに出てきたものはそのまま非可換ゲージ場にも使えます。この話を簡単化したものを「補足：ゲージ場の話を簡単にした例」でしているので、そっちを先に見るといいかもしれません。

ゲージ場 (局所的な対称性を持っている場合) はスカラー場とかと違い素直でないために生成汎関数を作ったとたんに問題が起こり、いろいろと面倒なことをしなければいけないので、最初にそれについて簡単に見ておきます。まず電磁場での生成汎関数は、物質がないとして

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) \right]$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{D}A_\mu = \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}A_1 \mathcal{D}A_2 \mathcal{D}A_3$$

これらのうちの源 J を除いた

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A]}$$

について積分を実行してみると

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L} &= - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k d^4k'}{(2\pi)^8} e^{-ikx} \tilde{A}_\mu(k) (\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) e^{-ik'x} \tilde{A}_\nu(k') \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k d^4k'}{(2\pi)^8} e^{-i(k+k')x} \tilde{A}_\mu(k) (-k'^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(k') \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k) \end{aligned}$$

$\tilde{A}_\mu$ が $\tilde{A}_\mu = a(k)k_\mu$ のようになっていれば

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} a(k)k_\mu (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) a(-k)k_\nu \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} a(k) (-k^\nu k^2 k_\nu + k_\mu k^\mu k^\nu k_\nu) a(-k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となります。なので、

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right] = \int \mathcal{D}A_\mu$$

となり、これは発散します。この影響はそのまま相関関数にも及ぶために、相関関数を定義することができません。この発散が起きるのは、局所的ゲージ変換

$$A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$$

に対して、 $\mathcal{L}$ と積分測度が不変であることが原因です。ゲージ変換によって繋がっている場の配置は同じ物理的状態なので、積分しようとすると同じ場の配置を無限に足し上げてしまうためです。例えば、ある中間地点の配置として A'_μ がいたとして、こいつはゲージ変換によって違う配置なのに同じ物理的状態になっているものがいるはず。そうすると A'_μ から A''_μ に移ったとしてもゲージ変換によって A'_μ と A''_μ が繋がっていたらこいつらは物理的に同じ配置になります。つまり、ゲージ自由度のせいで物理的に同じ配置が無限回出現し、それを足し上げるために発散が生じます。これは $A_\mu = 0 \rightarrow A_\mu = 0 + \partial_\mu \Lambda$ として上の計算をみると、ラグランジアン密度はゲージ不変のため変化しませんが、余計な積分として $\partial_\mu \Lambda$ が生き残ってくることからもわかると思います。また、 q から q_1 を経由して q' に行くとき、この q_1 での中間状態 $|q_1\rangle$ の取りえる全ての状態に対して和 ($q \rightarrow q_1 \rightarrow q'$ のあらゆる経路の和) をとったものがファインマン核であることを、今の場合に当てはめれば A'_μ での可能な中間状態 $|A'_\mu\rangle$ の和をとるということになります。そのとき、ゲージ変換によって経由する中間状態 $|A'_\mu\rangle$ は、 $A'_\mu + \partial_\mu \Lambda$ での状態 $|A'_\mu + \partial_\mu \Lambda\rangle$ のような物理的に同じ配置と状態が無限個存在することになります。つまり通常なら 1 個しかない状態が無限に重複しますので、その足し合わせによって発散が起きます。というわけで、このゲージ変換による自由度によって発散がおきているのでこいつをどうにかしないといけないというのがゲージ場での問題です。それを解決するには

$$\int \mathcal{D}A \rightarrow \int \mathcal{D}A' \int \mathcal{D}\Lambda$$

のように、ゲージ変換による部分を切り離してしまい、 $\int \mathcal{D}\Lambda$ を落としてしまえばいいという発想を使います。この発想のもと話を進めていきます。まずは、電磁場と置かず一般的なゲージ場で考えていきます。ゲージ変換は、一般的に

$$A_\mu^U = U A_\mu U^\dagger - i(\partial_\mu U)U^\dagger \quad (U = e^{i\Lambda^a(x)T^a})$$

無限小変換では (結合定数は無視しています)、

$$A_\mu^{a'} = A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b \Lambda^c + \partial_\mu \Lambda^a$$

ローマ文字の添え字は「ヤン・ミルズ理論」で導入したように何かしらの内部自由度です。可換ゲージ場なら、ローマ文字の添え字は落として

$$A_\mu^\Lambda = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

です (電磁場に限定しないので第二項の符号をプラスにしています)。そして、ゲージ条件を汎関数 F^a を使って

$$F^a[A_\mu] = 0$$

このように表すことにします。 F^a が何かしらのゲージ条件を表す関数で、電磁場でのローレンツゲージなら

$$F[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu = 0$$

これを使って

$$\Delta_{FP}^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu^U]]$$

$$\delta[F^a[A_\mu^U]] = \prod_{x^\mu, a} \delta(F^a[A_\mu^U(x^\mu)])$$

とかいうものを考えます（上の式を Faddeev-Popov の行列式と言います。行列式と呼ぶ理由は下を見ていけばわかります）。見て分かるように $\delta[F[A]]$ は時空の各点の $\delta(F[A])$ の積です。この式をゲージ変換してみると

$$\Delta_{FP}^{-1}[A_\mu^{U'}] = \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu^{U'U}]] = \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu^{U''}]]$$

$$U'' = U'U$$

で、 $\mathcal{D}U$ 部分というのは変換に対して不変であることがわかっているので $\mathcal{D}U = \mathcal{D}U''$ です。なので

$$\Delta_{FP}^{-1}[A_\mu^{U'}] = \int \mathcal{D}U'' \delta[F^a[A_\mu^{U''}]]$$

よって、 Δ_{FP}^{-1} はゲージ不変であることがわかります。元の式に戻って変形させれば

$$1 = \Delta_{FP}[A_\mu^{U'}] \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu^U]] \quad (1)$$

このように 1 と等しいので、これを Z にいれこんで

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu^U]] e^{iS[A]}$$

$\mathcal{D}U$ が不変であったのと同じように $\mathcal{D}A_\mu$ も不変、作用 $S[A]$ も不変、 $\Delta[A_\mu]$ も不変であることから、全てに添え字 U がついた形にしても等式は成り立つので、結局 A_μ^U を A_μ にして

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu]] e^{iS[A]}$$

そうすると、 U の積分は完全に独立になるので、前に出して

$$Z = \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] \delta[F^a[A_\mu]] e^{iS[A]}$$

これで、ゲージ変換による部分を切り離せることができ、単純に無限大の定数とすることができます。そうすると、相関関数を出すための式では

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu A_\mu \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) \right]}{\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]}$$

分母と分子で打ち消しあって発散はなくなります（ここから $\mathcal{D}U$ 積分は除いて書くことにします）。また、 $\Delta_{FP}[A_\mu]$ は

$$\Delta_{FP}[A_\mu] = \left| \det \frac{\delta F[A_\mu^U]}{\delta \Lambda} \right|_{F=0} = \det M$$

とすることができます（右辺の A_μ^U は A_μ でも成り立つ）。これは極端な話、(1) を簡易化した式

$$\Delta^{-1} = \int dx \delta(f(x)) = \int df \delta(f) \left| \det \frac{dx}{df} \right| = \left| \det \frac{dx}{df} \right|_{f=0}$$

の複雑版だと思えばいいです。|| は絶対値です。これを使うことで

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \left| \det \frac{\delta F[A_\mu^U]}{\delta \Lambda} \right|_{F=0} \delta[F^a[A_\mu]] e^{iS[A]}$$

となります。そして、グラスマン数での積分による関係

$$\begin{aligned} \det A &= \int d\bar{\eta} d\eta \exp[-\bar{\eta} A \eta] \\ \Rightarrow \det A &= \left(\prod_i \int d\bar{\eta}_i d\eta_i \right) \exp[-\bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j] \end{aligned} \quad (2)$$

から、無関係な定数は無視することで

$$\det M = \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left[-i \int d^4x \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b \right]$$

と書けます。(2) のローマ文字は η_i の区別ですが、このローマ文字の添え字は A_μ が持っている自由度による何かしらの行列成分という意味です。ここで細かい注意を一つしておきます。 $\Delta_{FP}[A_\mu]$ には行列式が正になっているという縛りがあることから、 M にはその縛りがかかってきます。ミンコフスキー空間で行う限り絶対に正になるという保障はありません。なので、ユークリッド空間に一度移してから行列式を評価してミンコフスキー空間に戻すというのが安全な方法です。これは後で具体的に計算するときを示すことにして、とりあえず $\det M$ はこのように書けるとして先に進みます。

これで、発散の問題については終わりにして、もう一つの問題を解決させます。何が問題なのかは最後に示すとして、ここでは解決手段を先に与えて計算を続けていきます。まずデルタ関数部分を変形します。デルタ関数内を、通常のローレンツゲージ $\partial^\mu A_\mu^a$ から

$$F^a[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu^a - C^a(x)$$

と書き換えても問題ないので、このような任意関数 $C^a(x)$ がくつついたものを考えます。そうすると

$$\delta[F^a[A_\mu]] \Rightarrow \prod_x \delta(F^a[A_\mu] - C^a)$$

つまり、デルタ関数内は

$$F^a[A_\mu] = C^a(x)$$

という制限を表わすことになり、例えば $F^a[A_\mu] = \partial_\mu A^\mu$, $C^a = 0$ でローレンツ条件になります。そして、これは

$$\prod_x \delta(F^a[A_\mu] - C^a) = \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x B(x) (F^a[A_\mu] - C^a) \right]$$

となっているので

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \int \mathcal{D}B \left[i \int d^4x B(x) (F^a[A_\mu] - C^a) \right]$$

ここで積分上の操作をして任意関数 C^a を消すことを考えます。 C^a は任意なので、 $\exp$ 内の C^a に関する式はある程度自由に変更することができます。これを利用して C^a に関する積分が定数になるようにします (もっと感覚的に言えば、 Z は C^a を変数に持たないので、 C^a で積分しても定数しか動かないはずということです)。うまくいって定数になって欲しいのでガウス積分の形

$$\int \mathcal{D}C^a \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2\alpha} (C^a(x))^2 \right) \right] = \text{定数} = a$$

を使います (この重みをつけて C^a で平均化するとされたりします)。 $\exp$ 内の $-(C^a(x))^2$ には任意の定数が付けられるので α をくっつけています。これを Z に加えると、 $\exp$ 内に $B(x)C^a + (C^a)^2/2\alpha$ として入ってきますが、 C^a は任意だということを踏まえれば $B(x)C^a$ も積分に取り込んででも式の結果に影響を与えないだろうと考えられます。また、他の言い回しとしては、 Z は C^a を変数に持たないので、 C^a で積分しても定数しか動かないはずだから、 $\exp[-i(C^a)^2/2\alpha]$ の重みを付けて平均化すると表現するときもあります。 Z に入れて (入れても式が変わらないように定数 a で割る)、 C^a と B による積分を実行すれば

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{a} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \int \mathcal{D}B \int \mathcal{D}C^a \exp \left[i \int d^4x \left(B(x)(F^a[A_\mu] - C^a(x)) - \frac{1}{2\alpha} (C^a(x))^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \int \mathcal{D}B \int \mathcal{D}C^a \exp \left[i \int d^4x \left(BF^a + \frac{\alpha}{2} B^2 - \frac{1}{2\alpha} (C^a + \alpha B)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(BF^a + \frac{\alpha}{2} B^2 \right) \right] \int \mathcal{D}C^a \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2\alpha} (C^a + \alpha B)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(BF^a + \frac{\alpha}{2} B^2 \right) \right] \int \mathcal{D}C'^a \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2\alpha} (C'^a)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(BF^a + \frac{\alpha}{2} B^2 \right) \right] \times a \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(BF^a + \frac{\alpha}{2} B^2 \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{\alpha}{2} \left(B + \frac{1}{\alpha} F^a \right)^2 - \frac{1}{2\alpha} (F^a)^2 \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2\alpha} (F^a)^2 \right) \right] \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{\alpha}{2} \left(B + \frac{1}{\alpha} F^a \right)^2 \right) \right] \\ &= b \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{iS[A]} \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2\alpha} (F^a)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

となります。定数 b は相関関数を出すときには分母によって消えるので除いておきます。場 B を何も考えずに積分を実行して消しましたが、この B には名前がついていて、中西-Lautrup 場、もしくは補助場 (auxiliary field) と呼ばれるものです。

最後に $\Delta_{FP}[A_\mu]$ の形も代入して

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (F^a[A_\mu])^2 - \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b \right) \right] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{eff} \right]$$

よってラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (F^a)^2 - \bar{\eta}^i M_{ij} \eta^j = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$$

この $\mathcal{L}_{GF}$ がゲージ固定項で、 $\mathcal{L}_{FP}$ が Faddeev-Popov のゴースト項 (ghost term) と呼ばれるものです。ここで出てきたゲージ固定項が前に言ったもう一つの問題で、これが導入されることで解決されます。また、 $\mathcal{L}_{FP}$ がゴースト項と呼ばれる理由は、 $\eta, \bar{\eta}$ (ゴースト場、反ゴースト場) はフェルミオン場として導入されたはずなのにボソン場のラグランジアン密度を作っているためです (細かいことはここでは触れません)。源を含めた生成汎関数に

はゲージ場、ゴースト場、反ゴースト場の源の項、 $A_\mu J^\mu + \bar{\eta}\xi + \bar{\xi}\eta$ がくっつきます (ゴースト場はグラスマン数なのでフェルミオン場と同じように入ってきます)。
また、非可換ゲージ場を考える時には補助場 B を消す前の段階のラグランジアン

$$\mathcal{L}'_{eff} = \mathcal{L} + BF^a + \frac{\alpha}{2}B^2 - \bar{\eta}^i M_{ij} \eta^j$$

というのも大事になっています。

というわけで、実際に電磁場のラグランジアンを使って伝播関数をだしてみます。ゲージはローレンツゲージを使います。 $F[A_\mu]$ に関係する部分は

$$F[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu, \quad F[A_\mu^U] = \partial^\mu (A_\mu - \partial_\mu \Lambda), \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda \quad (\text{無限小変換})$$

このようになります。 M を求めるんですが、上で触れたように行列式 $\det M$ は正になっているという制限がかかります。なので、 $\bar{\eta} M \eta$ の項はまだ $\det M$ になっているとします。 M は

$$M = \frac{\delta F[A_\mu^U]}{\delta \Lambda} = \frac{\delta \partial^\mu (A_\mu - \partial_\mu \Lambda)}{\delta \Lambda} = -\square$$

このようにして求められますが、これの行列式 $\det M = \det(-\square)$ は正の値なのか分かりません。なので、 $\square$ をユークリッド空間に接続して

$$\det M = \det(\square_E)$$

とします (これが負にならない理由は「有効作用と有効ポテンシャル」のところで簡単に説明しています)。そうすると (2) から、 Z は

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right) - \int d^4x_E \bar{\eta} \square_E \eta \right] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 \right) + i \int d^4x \bar{\eta} (-\square) \eta \right] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \bar{\eta} \square \eta \right) \right] \end{aligned}$$

となるので

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \bar{\eta} \square \eta \right) \right]$$

最後の $\bar{\eta} \square \eta$ の項の積分は分離できるために、ただの定数を返してくるので無視します (見てわかるように $\bar{\eta} \square \eta$ はボソンのラグランジアン密度になっており、自由場の方程式を満たします)。よって、電磁場のラグランジアン密度としては

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

第二項がゲージ固定によるもので、ゲージ条件 (今の場合はローレンツゲージ) によってこれは 0 になることから、ラグランジアン密度の形は変えません。伝播関数を求めるだけなら、わざわざ生成汎関数を微分しないでも運動方程式さえ出してしまえばできるので、そうやって導出します (生成汎関数の変形は下で行っておきます)。運動方程式は、第一項は明らかにマクスウェル方程式になるので、第二項をオイラー・ラグランジュ方程式に入れて計算してみると

$$(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)A^\mu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu A^\mu = 0$$

これを变形させて

$$\left(g_{\mu\nu}\square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)A^\mu = 0$$

伝播関数はこれの演算子部分を逆にしたのになります。運動量表示にして

$$-g_{\mu\nu}k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu$$

伝播関数をローレンツ共変な形 $D_{\mu\nu}(k) = Ak^2g_{\mu\nu} + Bk_\mu k_\nu$ になるように求めます。

$$\left(-g_{\mu\nu}k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right)D^{\nu\lambda}(k) = \delta_\mu^\lambda$$

より

$$\begin{aligned} & \left(-g_{\mu\nu}k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right)(Ak^2g^{\nu\lambda} + Bk^\nu k^\lambda) \\ &= -Ag_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}k^4 - Bg_{\mu\nu}k^2k^\nu k^\lambda + Ag^{\nu\lambda}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu k^2 + B\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k^\nu k^\lambda k_\mu k_\nu \\ &= -A\delta_\mu^\lambda k^4 - Bg_{\mu\nu}k^2k^\nu k^\lambda + Ag^{\nu\lambda}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu k^2 + B\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k^\nu k^\lambda k_\mu k_\nu \\ &= \delta_\mu^\lambda \end{aligned}$$

なので A はすぐに

$$A = -\frac{1}{k^4}$$

B は

$$\begin{aligned} & -Bg_{\mu\nu}k^2k^\nu k^\lambda + Ag^{\nu\lambda}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu k^2 + B\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k^\nu k^\lambda k_\mu k_\nu \\ &= -Bk^2k_\mu k^\lambda + A\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k^\lambda k^2 + B\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k^\nu k^\lambda k_\mu k_\nu \\ &= \left[\left(-k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)k^2\right)B - \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right]k_\mu k^\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{-k^2 + (1 - \frac{1}{\alpha})k^2} \\
&= \frac{(1 - \frac{1}{\alpha})}{k^2} \frac{1}{-k^2 + (1 - \frac{1}{\alpha})k^2} \\
&= \frac{(1 - \frac{1}{\alpha})}{k^4} \frac{1}{-\frac{1}{\alpha}} \\
&= -\frac{\alpha - 1}{k^4}
\end{aligned}$$

というわけで伝播関数は

$$-\frac{1}{k^2} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

これに i をかけたもので定義しているので

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

$\alpha = 1$ のときはファインマンゲージ、 $\alpha = 0$ のときはランダウゲージと呼ばれます。極をよけさせるために $i\epsilon$ をつけるには生成汎関数内に $i\epsilon A^2$ をつければよいです。そうすると演算子部分に $-ig_{\mu\nu}\epsilon$ が入ることになるので

$$(-g_{\mu\nu}k^2 + (1 - \frac{1}{\alpha})k_\mu k_\nu - ig_{\mu\nu}\epsilon)D^{\nu\lambda}(k) = \delta_\mu^\lambda$$

となります。これを同じように計算すれば

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)$$

$i\alpha\epsilon$ は $\alpha = 0$ で消えそうですが、 α はラグランジアン上では $1/\alpha$ のように入ってきているために、 $\alpha = 0$ というより $\alpha \rightarrow 0$ の極限を取ると言えるので、 $i\alpha\epsilon$ を消さずに $i\epsilon$ と書き換えることにして (α を入れるときの積分をガウス積分にするなら $\alpha \geq 0$ の制限がかかる)

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right)$$

伝播関数を出すときに、ゲージ固定項がなかったらどうなるのか見ておくと

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

ラグランジアン密度がこうなっているので、運動方程式は

$$(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)A^\mu = 0$$

マクスウエル方程式です。これの逆、つまり伝播関数 (グリーン関数) を $D_{\mu\nu}$ とすれば

$$(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^4(x-y)\delta_\mu^\lambda$$

こんな関係になるはずですが。そして問題なのがこれを満たす $D_{\mu\nu}$ が存在しないことです。これに ∂^μ を作用させると

$$(\partial_\nu \square - \square \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

で、微分の順序は変えて問題ないので

$$(0 \cdot \partial_\nu) D^{\nu\lambda}(x-y) = \partial^\lambda \delta^4(x-y)$$

そうすると $D^{\nu\lambda}$ の逆が 0 になるために、 $D^{\nu\lambda}$ は定義できません。これは電磁場のもつゲージ自由度が原因になっていて、ゲージ自由度を失くすことで伝播関数を定義できます。そのための項がゲージ固定項です。

ゲージ場の経路積分におけるゲージの問題をまとめておきます。

まず、経路積分を行おうとすると、ゲージ自由度のせいで発散が起きるというのが根本問題です。これは、上手いこと自由度を分離することで打ち消すことが出来ます。で、それに伴ってゲージ条件の関数が導入されます。

そして、もう一つの問題は経路積分だから起きるという問題でなく、ラグランジアン of 段階 (ゲージ場の量子化) で起きる問題として、伝播関数の逆が定義できないというものです。これに対してはゲージ固定項を導入し、ゲージ自由度を潰すことで解決されます。しかし、固定といっているようにゲージ自由度を自由なものとしていません。実際に、ラグランジアンはゲージ固定項 (ゴースト項も) によってゲージ不変性が壊されます。それを受けて、生成汎関数、有効作用 (「自己エネルギーと頂点関数」で出てきます) もゲージ不変ではなくなります。そのために、ゲージ場の計算においては明確にゲージ不変性であることが分からないので、常にゲージ依存性の問題というのがあっちこっちで出てきます。例えば、伝播関数はゲージ不変なのかどうかがあからさまにはつきりしません (伝播関数と関係する生成汎関数がゲージ不変になっていないことから予想できると思います)。しかし、散乱過程の計算において、QED の場合はカレントとゲージ固定項がくっついて現われ、それは 0 になるので、ほとんど気にする必要はないです。気にするのはよっぽど重要な物理量の計算をしたときに、ゲージに明らかに依存しているときぐらいです。

電磁場における伝播関数の重要な性質は、ワード・高橋恒等式でのゲージ固定項があろうがなかろうが成立する、頂点とフェルミオンの伝播関数による関係式です。

最後に、生成汎関数の変形だけは行っておきます。exp 内だけを取り出して

$$i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu \right)$$

スカラー場のときのように、 $A_\mu(x)$ を $A_\mu(x) + A'_\mu(x)$ と変数変換します (この変数変換に対して積分測度 $\mathcal{D}A$ は変化しない)。そうすると $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &\Rightarrow (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^{\nu'} - \partial^\nu A^{\mu'}) \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^{\nu'} - \partial^\nu A^{\mu'}) \\ &\quad + (\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + (\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu)(\partial^\mu A^{\nu'} - \partial^\nu A^{\mu'}) \\ &= F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^{\nu'} - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^{\mu'} - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^{\nu'} + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^{\mu'} \\ &\quad + \partial_\mu A'_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A'_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A'_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A'_\mu \partial^\nu A^\mu \\ &\quad + \partial_\mu A'_\nu \partial^\mu A^{\nu'} - \partial_\mu A'_\nu \partial^\nu A^{\mu'} - \partial_\nu A'_\mu \partial^\mu A^{\nu'} + \partial_\nu A'_\mu \partial^\nu A^{\mu'} \\ &= F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^{\nu'} - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^{\mu'} + 2\partial_\mu A'_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A'_\nu \partial^\nu A^\mu \\ &\quad + 2\partial_\mu A'_\nu \partial^\mu A^{\nu'} - 2\partial_\mu A'_\nu \partial^\nu A^{\mu'} \end{aligned}$$

同様にして $(\partial^\mu A_\mu)^2$ は

$$\begin{aligned}
(\partial^\mu A_\mu)^2 &\Rightarrow (\partial^\mu (A_\mu(x) + A'_\mu(x)))^2 = (\partial^\mu A_\mu(x) + \partial^\mu A'_\mu(x))^2 \\
&= (\partial^\mu A_\mu(x))^2 + 2\partial^\mu A_\mu(x)\partial^\nu A'_\nu(x) + (\partial^\mu A'_\mu(x))^2
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
&i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu \right) \\
&= i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^{\nu'} - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^{\mu'}) \right. \\
&\quad + 2\partial_\mu A'_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A'_\nu \partial^\nu A^\mu + 2\partial_\mu A'_\nu \partial^\mu A^{\nu'} - 2\partial_\mu A'_\nu \partial^\nu A^{\mu'}) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} ((\partial^\mu A_\mu(x))^2 + 2\partial^\mu A_\mu(x)\partial^\nu A'_\nu(x) + (\partial^\mu A'_\mu(x))^2) \\
&\quad \left. + J^\mu (A_\mu(x) + A'_\mu(x)) \right\}
\end{aligned}$$

で、 $A'_\mu(x)$ が方程式

$$\left(g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A^{\mu'} = J^\mu$$

を満たすとすれば

$$A'_\mu = - \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y)$$

$$D_{\mu\nu}(x-y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{-ik(x-y)}$$

$$\left(g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^4(x-y) \delta^\lambda_\mu$$

これを代入して

$$\begin{aligned}
&i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2\partial_\mu A_\nu \int d^4y \partial^\mu D^{\nu\rho}(x-y) J_\rho(y) + 2\partial_\mu A_\nu \int d^4y \partial^\nu D^{\mu\rho}(x-y) J_\rho(y) \right. \\
&\quad - 2 \int d^4y \partial_\mu D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \partial^\mu A^\nu + 2 \int d^4y \partial_\mu D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \partial^\nu A^\mu \\
&\quad + 2 \int d^4y \partial_\mu D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \int d^4y' \partial^\mu D^{\nu\sigma}(x-y') J_\sigma(y') \\
&\quad \left. - 2 \int d^4y \partial_\mu D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \int d^4y' \partial^\nu D^{\mu\sigma}(x-y') J_\sigma(y') \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} \left((\partial^\mu A_\mu)^2 - 2\partial^\mu A_\mu \partial^\nu \int d^4y D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) + \left(\int d^4y \partial^\mu D_{\mu\rho}(x-y) J^\rho(y) \right)^2 \right) \\
&\quad \left. + J^\mu \left(A_\mu - \int d^4y D_{\mu\rho}(x-y) J^\rho(y) \right) \right\}
\end{aligned}$$

添え字をそろえることで 1 行目と 2 行目は一緒にすることができるので

$$\begin{aligned}
&= i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4\partial_\mu A_\nu \int d^4y \partial^\mu D^{\nu\rho}(x-y) J_\rho(y) \right. \right. \\
&\quad + 4\partial_\mu A_\nu \int d^4y \partial^\nu D^{\mu\rho}(x-y) J_\rho(y) + 2 \int d^4y \partial_\mu D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \int d^4y' \partial^\mu D^{\nu\sigma}(x-y') J_\sigma(y') \\
&\quad - 2 \int d^4y \partial_\mu D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \int d^4y' \partial^\nu D^{\mu\sigma}(x-y') J_\sigma(y') \Big) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} \left((\partial^\mu A_\mu)^2 - 2\partial^\mu A_\mu \int d^4y \partial^\nu D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \right. \\
&\quad \left. + \int d^4y' \int d^4y \partial^\mu D_{\mu\rho}(x-y) \partial^\nu D_{\nu\sigma}(x-y') J^\rho(y) J^\sigma(y') \right) \\
&\quad \left. + J^\mu \left(A_\mu - \int d^4y D_{\mu\rho}(x-y) J^\rho(y) \right) \right\}
\end{aligned}$$

次に例えば

$$\begin{aligned}
4\partial_\mu A_\nu \int d^4y \partial^\mu D^{\nu\rho}(x-y) J_\rho(y) &= 4\partial_\mu \left(A_\nu \int d^4y \partial^\mu D^{\nu\rho}(x-y) J_\rho(y) \right) - 4A_\nu \int d^4y \square D^{\nu\rho}(x-y) J_\rho(y) \\
&\Rightarrow -4A_\nu \int d^4y \square D^{\nu\rho}(x-y) J_\rho(y)
\end{aligned}$$

のように全微分を作って表面積分を落とすことでさらに変形させれば

$$\begin{aligned}
&= i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 4A_\nu \int d^4y \square D^{\nu\rho}(x-y) J_\rho(y) \right. \right. \\
&\quad - 4A_\nu \int d^4y \partial_\mu \partial^\nu D^{\mu\rho}(x-y) J_\rho(y) - 2 \int d^4y D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \int d^4y' \square D^{\nu\sigma}(x-y') J_\sigma(y') \\
&\quad + 2 \int d^4y D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \int d^4y' \partial_\mu \partial^\nu D^{\mu\sigma}(x-y') J_\sigma(y') \Big) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} \left((\partial^\mu A_\mu(x))^2 + 2A_\mu(x) \int d^4y \partial^\mu \partial^\nu D_{\nu\rho}(x-y) J^\rho(y) \right. \\
&\quad \left. - \int d^4y' \int d^4y D_{\mu\rho}(x-y) \partial^\mu \partial^\nu D_{\nu\sigma}(x-y') J^\rho(y) J^\sigma(y') \right) \\
&\quad \left. + J^\mu \left(A_\mu(x) - \int d^4y D_{\mu\rho}(x-y) J^\rho(y) \right) \right\} \\
&= i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\nu \int d^4y \left(\square D^{\nu\rho}(x-y) J_\rho(y) - \partial_\mu \partial^\nu D^{\mu\rho}(x-y) J_\rho(y) + \frac{1}{\alpha} \partial^\nu \partial^\mu D_{\mu\rho}(x-y) J^\rho(y) \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4y \int d^4y' \left(D_{\nu\rho}(x-y) (\square D^{\nu\sigma}(x-y') - \partial_\mu \partial^\nu D^{\mu\sigma}(x-y') + \frac{1}{\alpha} \partial^\nu \partial^\mu D_\mu^\sigma(x-y')) J^\rho(y) J_\sigma(y') \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu - \int d^4y J^\mu(x) D_{\mu\rho}(x-y) J^\rho(y) \right\}
\end{aligned}$$

1 行目の A_ν の項は

$$\begin{aligned}
& A_\nu(\Box D^{\nu\rho}(x-y)J_\rho(y) - \partial_\mu\partial^\nu D^{\mu\rho}(x-y)J_\rho(y) + \frac{1}{\alpha}\partial^\nu\partial^\mu D_{\mu\rho}(x-y)J^\rho(y)) \\
& = A_\nu(\Box D^{\nu\rho}(x-y) - \partial_\mu\partial^\nu D^{\mu\rho}(x-y) + \frac{1}{\alpha}\partial^\nu\partial_\mu D^{\mu\rho}(x-y))J_\rho(y)
\end{aligned}$$

これは $D_{\mu\nu}$ が満たす方程式に変形することができて

$$A_\nu(g_\mu{}^\nu\Box + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\partial_\mu\partial^\nu)g^{\mu\nu}D_\nu{}^\rho J_\rho(y) = g^{\mu\nu}\delta^4(x-y)\delta^{\mu\rho}$$

同様に 2 行目もそうなので

$$\begin{aligned}
& i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\nu \int d^4y \delta^4(x-y)g^{\rho\nu}J_\rho(y) \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \int d^4y \int d^4y' D_{\nu\rho}(x-y)g^{\sigma\nu}\delta^4(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y') \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu - \int d^4y J^\mu(x)D_{\mu\rho}(x-y)J^\rho(y) \right\} \\
& = i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu - A^\rho J_\rho \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \int d^4y D_{\nu\rho}(x-y)J^\rho(y)J^\nu(x) - \int d^4y J^\mu(x)D_{\mu\rho}(x-y)J^\rho(y) \right\} \\
& = i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} \int d^4y J^\nu(x)D_{\nu\rho}(x-y)J^\rho(y) \right\}
\end{aligned}$$

これの前二項に対してが積分 $\mathcal{D}A_\mu$ に引っかかるので規格化定数に押し込めてしまうことにします。そうすることで最終的に

$$Z_0 = N \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y (J^\nu(x)D_{\nu\rho}(x-y)J^\rho(y)) \right]$$

生成汎関数はこのように変形させられます。