

経路積分

量子力学での結果を利用して場の理論での経路積分を構成します。おそらく混乱は起きないと思うので演算子と c 数を区別せずに書いています。
実数スカラー場としています。

ラグランジアンとハミルトニアンはそれぞれ密度を使うので

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H}$$

そして、変数は q, p の代わりに $\phi(x), \pi(x)$ を使い ($\pi = \dot{\phi}$, $\dot{\phi} = \partial_0 \phi$)、同時刻での正準交換関係

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

を満たさせます。場の演算子 $\phi(\mathbf{x})$ の固有状態を $|\phi(\mathbf{x})\rangle$ とすれば

$$\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{x})\rangle = \phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{x})\rangle$$

演算子の時間発展はハミルトニアン演算子 H によって

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}$$

なので

$$\begin{aligned} e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x})\rangle &= e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x})\rangle \\ e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} e^{iHt} |\phi(\mathbf{x})\rangle &= e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x})\rangle \\ \phi(\mathbf{x}, t) e^{iHt} |\phi(\mathbf{x})\rangle &= \phi(\mathbf{x}) e^{iHt} |\phi(\mathbf{x})\rangle \end{aligned}$$

右辺の $\phi(\mathbf{x})$ は演算子じゃないので e^{iHt} と交換できます。よって固有状態 $|\phi(\mathbf{x})\rangle$ の時間依存性を

$$e^{iHt} |\phi(\mathbf{x})\rangle = |\phi(\mathbf{x}), t\rangle$$

と定義し

$$\phi(\mathbf{x}, t) |\phi(\mathbf{x}), t\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x}), t\rangle$$

ハイゼンベルグ描像の演算子 $\phi(\mathbf{x}, t)$ の固有状態になっているとします。 $|\phi(\mathbf{x}), t\rangle$ はいわゆるヒルベルト空間での動く基底 (moving basis) です。これは通常のハイゼンベルグ描像での作用の仕方とは異なっていることに注意してください。この $\phi(\mathbf{x}, t)$ の作用の仕方を見れば、ハイゼンベルグ描像での演算子が時間 t に瞬間的に現れた固有状態 $|\phi(\mathbf{x}), t\rangle$ に作用していると解釈できます。なので、 $|\phi(\mathbf{x}), t\rangle$ の時間依存性はシュレーディンガー描像的でなく、このように捉えるべきで、本質的な依存性は $\phi(\mathbf{x})$ が持っています。

$|\phi(\mathbf{x})\rangle$ の完全性は

$$\int \prod_{\mathbf{x}} d\phi(\mathbf{x}, t) |\phi(\mathbf{x})\rangle \langle \phi(\mathbf{x})| = 1$$

x の位置を離散化して i で区別するなら

$$\int d\phi(\mathbf{x}_i, t) |\phi(\mathbf{x}_i)\rangle \langle \phi(\mathbf{x}_i)| = 1$$

と書けます。

共役量 $\pi(\mathbf{x})$ の固有状態 $|\pi(\mathbf{x})\rangle$ も同様で

$$\pi(\mathbf{x}) |\pi(\mathbf{x})\rangle = \pi(\mathbf{x}) |\pi(\mathbf{x})\rangle$$

左辺の $\pi(\mathbf{x})$ は演算子で右辺は c 数です。この完全性は

$$\frac{\Delta V}{2\pi} \int d\pi(\mathbf{x}, t) |\pi(\mathbf{x})\rangle \langle \pi(\mathbf{x})| = 1$$

ΔV は分割された 3 次元空間の微小体積です。微小体積はハミルトニアンをハミルトニアン密度に離散的に変えるときに

$$H(\phi(\mathbf{x}_1), \dots, \phi(\mathbf{x}_n); \pi(\mathbf{x}_1), \dots, \pi(\mathbf{x}_n)) = \Delta V \sum_{i=1}^n \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}_i), \pi(\mathbf{x}_i))$$

として出てきます。これは後で触れています。

場の演算子としての $\phi(\mathbf{x}, t=0)$ の時間発展

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt}$$

そして、 $\phi(\mathbf{x})$ の固有状態 $|\phi(\mathbf{x}), t=0\rangle$ の時間依存性

$$|\phi(\mathbf{x}), t\rangle = e^{iHt} |\phi(\mathbf{x}), 0\rangle$$

を踏まえることで、 $|\phi, t\rangle$ から $|\phi', t'\rangle$ への遷移振幅に対しては $(\phi(\mathbf{x}))$ を単に ϕ と書いていきます)

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle = \langle \phi' | \exp[-iH(t' - t)] | \phi \rangle$$

ここまでくれば、量子力学での経路積分の式をどうすればいいか予想できて

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\pi, \phi)) \right]$$

ϕ_f と ϕ_i は $\phi_i(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t_i)$, $\phi_f(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t_f)$ です。これは場に対する境界条件を表わし、 $\phi(\mathbf{x})$ の初期値と最後の値を与えます (時間の初期値と最後の値は t_i, t_f)。 $\mathcal{H}(\pi, \phi)$ と π と ϕ に依存するように書いていますが、 $\partial_i \pi, \partial_i \phi$ ($i = 1, 2, 3$) にも依存するようにすれば、ラグランジアンでの $\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$ は $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ と書けます。

これが場の量子論版の経路積分の式です (ここでの ϕ, π は演算子ではないです)。 $\mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\pi$ は測度で、場 ϕ 、 π は x, t を変数に持っています。 $\mathcal{D}\phi$ と $\mathcal{D}\pi$ をばらせば

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^N \left(\int \prod_{j=1}^M d\phi(\mathbf{x}_j, t_k) \frac{\Delta V d\pi(\mathbf{x}_j, t_k)}{2\pi} \right)$$

となっています (分母の π は円周率です)。exp 内も和の形にすれば、 x_j, t_k を変数に持つ形になります。この形から分かるように、場を使った経路積分は時空における場の配置の全てを選ぶように作られています。

ΔV が出てくる理由を簡単に触れておきます。ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ とハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ は連続極限をとる前では

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \Rightarrow L = \Delta V \sum_{j=1}^M \mathcal{L}[\phi(0, \mathbf{x}_j), \dot{\phi}(0, \mathbf{x}_j)]$$

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \Rightarrow L = \Delta V \sum_{j=1}^M \mathcal{H}[\phi(0, \mathbf{x}_j), \dot{\phi}(0, \mathbf{x}_j)]$$

のようになっており、共役な運動量が

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}_j)} = \Delta V \pi(\mathbf{x}_j)$$

となります。このとき $\Delta V \pi(\mathbf{x}_j) = \pi'_j$ と書けば、完全性は

$$\int d\pi'_j |\pi'_j\rangle \langle \pi'_j| = 1$$

を満たし、 $\langle \phi(\mathbf{x}_j, t_k) | \pi'_j(\mathbf{x}_j, t_k) \rangle$ は $(\phi(\mathbf{x}_j, t_k) = \phi_{jk})$ のように書きます)

$$\langle \phi_{jk} | \pi'_{jk} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i\pi'_{jk}\phi_{jk}]$$

このようにして ΔV が入ってくるために、最後の $d\pi'_j$ において $\Delta V d\pi_j$ と置き換わり、exp 内ではハミルトニアン密度によって ΔV が現われ、極限において三次元の微分演算子に変わります。

ハミルトニアンが自由粒子の場合と同じように共役量が二乗の格好をしているようならば (2 次形式)、共役量の積分は実行できます。実数スカラー場なのでラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

として実行してみます。このときのハミルトニアンは定義から

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\pi, \phi) &= \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L} \\ &= \pi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \partial_i \phi \partial^i \phi + V(\phi) \\ &= \pi^2 - \frac{1}{2} \pi^2 - \partial_i \phi \partial^i \phi + V(\phi) \quad (\pi = \partial_0 \phi) \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 - \partial_i \phi \partial^i \phi + V(\phi) \end{aligned}$$

これを使い、変数変換として $\pi' = \pi - \partial_0 \phi$ をすることで

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\pi, \phi)) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (\pi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} \pi^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi)) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi' \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x ((\pi' + \partial_0 \phi) \partial_0 \phi - \frac{1}{2} (\pi' + \partial_0 \phi)^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi)) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi' \\
&\quad \times \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (\pi' \partial_0 \phi + (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\pi'^2 + (\partial_0 \phi)^2 + 2\pi' \partial_0 \phi) + \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi)) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi' \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (-\frac{1}{2} \pi'^2 + (\partial_0 \phi)^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi)) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi' \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (-\frac{1}{2} \pi'^2 + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi' \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x (-\frac{1}{2} \pi'^2 + \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})) \right]
\end{aligned}$$

これで π' が分離されたので π' 積分を行えます。行うには量子力学の「経路積分での計算」で示した関数でのガウス積分

$$\int \mathcal{D}x \exp \left[i \int dt_1 dt_2 x(t_1) O(t_1, t_2) x(t_2) \right] = C (\det O)^{-1/2}$$

を使えばいいです ($\mathcal{D}x = dx_1 \cdots dx_n$ ($n \rightarrow \infty$)). C は定数です。これを今の場合に合わせれば ($\mathcal{D}\pi$ は $\Delta V/2\pi$ を省いて $d\pi$ のみだとして)

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\pi \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \pi(x) \pi(x) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\pi \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \int d^3x d^3y \pi(x) \delta^4(x-y) \pi(y) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\pi \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} d^4x \int_{t_i}^{t_f} d^4y \pi(x) \delta^4(x-y) \pi(y) \right] \\
&\propto (\det[\delta^4(x-y)])^{-1/2}
\end{aligned}$$

係数の $1/2$ は定数にしか寄与しません。デルタ関数は $x = y$ のときに値を持つことから行列での単位行列の関数版になっているので (x, y を行列成分と思えばいい)

$$\det[\delta^4(x-y)] = 1$$

となります。

よって π 積分は定数になり、省いた積分測度 $\mathcal{D}\pi$ が持っている定数部分も含めて $\mathcal{N}$ とすれば

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \right]$$

となります。

源 $J(x)$ を含ませたものは

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int d^3x (\mathcal{L} + J(x)\phi(x)) \right]$$

$Z[J]$ は、ハミルトニアンに減衰項を持たせて、 $t_f \rightarrow \infty, t_i \rightarrow -\infty$ とすれば

$$Z[J] = \langle \phi_f, \infty | \phi_i, -\infty \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) + J(x)\phi(x) + i\epsilon\phi^2) \right]$$

無限大の時間で始状態と終状態が真空 $|0\rangle$ になるとすれば、

$$Z[J] = \langle 0|0 \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) + J(x)\phi(x) + i\epsilon\phi^2) \right]$$

源 J がなければ真空から真空への振幅になるために $Z[J=0] = \langle 0|0 \rangle = 1$ となり、これが規格化の条件になります。また、このように書けることから真空-真空遷移 (vacuum to vacuum transition) とも呼ばれます (下の補足も参照)。

n 点相関関数 $\langle 0|T(\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n))|0 \rangle$ は

$$\langle 0|T(\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n))|0 \rangle = \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

または、

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n))|0 \rangle &= \frac{\langle 0|T(\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n))|0 \rangle}{\langle 0|0 \rangle} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \right]} \end{aligned}$$

収束させる方法としてここではハミルトニアンに減衰項を持たせるようにしましたが、時間軸を回転させて回避させる方法を応用した方法を示しておきます。

回転させる角度 δ は微小でなければならない理由がないということを利用します。ミンコフスキー空間において、時間軸 x_0 を x_0 の複素平面上で $\delta = \pi/2$ 回転させて時間を純虚数とします。これは

$$x_0 \Rightarrow x_4 = ix_0$$

とすることで、置き換え後 x_4 とします。ここでユークリッド空間の内積

$$x_E^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (x_E^\mu = x_{E\mu} = (\mathbf{x}, x_4))$$

とミンコフスキー空間の内積

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

を比べると、 $ix_0 = x_4$ (x_4 は実数) として、符号を反転させれば対応が取れていることが分かります

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -(x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -x_E^2$$

つまり、ミンコフスキー空間における x_0 の複素平面での虚軸は、ユークリッド空間での x_4 の複素平面の実軸に対応しているということです。このことから、 x_0 の虚軸を x_4 の実軸だとみなしてしまおうというのがユークリッド化の発想です。このような実軸を虚軸に解析接続させる回転をウィック回転 (Wick rotation) と呼びます。このユークリッド化された 4 次元ベクトル x_E^μ を使って経路積分を作ることが出来ます。このときの時間はユークリッドでの時間 x_4 に沿って作られます。

ユークリッド化 (ウィック回転) に伴う変更をまとめると

$$-x^2 = -x_\mu x^\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_E^2$$

$$id^4x = d^3x dx_4$$

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2 = -ds_E^2$$

$$\frac{d}{dx_0} = \frac{d}{dx_4} \frac{dx_4}{dx_0} = i \frac{d}{dx_4}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -(\frac{\partial \phi}{\partial x_4})^2 - \nabla^2 \phi$$

となります。見て分かるように、ミンコフスキー空間での時間的 $x^2 > 0$ と空間的 $x^2 < 0$ は、ユークリッドでは時間的が $x_E^2 < 0$ 、空間的が $x_E^2 > 0$ となります。これがユークリッド化の方法で、ユークリッド化することで経路積分を数学的に定義された積分にすることが出来ます (Wiener 積分)。また、ユークリッド化の方法は発散する積分を正則化するときにも用いられます。

ミンコフスキー空間からユークリッド空間への変更は $ix_0 = x_4$ と置き換えることで出来ますが、 x_4 の積分範囲には注意してください。 x_0 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0$$

を $ix_0 = x_4$ と変更すれば、 x_4 の範囲は $-i\infty$ から $i\infty$ であるように見えます。しかし、 x_4 は実数であるように取ります。これは、 x_0 の複素平面上で x_0 の実軸を虚軸に接続したものを、 x_4 の複素平面での実軸に対応させることによります。つまり ix_0 は実数に置き換わります。これを踏まえれば積分範囲の対応は

$$\int_{i\infty}^{-i\infty} dx_0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx_4$$

となっていればいいです。こうすれば x_0 の範囲を i 倍することで、 x_4 の実軸上で $-\infty$ から $+\infty$ の範囲になります。そして、この積分範囲を取るには、 x_0 の実軸を時計回りで虚軸に接続させればいいことが分かります。というわけで、簡単に言ってしまうと、 $ix_0 = x_4$ としてユークリッド空間に変更するには、 $ix_0 = x_4$ と置き換えて、積分範囲を $-\infty$ から ∞ のままにすればいいです。

運動量に対しては、 $p_4 = -ip_0$ として

$$d^4p = d^3p dp_0 = id^3p dp_4 = id^4p_E$$

$$p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = -p_4^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = -p_E^2$$

$$p \cdot x = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_4 x_4 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_E \cdot x_E$$

このとき、 p_0 の複素平面上での実軸は反時計周りに虚軸に接続させます。これは $p_4 = -ip_0$ のように時間の場合とは符号を逆に取っていることから簡単に予想できることだと思います。反時計周りに回転させることで、 p_4 積分も $-\infty$ から $+\infty$ の経路を持つことになります (p_0 での $-i\infty$ から $+i\infty$ が対応するということです)。また、 $p_4 = -ip_0$ のようにしているのは、 $p \cdot x$ を見て分かるように、ミンコフスキー空間での内積 $p \cdot x$ と形を変えさせないためです (ユークリッド空間での内積の形にしたければ、 $p_4 = ip_0$ とすればいいだけです)。

最後に汎関数微分の性質を示しておきます。基本的には

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta(x - y)$$

となっており、関数 $g(\phi(y))$ による

$$F[\phi] = \int d^4y g(\phi(y))$$

に対しては

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} = \int d^4y \frac{\partial g}{\partial \phi} \delta(y - x) = \frac{\partial g}{\partial x}$$

連鎖則は

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} = \int d^4x \frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta \phi(x)}$$

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \int d^4x J(x) \phi(x) = \phi(y)$$

汎関数の ϕ' の ϕ 周りでのテーラー展開は

$$\begin{aligned} F[\phi'] &= F[\phi] + \int d^4x_1 \frac{\delta F}{\delta \phi'(x_1)} \Big|_{\phi'=\phi} (\phi'(x_1) - \phi(x_1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^2 F}{\delta \phi'(x_1) \delta \phi'(x_2)} \Big|_{\phi'=\phi} (\phi'(x_1) - \phi(x_1)) (\phi'(x_2) - \phi(x_2)) + \dots \\ &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\delta^n F}{\delta \phi'(x_1) \dots \delta \phi'(x_n)} \Big|_{\phi'=\phi} (\phi'(x_1) - \phi(x_1)) \dots (\phi'(x_n) - \phi(x_n)) \end{aligned}$$

ついでに言葉の使い方ですが汎関数 (もしくは関数) のトレースと言ったときは

$$\text{tr}[F(x, y)] = \int d^4x d^4y F(x, y) \delta^4(x - y) = \int d^4x F(x, x)$$

とすることを指します。これは $F(x, y)$ を x, y 成分を持つ行列と見れば意味が分かりやすいです。

・補足

減衰項を入れた話をもう少し詳しくしておきます。そのために、経路積分

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle_J = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \right]$$

の両端をより一般的に $|\psi_i, t_i\rangle$ 、 $|\psi_f, t_f\rangle$ という状態を始状態、終状態として

$$\langle \psi_f, t_f | \psi_i, t_i \rangle$$

に置き換えます。この変更による置き換えは単純で

$$\langle \psi_f, t_f | \psi_i, t_i \rangle = \int \prod_{\mathbf{x}} d\phi_f(\mathbf{x}, t_f) \int \prod_{\mathbf{y}} d\phi_i(\mathbf{y}, t_i) \langle \psi_f, t_f | \phi_f, t_f \rangle \langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle \langle \phi_i, t_i | \psi_i, t_i \rangle$$

というように両端に新しい内積とそれによる積分が出てくるだけなので

$$\langle \psi_f, t_f | \phi_f, t_f \rangle = \Psi_f[\phi_f], \quad \langle \phi_i, t_i | \psi_i, t_i \rangle = \Psi_i[\phi_i]$$

とすれば

$$\langle \psi_f, t_f | \psi_i, t_i \rangle = \int \prod_{\mathbf{x}} d\phi_f(\mathbf{x}, t_f) \int \prod_{\mathbf{y}} d\phi_i(\mathbf{y}, t_i) \Psi_f^*[\phi_f] \Psi_i[\phi_i] \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L} \right]$$

となります。ここで新しく出てきた積分測度も $\mathcal{D}\phi$ の中に含めて

$$\langle \psi_f, t_f | \psi_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}\phi \Psi_f^*[\phi_f] \Psi_i[\phi_i] \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L} \right]$$

と書くことにします。これによって、 n 点相関関数を

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\langle \psi_f, t_f | T(\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n)) | \psi_i, t_i \rangle}{\langle \psi_f, t_f | \psi_i, t_i \rangle}$$

と定義します。

ハミルトニアン固有値と固有状態を

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

と与えます。そして、ハミルトニアンを

$$H \Rightarrow e^{-i\epsilon} H$$

として、最後に $\epsilon = 0$ として元に戻すことを考えます。そうすると時間発展

$$|\psi_i, t_i\rangle = \exp[e^{-i\epsilon} H t_i] |\psi_i\rangle$$

に対して完全性を挟むことで

$$\begin{aligned} |\psi_i, t_i\rangle &= \sum_n \exp[e^{-i\epsilon} H t_i] |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle \\ &= \sum_n \exp[e^{-i\epsilon} E_n t_i] |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle \\ &= \exp[e^{-i\epsilon} E_0 t_i] |0\rangle \langle 0 | \psi_i\rangle + \sum_{n \neq 0} \exp[e^{-i\epsilon} E_n t_i] |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle \end{aligned}$$

E_0 は真空 $|0\rangle$ のエネルギーなので $E_0 = 0$ となって

$$|\psi_i, t_i\rangle = |0\rangle \langle 0 | \psi_i\rangle + \sum_{n \neq 0} \exp[e^{-i\epsilon} E_n t_i] |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle$$

第二項は

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} \exp[e^{-i\epsilon} E_n t_i] |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle &= \sum_{n \neq 0} \exp[(\cos \epsilon - i \sin \epsilon) E_n t_i] |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle \\ &= \sum_{n \neq 0} e^{E_n t_i \cos \epsilon} e^{-i E_n t_i \sin \epsilon} |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle \end{aligned}$$

となるので、 t_i を $-\infty$ に持っていくと消えます。なので、 $t_i \rightarrow -\infty$ において

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty} |\psi_i, t_i\rangle = |0\rangle \langle 0 | \psi_i\rangle$$

$\langle \psi_f, t_f |$ に対しても同様にすることで

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \langle \psi_f, t_f | = \langle \psi_f | 0 \rangle \langle 0 |$$

これらの極限で ϵ の依存性はなくなっています。

これらを n 点相関関数の式に使うと

$$\begin{aligned} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \lim_{t_f \rightarrow \infty} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \frac{\langle \psi_f, t_f | T(\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n)) | \psi_i, t_i \rangle}{\langle \psi_f, t_f | \psi_i, t_i \rangle} \\ &= \frac{\langle \psi_f | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n)) | 0 \rangle \langle 0 | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | 0 \rangle \langle 0 | 0 \rangle \langle 0 | \psi_i \rangle} \\ &= \frac{\langle 0 | T(\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n)) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \end{aligned}$$

となって、上での n 点相関関数の定義と同じものが出てきます。このように始状態と終状態を任意の状態だとしても、 $t_i \rightarrow -\infty$ 、 $t_f \rightarrow \infty$ の極限で真空 $|0\rangle$ で挟んだものと一致します。
この結果はハミルトニアンを

$$H \Rightarrow H - i\epsilon\phi^2$$

としても同じように導けます。最初の置き換えを

$$e^{-i\epsilon H} \simeq H - i\epsilon H$$

と書けば、同じことをしているのが分かります。

例えば (ϕ^2 は演算子)

$$\begin{aligned} |\psi_i, t_i\rangle &= \sum_n \exp[i(H - i\epsilon\phi^2)t_i] |n\rangle \langle n|\psi_i\rangle \\ &= \sum_n \exp[iE'_n t_i] |n\rangle \langle n|\psi_i\rangle \end{aligned}$$

E'_n は E_n に $-i\epsilon\phi^2$ からの寄与を加えたもので、 ϕ^2 部分が c 数 λ_n になっているとすれば

$$\begin{aligned} |\psi_i, t_i\rangle &= \exp[iE'_0 t_i] |0\rangle \langle 0|\psi_i\rangle + \sum_{n \neq 0} \exp[iE'_n t_i] |n\rangle \langle n|\psi_i\rangle \\ &= \exp[i(E_0 - i\epsilon\lambda_0)t_i] |0\rangle \langle 0|\psi_i\rangle + \sum_{n \neq 0} \exp[i(E_n - i\epsilon\lambda_n)t_i] |n\rangle \langle n|\psi_i\rangle \\ &= e^{\epsilon\lambda_0 t_i} |0\rangle \langle 0|\psi_i\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{iE_n t_i} e^{\epsilon\lambda_n t_i} |n\rangle \langle n|\psi_i\rangle \end{aligned}$$

第一項は真空による λ_0 、第二項は真空からの励起状態 $|n\rangle$ による λ_n なので、真空による λ_0 の方が値が小さいと考えます。そうすると $t_i \rightarrow -\infty$ を取ったとき、第一項の寄与が主になるので

$$\lim_{t_i \rightarrow -\infty} |\psi_i, t_i\rangle = \lim_{t_i \rightarrow -\infty} e^{\epsilon\lambda_0 t_i} |0\rangle \langle 0|\psi_i\rangle$$

ここでは $e^{\epsilon\lambda_0 t_i}$ が余計に出てきていますが、分母にも当然これは出てくるので、 n 点相関関数の式からは消えます。よって、ハミルトニアンに減衰項を入れることでも真空 $|0\rangle$ で挟まれた形になります。