経路積分〜離散的な場合〜

通常、時空は連続的であるために、経路積分は分割された時空の連続極限を取った形が使われます。しかし、連続極限を取る前の状態も重要なものとなっています。離散的な経路積分を基本とするのが格子場の理論 (lattice field theory) であり、非摂動的な取り扱いの中心的な方法となっています。
ここでは、離散的な経路積分を直接いじったりはしないで、離散的な場合での実スカラー場の伝播関数を求めます。

最初に簡単に経路積分の話をしておきます。古典的に、始点 x_i, t_i から終点 x_f, t_f への粒子の軌道を考えます。このときのラグランジアンは $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ によって表現されているとします。そうすると、作用 S はラグランジアン L によって (ドットは時間微分)

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L[x(t), \dot{x}(t)]$$

古典的な場合はこの作用 S によって経路を決めることができます。しかし、量子力学での振幅を考えるときには、これに $i/\hbar$ の重みをつけて、exp の中に入れる必要があり、そして、可能な全ての経路の和をとります。つまり、量子力学における、始点 x_i, t_i から終点 x_f, t_f への振幅は時間発展を考えることで

$$< x_f(t_f)|x_i(t_i) > \sim \sum_{path} \exp[iS]$$

という形になります (自然単位系を使うので $\hbar = 1$ としています)。$path$ は全ての可能な経路のことです。
次に t_i から t_f までの時間間隔を

$$\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N} \ , \ t_k = t_i + k\Delta t \quad (k = 1, 2, \ldots, N-1)$$

このように分割します。そしてこれの連続極限、つまり $N \to \infty$ を取ることで、区切られた離散的な時間は連続的になり、遷移振幅の式として

$$< x_f(t_f)|x_i(t_i) > = \mathcal{N} \lim_{N\to\infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \exp[iS]$$

このようになります。右辺の $\mathcal{N}$ は規格化定数、x_k は時間 t_k を変数に持ち、作用 S の部分は分解すれば $x(t_k), \dot{x}(t_k)$ を持つようになっています。
これを場の理論へ拡張するには、空間座標も分割すればいいです。三次元空間を $x_1, x_2, \ldots x_M$ と分け、時間を $t_i = t_0$ から $t_f = t_N$ までを $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$ と分けます。そうすると、場を ϕ と書けば

$$< \phi_f(x, t_f)|\phi_i(x, t_i) > = \mathcal{N} \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{M} \prod_{k=1}^{N-1} d\phi(x_j, t_k) \exp[iS]$$

となります。場を使ったときの作用は、$\phi(x_j, t_k), \dot{\phi}(x_j, t_k)$ を持つようになっています。この式の形が、格子場の理論への出発点となります。連続極限を取らなければ、時間と座標は離散的になっています。そんな離散的な時空の各点に場を配置することによって、格子場の理論は始まります。

格子場の理論を考える時には、実数によって書くことができるユークリッド空間が便利なので、普通はユークリッド空間に持って行きます。時間を $t \ \Rightarrow \ -i\tau = -ix_4$ とすることでユークリッド空間へ接続することができ、これによって経路積分の exp 内が

$$\exp[iS] \ \Rightarrow \ \exp[-S_E]$$

$$S_E = \int d^4x_E \mathcal{L}_E$$

となります。E はユークリッド空間であることを表わしています。ユークリッド空間では添え字の上付きと下付きに意味がなくなるので、内積での添え字の位置を揃えます。ユークリッド空間での内積は

$$x_\mu y_\mu = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + x_4y_4$$

このように定義し、ユークリッド空間での添え字は $1 \sim 4$ に取ることにします。ユークリッド化については「経路積分」や有限温度の理論の「ファインマン則〜虚時間法〜」なんかをみてください。

具体的に、実スカラー場を使っていきます。相互作用なしでの実スカラー場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

これをユークリッド化すれば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \ \Rightarrow \ &\frac{1}{2}\Big(-(\frac{\partial\phi}{\partial x_4})^2 - (\nabla\phi)^2\Big) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad \Big(\frac{\partial}{\partial x_0} = i\frac{\partial}{\partial x_4}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big((\frac{\partial\phi}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial x_3})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial x_4})^2\Big) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2
\end{aligned}$$

よって経路積分の exp 部分は

$$\begin{aligned}
\exp[i\int d^4x\mathcal{L}] = \exp[i\int d^4x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2)] \ \Rightarrow \ &\exp\Big[\int d^4x_E(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2)\Big] \\
&= \exp\Big[-\int d^4x_E\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m^2\phi^2)\Big] \\
&= \exp\Big[-\int d^4x_E\mathcal{L}_E\Big]
\end{aligned}$$

$$(id^4x = d^4x_E \ , \ d^4x_E = dx_4d^3x)$$

ラグランジアン密度は、作用を上での定義にあわせるために

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m^2\phi^2)$$

と定義しています。

源 J を加えたユークリッド空間での生成汎関数は

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int\mathcal{D}\phi\exp\Big[-S_E + \int d^4x_E J\phi\Big] \\
&= \int\mathcal{D}\phi\exp\Big[\int d^4x_E\big(-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m^2\phi^2) + J\phi\big)\Big] \\
&= \int\mathcal{D}\phi\exp\Big[\int d^4x_E\big(-\frac{1}{2}\phi(-\Box_E + m^2)\phi + J\phi\big)\Big] \\
&= \int\mathcal{D}\phi\exp\Big[\int d^4x_E\big(\frac{1}{2}\phi(\Box_E - m^2)\phi + J\phi\big)\Big]
\end{aligned}$$

ダランベルシャン $\Box_E$ は

$$\Box_E = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

としています。ついでに $Z[J]$ をミンコフスキー空間と同じように $\phi(x)$ を $\phi(x)+\phi'(x)$ と置き換えます。そして、$\phi'(x)$ が外場ありのユークリッド空間でのクライン・ゴルドン方程式

$$\left(\Box_E - m^2\right)\phi'(x) = -J(x)$$

を満たすとして、伝播関数 (グリーン関数) を

$$\phi' = \int d^4y_E G(x-y)J(y)$$

$$\left(\Box_E - m^2\right)G(x) = -\delta(x_4)\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

このようにして導入することで

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int\mathcal{D}\phi\exp\Big[\int d^4x_E\big(\frac{1}{2}\phi(\Box_E - m^2)\phi + \frac{1}{2}J\phi'\big)\Big] \\
&= \int\mathcal{D}\phi\exp\Big[\frac{1}{2}\int d^4x_E\phi(\Box_E - m^2)\phi + \frac{1}{2}\int d^4x_E d^4y_E J(x)G(x,y)J(y)\Big] \\
&= \mathcal{N}\exp\Big[\frac{1}{2}\int d^4x_E d^4y_E J(x)G(x,y)J(y)\Big]
\end{aligned}$$

となります。(1) の時点で分かることですが、n 点相関関数は

$$G^{(n)} = \frac{\delta}{\delta J_1}\cdots\frac{\delta}{\delta J_n}Z[J]$$

によって求められることが確認できます。ここで使っている伝播関数 $G(x,y)$ は、ミンコフスキー空間での i を含めた伝播関数に対応しています。このことは (1) をミンコフスキー空間に戻せば、i を含めた伝播関数の式になることから分かります ($\delta(x_0) \Rightarrow i\delta(x_4)$)。

ここまでは、単にユークリッド空間に接続された経路積分の話です。次に、本題である離散的な状況を見ていきます。

ここでは時空を離散的なものにするために、ユークリッド空間を隣接点との距離 (格子間隔) が a の 4 次元立方体によって分割するのだとします。そうすると、ある点での座標 x_μ は、i,j,k,l を整数とし、$\boldsymbol{e}_{1,2,3,4}$ を各成分の単位ベクトルとすれば

$$x_\mu = an_\mu = a(i\boldsymbol{e}_1 + j\boldsymbol{e}_2 + k\boldsymbol{e}_3 + l\boldsymbol{e}_4)$$

と表わされます。2 次元的に言えば、間隔 a で碁盤目上に並んだ点の上に場を配置していくということです。

離散的な場合を扱うための準備をします。簡単のために 1 次元を扱います。まず、和と積分の関係を見ます。積分の定義そのものですが、和の形から連続極限を取っていくことで

$$a\sum_n f(x_n) \;\Rightarrow\; \int f(an)adn \;\Rightarrow\; \int f(x)dx$$

$x_n = an$ としていて、a は格子間隔です。これを応用することで、デルタ関数とクロネッカーデルタの関係を見ることが出来ます。離散的な場合、クロネッカーデルタによって

$$a\sum_n f(x_n)\frac{1}{a}\delta_{nm} = f(x_m)$$

このようなものを作ります。この式は関数の変数を置き換えていることを表わしているので、連続極限でデルタ関数の定義式である

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y)dx = f(y)$$

これに対応します。連続極限を取って和を積分に変えていけば

$$\frac{1}{a}\delta_{nm} \;\Leftrightarrow\; \delta(x-y)$$

という関係になっていることが分かります

次に微分に移ります。微分はその定義どおり、離散的な場合で

$$\frac{d}{dx}f(x) \;\Rightarrow\; \frac{f(x+a)-f(x)}{a} \tag{2}$$

このようになります (1 次元の場合)。これをもう 1 回微分すれば、2 階微分になるので

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{a}\Big(\frac{f(x+a+a)-f(x+a)}{a} - \frac{f(x+a)-f(x)}{a}\Big) = \frac{f(x+2a)-2f(x+a)+f(x)}{a^2}$$

しかし、この場合精度に問題があるために、一段ひねります。微分の作り方は他にも

$$\frac{d}{dx}f(x) \;\Rightarrow\; \frac{f(x)-f(x-a)}{a} \tag{3}$$

このような方法があり、(2) を前進差分、(3) を後退差分と言います。この二つによって作られる 2 階微分は

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}f(x) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}(\frac{f(x+a)-f(x)}{a}) \;\Rightarrow\; &\frac{1}{a}(\frac{f(x+a)-f(x)}{a} - \frac{f(x)-f(x-a)}{a}) \\ &= \frac{f(x+a)+f(x-a)-2f(x)}{a^2}\end{aligned}$$

このようになります。こっちの方が精度がいいです。

次にフーリエ変換ですが、これは単純に

$$f(p) = \int dx f(x_n)e^{-ipx} \;\Rightarrow\; f(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} af(x)e^{-ipx_n} \qquad (x_n = na)$$

となります。他のとこでもそうしていますが、フーリエ変換されたものとされる前の関数の記号を変えずに使っています。右辺の exp 部分をみれば

$$\exp[-ipx_n] = \exp[-iapn]$$

なので

$$f(p) = f(p + \frac{2\pi}{a})$$

というような周期性を持ちます。この周期性のために、運動量の積分範囲が $-\pi/a \sim +\pi/a$ に制限されます。この範囲のことをブリルアン領域 (Brillouin zone) と呼びます (物性あたりでよく出てくるものです)。というわけで、逆変換は

$$f(x_n) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dp}{2\pi} f(p)e^{ipx_n}$$

このように、運動量の範囲を制限します。そして、運動量積分によるデルタ関数の定義

$$\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-y)}$$

は、離散的な場合において

$$\delta_{nm} = \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} dp e^{ip(x_n - x_m)}$$

このようにクロネッカーデルタに変わります。係数の $a/2\pi$ は $n = m$ のときの $2\pi/a$ を潰すために出てきています。フーリエ変換に関してはフーリエ級数との対応を見ることでも同じ関係が出てきます。

わきの話ですが、離散化することでデルタ関数の意味を知ることが出来ます。座標によるデルタ関数 $\delta(x)$ は

$$\frac{\delta_{nm}}{a} \ \Leftrightarrow \ \delta(x-y)$$

の関係から、格子間隔の逆数に対応していることが分かり、連続極限において、$\delta(0)$ は発散しています。運動量によるデルタ関数は場の量子論の「相関関数のファインマン則」で出てきたように $2\pi\delta(0)$ で空間の体積に対応します。

　これで基本的な準備が終わったので、実スカラー場の話に戻します。格子間隔 a での 4 次元ユークリッド空間における経路積分は

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[-\frac{1}{2}\int d^4x_E\phi(-\Box_E+m^2)\phi\Big] \ \Rightarrow \ \int\prod_n d\phi(x_n)\exp\Big[-\frac{1}{2}a^4\sum_n\phi(x_n)(-\Box+m^2)\phi(x_n)\Big]$$

のようになります (長くなるので離散でのダランベルシャンは $\Box$ と書いてしまっています)。これに源を加えて変形させれば

$$Z[J] = \exp\Big[\frac{1}{2}a^8\sum_{n,m}J(x_n)G(x_n,x_m)J(x_m)\Big]$$

ガウス積分は実行できるので、連続的な場合の積分を和に変えた形にそのままなります。伝播関数は J の微分を 2 回行えば取り出すことが出来ます (次元解析をすれば分かりますが、a^8 で割る必要があります)。というわけで、伝播関数 $G(x_n,x_m)$ がどうなっているのか求めていきます。ユークリッド空間での実スカラー場によるクライン・ゴルドン方程式は

$$(\Box_E - m^2)\phi = 0 \quad \Big(\Box_E = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\Big)$$

ダランベルシャンを離散的なものに書き換えれば、クライン・ゴルドン方程式は

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\phi(x_n+a\boldsymbol{e}_\mu)+\phi(x_n-a\boldsymbol{e}_\mu)}{a^2}-\frac{8\phi(x_n)}{a^2}-m^2\phi(x_n)=0$$

ここで使っている x_n と $\boldsymbol{e}$ は 4 次元ベクトルで、$\boldsymbol{e}_\mu$ は μ 成分の単位ベクトルという意味です (ここでは単位ベクトルは、対応する成分だけが 1 のベクトルと思ってしまっていいです)。なので、μ はユークリッド空間での成分を表わします。$\boldsymbol{x}_n + a\boldsymbol{e}_\mu$ は、4 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ の第一成分には第一成分の単位ベクトルによる $a\boldsymbol{e}_1$ が、第二成分には $a\boldsymbol{e}_2$ がというように加わっていくものです。分かりづらかったら、和の記号を使わずに

$$\phi(x_1+a,x_2,\cdots)+\phi(x_1,x_2+a,\cdots)+\cdots$$

このように分解して書けばいいです。また、成分が 4 つあるので、$2\phi(x_n)$ の項は 4 倍されています。ちなみに、このように書けるのは、例えば直交座標における 2 次元でのラプラシアン

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x,y) &= \frac{f(x+a,y)+f(x-a,y)-2f(x,y)}{a^2}+\frac{f(x,y+a)+f(x,y-a)-2f(x,y)}{a^2}\\ &= \sum_{i=1}^{2}\frac{f(\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{e}_i)+f(\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{e}_i)}{a^2}-\frac{4f(\boldsymbol{x})}{a^2} \quad (\boldsymbol{x}=(x,y)\ ,\ \boldsymbol{e}_1=(1,0)\ ,\ \boldsymbol{e}_2=(0,1))\end{aligned}$$

と比較すれば分かりやすいです。といっても、ただの表記でしかないのであまり気にする必要はないです。

離散的なクライン・ゴルドン方程式に対応する伝播関数を求めます。伝播関数はクライン・ゴルドン方程式の演算子部分の逆に対応するので、そこを取り出します。$\phi(\boldsymbol{x}_n \pm a\boldsymbol{e}_\mu)$ は、x_n から隣接点への移動を表わしているので、クロネッカーデルタを使うことで、クライン・ゴルドン方程式は

$$\Big[\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\delta_{n+\mu,m}+\delta_{n-\mu,m}}{a^2}-(\frac{8}{a^2}+m^2)\delta_{nm}\Big]\phi(x_m)=0$$

このように書けます (添え字にも m を使っていますが、多分混乱しないと思います)。クロネッカーデルタについている $n\pm\mu$ は $x_n \pm ae_\mu$ に対応します。なので、演算子部分は

$$G^{-1}_{nm}=\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\delta_{n+\mu,m}+\delta_{n-\mu,m}}{a^2}-(\frac{8}{a^2}+m^2)\delta_{nm}$$

しかし、正確な演算子の逆にはなっていません (伝播関数の式において)。このことは、ユークリッド空間における伝播関数の式 (1) が

$$-(\Box_E-m^2)G(x-x')=\delta(x_4-x'_4)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

このようになっていることから分かります。この式を見て分かるように、演算子部分の逆としては $-G(x-x')$ が対応します (有限温度の場の理論の「虚時間法〜クライン・ゴルドン場〜」なんかも見るといいかもしれません)。さらに、伝播関数の式を離散的にするときにはデルタ関数が $a^{-4}\delta_{nm}$ のように置き換わるために

$$-(\Box-m^2)G_{nm}=a^{-4}\delta_{nm}$$

このようになっているので、正確な演算子の逆としての伝播関数は $-G_{nm}a^4$ です。

話を戻して、G^{-1}_{nm} をフーリエ変換すれば

$$
\begin{aligned}
G^{-1}(p) = &\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a^4 G^{-1}_{nm} e^{-ip_\nu(x_n-x_m)_\nu} \\
=&a^4 \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\delta_{n+\mu,m}+\delta_{n-\mu,m}}{a^2} - (\frac{8}{a^2}+m^2)\delta_{nm}\Big] e^{-ip_\nu(x_n-x_m)_\nu} \\
=&a^4 \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\delta_{n+1,m}e^{-ip_\nu(x_n-x_m)_\nu}+\delta_{n+2,m}e^{-ip_\nu(x_n-x_m)_\nu}+\cdots}{a^2} \\
&\qquad + \sum_{\mu=1}^{4}\frac{\delta_{n-\mu,m}}{a^2}e^{-ip_\nu(x_n-x_m)_\nu} - (\frac{8}{a^2}+m^2)\delta_{nm}e^{-ip_\nu(x_n-x_m)_\nu}\Big] \\
=&a^2\Big[e^{-ip^\nu x^\nu_n+ip^\nu x^\nu_n+ip^1a}+e^{-ip^\nu x^\nu_n+ip^\nu x^\nu_n+ip^2a}+\cdots \\
&\qquad + \sum_{\mu=1}^{4} e^{-ip^\nu x^\nu_n+ip^\nu x^\nu_n-ip^\mu a} - (8+a^2m^2)\Big] \\
=&a^2\Big[\sum_{\mu=1}^{4}(e^{iap_\mu}+e^{-iap_\mu}) - (8+a^2m^2)\Big] \\
=&a^2\Big[\sum_{\mu=1}^{4} 2\cos(ap_\mu) - (8+a^2m^2)\Big] \\
=&a^2[2\cos(ap_1)+\cdots+2\cos(ap_4)-(8+a^2m^2)] \\
=&a^2[-(2-2\cos(ap_1))-\cdots-(2-2\cos(ap_4))-a^2m^2] \\
=&a^2\Big[-\sum_{\mu=1}^{4}4\sin^2\frac{ap_\mu}{2}-a^2m^2\Big] \qquad \Big(\sin^2(\frac{\theta}{2})=\frac{1-\cos\theta}{2}\Big) \\
=&-a^2\Big(\sum_{\mu=1}^{4}4\sin^2\frac{ap_\mu}{2}+a^2m^2\Big)
\end{aligned}
$$

$-G^{-1}_{nm}a^{-4}$ では

$$
-a^{-4}G^{-1}(p) = \Big(\sum_{\mu=1}^{4}4a^{-2}\sin^2\frac{ap_\mu}{2}+m^2\Big)
$$

となります。これの連続極限 $a=0$ を取ればユークリッド空間での伝播関数に対応するはずなので見ておきます。$-a^{-4}G^{-1}(p)$ の $a=0$ の極限を取ると

$$
\begin{aligned}
-\lim_{a\to 0} G^{-1}(p)a^{-4} &= \lim_{a\to 0}\Big[\sum_{\mu=1}^{4} 4a^{-2}\sin^2\frac{ap_\mu}{2}+m^2\Big] \\
&= \sum_{\mu=1}^{4} 4a^{-2}\Big(\frac{ap_\mu}{2}\Big)^2+m^2 \\
&= p_E^2+m^2
\end{aligned}
$$

よって、連続極限でユークリッド空間での伝播関数をちゃんと再現します。これがユークリッド空間の伝播関数になっているのは

$$
\begin{aligned}
-\delta(x_4)\delta^3(\boldsymbol{x}) &= \left(\Box_E - m^2\right) G(x) \\
&= \left(\Box_E - m^2\right)\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} G(p) e^{-ip_\mu x_\mu} \qquad (p_\mu x_\mu = p_1x_1+\cdots+p_4x_4) \\
&= \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}(-p_E^2-m^2)G(p)e^{-ip_\mu x_\mu}
\end{aligned}
$$

これによって、$G^{-1}(p)=p_E^2+m^2$ と求まることからも確かめられます。