経路積分〜非可換ゲージ場〜

可換ゲージ場である電磁場についてはやったので、ここでは非可換ゲージ場の場合を扱い、非可換ゲージ場でのファインマン則を導出します。電磁場のところですでに非可換ゲージ場として経路積分を作ったのでそれをそのまま使っていきます。非可換ゲージ場と電磁場 (可換ゲージ場) との違いは非可換ゲージ場では、ゲージ場とゲージ場が結合します (ゲージ場の自己相互作用)。また、ここだと内部自由度による添え字の並びによって符号が結構変わるので注意が必要です。
途中の計算がグチャグチャしているので、ちゃんとした結果 (ファインマン則) は最後にまとめてあります。
記号としては、ローマ字の添え字は内部自由度によるものを ($SU(N)$ なら、$1, 2\cdots N^2-1$)、ギリシャ文字は 4 次元時空成分を表します。

非可換ゲージ場の生成汎関数は

$$Z=\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\exp\left[i\int d^4x\left(\mathcal{L}_0-\frac{1}{2\alpha}(G^a[A_\mu])^2-\overline{\eta}^aM_{ab}\eta^b\right)\right]=\int\mathcal{D}A_\mu\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{eff}\right]$$

外場の項 (ゲージ場とゴースト場の) は書いていませんが、あると思ってください。このときのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff}=-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2-\frac{1}{2\alpha}(G^a)^2-\overline{\eta}^aM_{ab}\eta^b=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_G+\mathcal{L}_{FP}$$

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

$G^a[A_\mu]$ はゲージ条件で、ここではゲージ条件としてローレンツゲージ

$$G^a[A^a_\mu]=\partial^\mu A^a_\mu$$

を使うことにします。非可換ゲージ場 A^a_μ の変換は

$$\begin{aligned}A^{a\prime}_\mu &= A^a_\mu+f^{abc}A^b_\mu\Lambda^c+\frac{1}{g}\partial_\mu\Lambda^a\quad(\text{無限小変換})\\ &= A^a_\mu+\frac{1}{g}(gf^{abc}A^b_\mu\Lambda^c+\partial_\mu\Lambda^a)\end{aligned}$$

で与えられます。そうすると、M_{ab} は

$$\begin{aligned}M_{ab}=\frac{\delta G^a}{\delta\Lambda^b} &= \frac{\delta}{\delta\Lambda^b}\{\partial^\mu A^a_\mu+\frac{1}{g}(gf^{acd}\partial^\mu(A^c_\mu\Lambda^d)+\partial^\mu\partial_\mu\Lambda^a)\}\\ &= \frac{1}{g}(gf^{acd}\partial^\mu A^c_\mu\delta^{bd}+gf^{acd}A^c_\mu\partial^\mu\delta^{bd}+\delta^{ab}\partial^\mu\partial_\mu)\\ &= \frac{1}{g}(-gf^{abc}\partial^\mu A^c_\mu-gf^{abc}A^c_\mu\partial^\mu+\delta^{ab}\partial^\mu\partial_\mu)\end{aligned}$$

f^{abc} の項の符号が反転しているのは δ^{bd} によって d を b にして、f^{acb} を f^{abc} にしてるからです。$1/g$ は規格化定数に入れてしまうとすれば、ゴースト項は

$$
\int \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\left[-i\int d^4x\left(\overline{\eta}^a M_{ab}\eta^b\right)\right]
$$

$$
= \int \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta \exp\left[igf^{abc}\int d^4x\left(\partial^\mu A^c_\mu\overline{\eta}^a\eta^b + A^c_\mu\overline{\eta}^a\partial^\mu\eta^b\right) - i\int d^4x\overline{\eta}^a\delta^{ab}\Box\eta^b\right]
$$

となります。というわけでラグランジアンは

$$
\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 - \overline{\eta}^a\delta^{ab}\Box\eta^b + gf^{abc}(\partial^\mu A^c_\mu\overline{\eta}^a\eta^b + A^c_\mu\overline{\eta}^a\partial^\mu\eta^b)
$$

最後の項は

$$
\begin{aligned}
gf^{abc}(\partial^\mu A^c_\mu\overline{\eta}^a\eta^b + A^c_\mu\overline{\eta}^a\partial^\mu\eta^b) &= gf^{abc}\overline{\eta}^a(\partial^\mu A^c_\mu\eta^b + A^c_\mu\partial^\mu\eta^b) \\
&= gf^{abc}\overline{\eta}^a\partial^\mu(A^c_\mu\eta^b) \\
&= gf^{abc}\partial^\mu(\overline{\eta}^a A^c_\mu\eta^b) - gf^{abc}(\partial^\mu\overline{\eta}^a)A^c_\mu\eta^b
\end{aligned}
$$

と変形させられ、第一項は表面積分で落ちるので

$$
\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 - \overline{\eta}^a\delta^{ab}\Box\eta^b - gf^{abc}(\partial^\mu\overline{\eta}^a)A^c_\mu\eta^b
$$

このときの $\overline{\eta}^a\delta^{ab}\Box\eta^b$ によって、ゴーストの伝播関数を求めることができ、この形からすぐに運動量表示の伝播関数は

$$
\frac{i\delta^{ab}}{k^2}
$$

であることがわかり、位置表示なら

$$
<0|\eta^a(x)\overline{\eta}^b(y)|0> = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2}\delta^{ab}e^{-ik(x-y)}
$$

後は頂点がどうなっているのか調べればいいんですが、そのためにラグランジアンを自由部分と相互作用部分に分けておきます。ゲージ場 A^a_μ の自由部分は

$$
\begin{aligned}
(F^a_{\mu\nu})^2 &= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a} + gf^{ade}A^{\mu d}A^{\nu e}) \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) + gf^{ade}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)A^{\mu d}A^{\nu e} \\
&\quad + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) + g^2 f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d}A^{\nu e} \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) + 2gf^{abc}(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a})A^b_\mu A^c_\nu + g^2 f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d}A^{\nu e}
\end{aligned}
$$

なので、自由部分のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_0^G = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2$$

$$\mathcal{L}_0^{FP} = -\overline{\eta}^a \delta^{ab} \Box \eta^b$$

ゲージ固定項は自由ゲージ場のラグランジアンに含めています。相互作用ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} g f^{abc}(\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} - g f^{abc}(\partial^\mu \overline{\eta}^a)\eta^b A_\mu^c$$

これらを使って摂動展開を行います。フェルミオンがいるときは自由部分と相互作用部分のラグランジアンに

$$\mathcal{L}_0^f = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

$$\mathcal{L}_{int}^f = g\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu^i t^i \psi$$

が加わるだけです (t^i は $SU(N)$ の生成子です)。これらはいたとしても非可換ゲージ場部分の摂動展開とは無関係なので、とりあえず無視します。

相互作用があるときの生成汎関数 Z は

$$Z = (1 + i\int d^4x \mathcal{L}_{int} + \cdots)Z_0$$

でもとめられ、Z_0 は

$$Z_0 = Z_0^G Z_0^{FP}$$

$$Z_0^G[J] = \int \mathcal{D}A \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_0^G + A\cdot J)\Big]$$

$$Z_0^{FP}[\xi, \overline{\xi}] = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\overline{\eta} \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_0^{FP} + \overline{\eta}\xi + \overline{\xi}\eta)\Big]$$

となっています ($J, \xi, \overline{\xi}$ はゲージ場、反ゴースト場、ゴースト場の源)。Z_0^G は電磁場と同じ形をしており、単に添え字 $a, b, \cdots$ がついているだけの違いなので、変形させていけば

$$Z_0^G[J] = \exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y (J^{a\mu}(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) J^{b\nu}(y)\Big]$$

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = -\delta^{ab}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)e^{-ik(x-y)} \tag{1}$$

なので、非可換ゲージ場の伝播関数は電磁場に内部自由度の添え字がついているだけです。ゴースト場に対して同じような変形をかければ (基本的な形はディラック場と同じなので)

$$Z_0^{FP}[\xi, \overline{\xi}] = \exp\Big[-i\int d^4x d^4y (\overline{\xi}^a(x) D^{ab}(x-y)\xi^b(y))\Big]$$

$$D^{ab}(x-y)=\delta^{ab}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_1^2}e^{-ik_1(x-y)} \tag{2}$$

となり、上での予想と同じになります。フェルミオンの伝播関数も QED でのものに単に δ^{ab} がくっつくだけです。また、伝播関数は $D^{ab}_{\mu\nu}, D^{ab}$ に i をかけたものだとして定義します。
ゲージ場-ゴースト場-ゴースト場の相互作用を見るために、$\xi, \bar{\xi}, J$ での汎関数微分を行います。ゴースト場はフェルミオン扱いになるので、相互作用ラグランジアンの $\eta, \bar{\eta}, A_\mu$ を

$$\eta\to\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}}\ ,\ \bar{\eta}\to-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi}\ ,\ A_\mu\to\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu}$$

というように置き換えます。必要な相互作用ラグランジアンは

$$-i\int d^4x\ gf^{abc}(\partial^\mu\bar{\eta}^a)\eta^bA^c_\mu$$

の部分なので、これを $Z_0=Z_0^GZ_0^{FP}$ に作用させると

$$\begin{aligned}
&-i\int d^4x\ \Big[gf^{abc}(\partial^\mu(-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi^a(x)}))\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^b(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^{c\mu}(x)}\Big]Z_0^G[J]Z_0^{FP}[\xi,\bar{\xi}]\\
&=\frac{i}{i^3}\int d^4x\ \Big(gf^{abc}(\partial^\mu\frac{\delta}{\delta\xi^a(x)})\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^b(x)}\frac{\delta}{\delta J^{c\mu}(x)}\Big)\\
&\qquad\times\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x_1d^4y_1(J^{a_1\rho}(x_1)D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)J^{b_1\lambda}(y_1)\Big]\\
&\qquad\times\exp\Big[-i\int d^4x_2d^4y_2(\bar{\xi}^{a_2}(x_2)D^{a_2b_2}(x_2-y_2)\xi^{b_2}(y_2))\Big]\\
&=-\frac{i}{i^3}\int d^4x\ \Big((gf^{abc}(\partial^\mu\frac{\delta}{\delta\xi^a(x)})\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}^b(x)})\Big)\frac{i}{2}\int d^4x_1d^4y_1\\
&\quad\big(D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)J^{b_1\lambda}(y_1)\delta^{\mu\rho}\delta^{ca_1}\delta^4(x_1-x)+J^{a_1\mu}(x_1)D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)\delta^{\mu\lambda}\delta^{cb_1}\delta^4(y_1-x)\big)\\
&\qquad\times\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x_1d^4y_1(J^{a_1\rho}(x_1)D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)J^{b_1\lambda}(y_1)\Big]\\
&\qquad\times\exp\Big[-i\int d^4x_2d^4y_2(\bar{\xi}^{a_2}(x_2)D^{a_2b_2}(x_2-y_2)\xi^{b_2}(y_2))\Big]\\
&=\frac{i}{i^3}\frac{i}{2}\int d^4x\ \Big(gf^{abc}(\partial^\mu\frac{\delta}{\delta\xi^a(x)})\Big)\int d^4x_1d^4y_1\Big(D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)J^{b_1\nu}(y_1)\delta^{\mu\rho}\delta^{ca_1}\delta^4(x_1-x)\\
&\qquad+J^{a_1\mu}(x_1)D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)\delta^{\mu\lambda}\delta^{cb_1}\delta^4(y_1-x)\Big)i\int d^4x_2d^4y_2\big(D^{a_2b_2}(x_2-y_2)\xi^{b_2}(y_2)\delta^{ba_2}\delta^4(x-x_2)\big)\\
&\qquad\times\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x_1d^4y_1(J^{a_1\rho}(x_1)D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)J^{b_1\lambda}(y_1)\Big]\\
&\qquad\times\exp\Big[-i\int d^4x_2d^4y_2(\bar{\xi}^{a_2}(x_2)D^{a_2b_2}(x_2-y_2)\xi^{b_2}(y_2))\Big]\\
&=-\frac{i}{i^3}\frac{i^2}{2}\int d^4x\ gf^{abc}\int d^4x_1d^4y_1\Big(D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)J^{b_1\nu}(y_1)\delta^{\mu\rho}\delta^{ca_1}\delta^4(x_1-x)\\
&\qquad\qquad+J^{a_1\mu}(x_1)D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)\delta^{\mu\lambda}\delta^{cb_1}\delta^4(y_1-x)\Big)
\end{aligned}$$

$$\times\int d^4x_2d^4y_2\Big(D^{a_2b_2}(x_2-y_2)\xi^{b_2}(y_2)\delta^{ba_2}\delta^4(x-x_2)\Big)$$

$$\times\Big(i\int d^4x_2d^4y_2\partial^\mu\big(\overline{\xi}^{a_2}(x_2)D^{a_2b_2}(x_2-y_2)\delta^{ab_2}\delta^4(y_2-x)\big)$$

$$+\int d^4x_2d^4y_2\big(\partial^\mu D^{a_2b_2}(x_2-y_2)\delta^{ba_2}\delta^{ab_2}\delta^4(x-y_2)\delta^4(x-x_2)\big)\Big)$$

$$\times\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x_1d^4y_1(J^{a_1\rho}(x_1)D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-y_1)J^{b_1\lambda}(y_1)\Big]$$
$$\times\exp\Big[-i\int d^4x_2d^4y_2(\overline{\xi}^{a_2}(x_2)D^{a_2b_2}(x_2-y_2)\xi^{b_2}(y_2))\Big]$$

$$\Rightarrow -\frac{i}{2}\int d^4x\ gf^{abc}$$

$$\Big(\int d^4y_1D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x-y_1)J^{b_1\lambda}(y_1)\delta^{\mu\rho}\delta^{ca_1}+\int d^4x_1J^{a_1\rho}(x_1)D^{a_1b_1}_{\rho\lambda}(x_1-x)\delta^{\mu\lambda}\delta^{cb_1}\Big)$$

$$\times\int d^4y_2\big(D^{a_2b_2}(x-y_2)\xi^{b_2}(y_2)\delta^{ba_2}\big)\int d^4x_2\big(\overline{\xi}^{a_2}(x_2)\partial^\mu D^{a_2b_2}(x_2-x)\delta^{ab_2}\big)Z_0$$

$$=-\frac{i}{2}gf^{abc}\int d^4x\int d^4y_1d^4y_2d^4x_2$$

$$\Big(D^{cb_1}_{\mu\nu}(x-y_1)D^{bb_2}(x-y_2)\partial^\mu D^{a_2a}(x_2-x)J^{b_1\nu}(y_1)\xi^{b_2}(y_2)\overline{\xi}^{a_2}(x_2)$$

$$+\int d^4x_1d^4x_2d^4y_2D^{a_1c}_{\rho\mu}(x_1-x)D^{bb_2}(x-y_2)\partial^\mu D^{a_2a}(x_2-x)J^{a_1\rho}(x_1)\xi^{b_2}(y_2)\overline{\xi}^{a_2}(x_2)\Big)Z_0$$

$$=-igf^{abc}\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4x_2$$

$$\Big(D^{cb_1}_{\mu\nu}(x-y_1)D^{bb_2}(x-y_2)\partial^\mu D^{aa_2}(x_2-x)J^{b_1\nu}(y_1)\xi^{b_2}(y_2)\overline{\xi}^{a_2}(x_2)\Big)Z_0$$

途中の $\Rightarrow$ は $J^{b_1\nu}\xi^{b_2}\overline{\xi}^{a_2}$ を含んでいる項のみを取り出しています。最後の行へは、添え字や積分変数の文字をそろえると二つの項が同じ式になるので一つにまとめています。ゲージ場-ゴースト場-ゴースト場の 3 点関数を求めるには

$$G^{(3)}=-(\frac{1}{i})^3\frac{\delta}{\delta\overline{\xi}}\frac{\delta}{\delta\xi}\frac{\delta}{\delta J^\mu}(\sim)|_{J,\xi,\overline{\xi}=0}$$

$(\sim)$ は今求めたものです。最後に $J,\xi,\overline{\xi}$ は 0 にするので、途中で明らかに最後までこの三つのうちどれかが生き残る項は落としていきます。

$$G^{(3)}(z_1,z_2,z_3)=gf^{abc}(\frac{1}{i})^2\frac{\delta}{\delta\overline{\xi}^d(z_1)}\frac{\delta}{\delta\xi^e(z_2)}\frac{\delta}{\delta J^{f\rho}(z_3)}\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4x_2$$

$$\Big[D^{cb_1}_{\mu\nu}(x-y_1)D^{bb_2}(x-y_2)\partial^\mu D^{aa_2}(x_2-x)J^{b_1\nu}(y_1)\xi^{b_2}(y_2)\overline{\xi}^{a_2}(x_2)\Big]Z_0$$

$$=gf^{abc}(\frac{1}{i})^2\frac{\delta}{\delta\overline{\xi}^d(z_1)}\frac{\delta}{\delta\xi^e(z_2)}\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4x_2$$

$$\Big[D^{cb_1}_{\mu\nu}(x-y_1)D^{bb_2}(x-y_2)\partial^\mu D^{aa_2}(x_2-x)\delta^4(z_3-y_1)\delta^{fb_1}\delta^{\rho\nu}\xi^{b_2}(y_2)\overline{\xi}^{a_2}(x_2)\Big]Z_0$$

$$=gf^{abc}(\frac{1}{i})^2\frac{\delta}{\delta\overline{\xi}^d(z_1)}\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4x_2$$

$$\Big[D^{cb_1}_{\mu\nu}(x-y_1)D^{bb_2}(x-y_2)\partial^\mu D^{aa_2}(x_2-x)\delta^4(z_3-y_1)\delta^{fb_1}\delta^{\rho\nu}\delta^{eb_2}\delta^4(z_2-y_2)\overline{\xi}^{a_2}(x_2)\Big]Z_0$$

$$= gf^{abc}(\frac{1}{i})^2\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4x_2$$

$$\Big[D^{cb_1}_{\mu\nu}(x-y_1)D^{bb_2}(x-y_2)\partial^\mu D^{aa_2}(x_2-x)\delta^4(z_3-y_1)\delta^{fb_1}\delta^{\rho\nu}\delta^{eb_2}\delta^4(z_2-y_2)\delta^{da_2}\delta^4(z_1-x_2)\Big]Z_0$$

$$= gf^{abc}(\frac{1}{i})^2\int d^4x[D^{cf}_{\mu\nu}(x-z_3)D^{be}(x-z_2)\partial^\mu D^{ad}(z_1-x)\delta^{\rho\nu}]Z_0$$

Z_0 の $J,\xi,\overline{\xi}$ を 0 にすれば

$$G^{a_1a_2a_3(3)}(z_1,z_2,z_3) = -gf^{abc}\int d^4x[D^{ca_3}_{\mu\nu}(x-z_3)D^{ba_2}(x-z_2)\partial^\mu D^{aa_1}(z_1-x)]$$

これでゲージ場とゴースト場 2 つが結合して頂点を作っていることがわかります。伝播関数を運動量の積分で書けば、(1) で $g_{\mu\nu}+(\alpha-1)k_\mu k_\nu/k^2 = K_{\mu\nu}$ として

$$G^{a_1a_2a_3(3)}(z_1,z_2,z_3) = -igf^{abc}\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\delta^{ca_3}K_{\mu\nu}}{k^2}e^{-ik(x-z_3)}\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\delta^{ba_2}}{k_2^2}e^{-ik_2(x-z_2)}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\delta^{aa_1}}{k_1^2}k_{1\mu}e^{-ik_1(z_1-x)}$$

$$= -igf^{abc}\int d^4x\int d^4kd^4k_1d^4k_2\frac{k_{1\mu}}{(2\pi)^{12}}e^{-i(k+k_1-k_2)x}e^{ikz_3}e^{ik_2z_2}e^{-ik_1z_1}(-\frac{\delta^{ca_3}K_{\mu\nu}}{k^2}\frac{\delta^{ba_2}\delta^{aa_1}}{k_1^2k_2^2})$$

$$= -igf^{abc}\int d^4kd^4k_1d^4k_1\frac{k_{1\mu}}{(2\pi)^{12}}(2\pi)^4\delta(k+k_1-k_2)e^{ikz_3}e^{ik_2z_2}e^{-ik_1z_1}(-\frac{\delta^{ca_3}K_{\mu\nu}}{k^2}\frac{\delta^{ba_2}\delta^{aa_1}}{k_1^2k_2^2})$$

$$= -igf^{abc}\int d^4k_1d^4k_2\frac{k_{1\mu}}{(2\pi)^8}e^{ikz_3}e^{ik_2z_2}e^{-ik_1z_1}(-\frac{\delta^{ca_3}K_{\mu\nu}}{k^2}\frac{\delta^{ba_2}\delta^{aa_1}}{k_1^2k_2^2})$$

$$= -igf^{abc}\int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}e^{i(-k_1z_1+k_2z_2+kz_3)}(-\frac{\delta^{ca_3}K_{\mu\nu}}{k^2}\frac{\delta^{ba_2}}{k_1^2}\frac{\delta^{aa_1}}{k_2^2})k_{1\mu}\qquad(k=k_1-k_2)$$

$$= -igf^{abc}\int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}e^{i(-k_1z_1+k_2z_2+kz_3)}D^{ca_3}_{\mu\nu}(x-z_3)D^{ba_2}(x-z_2)D^{aa_1}(z_1-x)k_{1\mu}$$

$$= -i\frac{1}{i^3}gf^{abc}\int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}k_{1\mu}e^{i(-k_1z_1+k_2z_2+kz_3)}iD^{ca_3}_{\mu\nu}(x-z_3)iD^{ba_2}(x-z_2)iD^{aa_1}(z_1-x)$$

$$= gf^{abc}\int\frac{d^4k_1d^4k_2}{(2\pi)^8}k_{1\mu}e^{i(-k_1z_1+k_2z_2+kz_3)}iD^{ca_3}_{\mu\nu}(x-z_3)iD^{ba_2}(x-z_2)iD^{aa_1}(z_1-x)$$

というわけで、これによってゲージ場-ゴースト場-ゴースト場での頂点は

$$gf_{abc}k_\mu$$

となります。式だけだと記号が何に対応しているのかが分かりづらいので、a,b,c や k が何に対応しているのかは一番下に乗せている図を見て確認してください (伝播関数の上についてる添え字で判別します)。また、グラスマン数の場合は汎関数微分の並びに注意、今の表記では z_2 から z_1 へ進む。
相互作用ラグランジアンの残りの項である

$$-\frac{1}{2}gf^{abc}(\partial^\mu A^{\nu a}-\partial^\nu A^{\mu a})A^b_\mu A^c_\nu-\frac{1}{4}g^2f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d}A^{\nu e}$$

この二つは見て予想できるように、ゲージ場が 3 つ結合したものと 4 つ結合したものを表現します。第一項から見ていきます。ファインマン則を求めるには今してきたように経路積分を真面目に計算していかなくても頂点部分だけを知りたいなら、運動量表示に直して汎関数微分をすることでも出てきます (というより、このことをちゃんとやったのが上で見てきたものです)。第一項の運動量表示は

$$-\frac{1}{2}gf^{abc}\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3(ip_1^\mu A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^{\mu a}(p_1))A^b_\mu(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3)$$

これを汎関数微分します

$$\frac{\delta^3}{\delta A^{\rho i}(k_1)\delta A^{\lambda j}(k_2)\delta A^{\tau k}(k_3)}\Big\{-\frac{1}{2}gf^{abc}\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3$$

$$\big(ip_1^\mu A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^{\mu a}(p_1)\big)A^b_\mu(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3)\Big\}$$

$$=\frac{\delta^2}{\delta A^{\rho i}(k_1)\delta A^{\lambda j}(k_2)}\Big[-\frac{1}{2}gf^{abc}\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3$$

$$\Big\{\big(ip_1^\mu\delta^{\nu\tau}\delta^{ak}\delta^4(k_3-p_1)\big)A^b_\mu(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3)$$

$$+\big(-ip_1^\nu\delta^{\mu\tau}\delta^{ak}\delta^4(k_3-p_1)\big)A^b_\mu(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3)$$

$$+\big(ip_1^\mu A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^{\mu a}(p_1)\big)g^{\tau\mu}\delta^{kb}\delta^4(k_3-p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3)$$

$$+\big(ip_1^\mu A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^{\mu a}(p_1)\big)A^b_\mu(p_2)g^{\tau\nu}\delta^{kc}\delta^4(k_3-p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3)\Big\}\Big]\quad(\frac{\delta A_\mu}{\delta A^\nu}=g_{\mu\alpha}\frac{\delta A^\alpha}{\delta A^\nu}=g_{\mu\alpha}\delta^{\alpha\nu}=g_{\mu\nu})$$

$$=\frac{\delta^2}{\delta A^{\rho i}(k_1)\delta A^{\lambda j}(k_2)}$$

$$\Big\{-\frac{1}{2}gf^{abc}\int d^4p_2d^4p_3(ik_3^\mu\delta^{\nu\tau}\delta^{ak})A^b_\mu(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3)$$

$$-\frac{1}{2}gf^{abc}\int d^4p_2d^4p_3(-ik_3^\nu\delta^{\mu\tau}\delta^{ak})A^b_\mu(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3)$$

$$-\frac{1}{2}gf^{abc}\int d^4p_1d^4p_3(ip_1^\mu A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^{\mu a}(p_1))g^{\tau\mu}\delta^{kb}A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+p_3)$$

$$-\frac{1}{2}gf^{abc}\int d^4p_1d^4p_2(ip_1^\mu A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^{\mu a}(p_1))A^b_\mu(p_2)g^{\tau\nu}\delta^{kc}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+k_3)\Big\}$$

$$=\frac{\delta^2}{\delta A^{\rho i}(k_1)\delta A^{\lambda j}(k_2)}$$

$$\Big\{-\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3(ik_3^\mu A^b_\mu(p_2)A^c_\tau(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3))$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3(ik_3^\nu A^b_\tau(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3))$$

$$-\frac{1}{2}gf^{akc}\int d^4p_1d^4p_3(ip_{1\tau}A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^a_\tau(p_1))A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+p_3)$$

$$-\frac{1}{2}gf^{abk}\int d^4p_1d^4p_2(ip_1^\mu A^a_\tau(p_1)-ip_{1\tau}A^{\mu a}(p_1))A^b_\mu(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+k_3)\Big\}$$

$$=\frac{\delta^2}{\delta A^{\rho i}(k_1)\delta A^{\lambda j}(k_2)}$$

$$\Big\{-\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3(ik_3^\mu A^b_\mu(p_2)A^c_\tau(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3))$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3(ik_3^\nu A^b_\tau(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3))$$

$$-\frac{1}{2}gf^{akc}\int d^4p_1d^4p_3(ip_{1\tau}A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^a_\tau(p_1))A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+p_3)$$

$$-\frac{1}{2}gf^{akb}\int d^4p_1d^4p_2(ip_{1\tau}A^{\mu a}(p_1)-ip_1^\mu A^a_\tau(p_1))A^b_\mu(p_2)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+k_3)\Big\}$$

$$=\frac{\delta^2}{\delta A^{\rho i}(k_1)\delta A^{\lambda j}(k_2)}$$

$$\Big\{-\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3(ik_3^\mu A^b_\mu(p_2)A^c_\tau(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3))$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3(ik_3^\nu A^b_\tau(p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3))$$

$$-gf^{akc}\int d^4p_1d^4p_3(ip_{1\tau}A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^a_\tau(p_1))A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+p_3)\Big\}$$

$$=\frac{\delta}{\delta A^{\rho i}(k_1)}$$

$$\Big\{-\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3ik_3^\mu\delta^{bj}g^{\lambda\mu}\delta^4(k_2-p_2)A^c_\tau(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3)$$

$$-\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3ik_3^\mu A^b_\mu(p_2)\delta^{cj}g^{\lambda\tau}\delta^4(k_2-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3)$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3ik_3^\nu\delta^{bj}g^{\lambda\tau}\delta^4(k_2-p_2)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3)$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kbc}\int d^4p_2d^4p_3ik_3^\nu A^b_\tau(p_2)\delta^{cj}g^{\lambda\nu}\delta^4(k_2-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+p_3)$$

$$-gf^{akc}\int d^4p_1d^4p_3\big(ip_{1\tau}\delta^{\lambda\nu}\delta^{aj}\delta^4(k_2-p_1)-ip_1^\nu g^{\lambda\tau}\delta^{aj}\delta^4(k_2-p_1)\big)A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+p_3)$$

$$-gf^{akc}\int d^4p_1d^4p_3\big(ip_{1\tau}A^{\nu a}(p_1)-ip_1^\nu A^a_\tau(p_1)\big)g^{\lambda\nu}\delta^{cj}\delta^4(k_2-p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+p_3)\Big\}$$

$$=\frac{\delta}{\delta A^{\rho i}(k_1)}$$

$$\Big\{-\frac{1}{2}gf^{kjc}\int d^4p_3ik_{3\lambda}A^c_\tau(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_2+p_3)$$

$$-\frac{1}{2}gf^{kbj}\int d^4p_2ik_3^\mu A^b_\mu(p_2)g^{\lambda\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+k_2)$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kjc}\int d^4p_3ik_3^\nu g^{\lambda\tau}A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_2+p_3)$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kbj}\int d^4p_2 ik_{3\lambda}A^b_\tau(p_2)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+k_2)$$

$$-gf^{jkc}\int d^4p_3(ik_{2\tau}A^c_\lambda(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+p_3)$$

$$+gf^{jkc}\int d^4p_3 ik_2^\nu g^{\lambda\tau}A^c_\nu(p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+p_3)$$

$$-gf^{akj}\int d^4p_1(ip_{1\tau}A^a_\lambda(p_1)-ip_{1\lambda}A^a_\tau(p_1))(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+k_2)\Big\}$$

$$=-\frac{1}{2}gf^{kjc}\int d^4p_3 ik_{3\lambda}\delta^{ic}g^{\rho\tau}\delta^4(k_1-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_2+p_3)$$

$$-\frac{1}{2}gf^{kbj}\int d^4p_2 ik_3^\mu\delta^{ib}g^{\rho\mu}\delta^4(k_1-p_2)g^{\lambda\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+k_2)$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kjc}\int d^4p_3 ik_3^\nu g^{\lambda\tau}\delta^{ic}g^{\rho\nu}\delta^4(k_1-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_2+p_3)$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kbj}\int d^4p_2 ik_{3\lambda}\delta^{ib}g^{\rho\tau}\delta^4(k_1-p_2)(2\pi)^4\delta^4(k_3+p_2+k_2)$$

$$-gf^{jkc}\int d^4p_3(ik_{2\tau}\delta^{ic}g^{\rho\lambda}\delta^4(k_1-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+p_3)$$

$$+gf^{jkc}\int d^4p_3 ik_2^\nu g^{\lambda\tau}\delta^{ic}g^{\rho\nu}\delta^4(k_1-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+p_3)$$

$$-gf^{akj}\int d^4p_1(ip_{1\tau}\delta^{ia}g^{\rho\lambda}\delta^4(k_1-p_1)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+k_2)$$

$$+gf^{akj}\int d^4p_1 ip_{1\lambda}\delta^{ia}g^{\rho\tau}\delta^4(k_1-p_1)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k_3+k_2)$$

$$=-\frac{1}{2}gf^{kji}ik_{3\lambda}g^{\rho\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_2+k_1)-\frac{1}{2}gf^{kij}ik_{3\rho}g^{\lambda\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_1+k_2)$$

$$+\frac{1}{2}gf^{kji}ik_{3\rho}g^{\lambda\tau}\delta^4(k_1-p_3)(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_2+k_1)+\frac{1}{2}gf^{kij}ik_{3\lambda}g^{\rho\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_1+k_2)$$

$$-gf^{jki}(ik_{2\tau}g^{\rho\lambda}(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+k_1)+gf^{jki}ik_{2\rho}g^{\lambda\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+k_1)$$

$$-gf^{ikj}ik_{1\tau}g^{\rho\lambda}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_3+k_2)+gf^{ikj}ik_{1\lambda}g^{\rho\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_3+k_2)$$

$$=-gf^{kji}ik_{3\lambda}g^{\rho\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_2+k_1)-gf^{kij}ik_{3\rho}g^{\lambda\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_1+k_2)$$

$$-gf^{jki}(ik_{2\tau}g^{\rho\lambda}(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+k_1)+gf^{jki}ik_{2\rho}g^{\lambda\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+k_1)$$

$$-gf^{ikj}ik_{1\tau}g^{\rho\lambda}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_3+k_2)+gf^{ikj}ik_{1\lambda}g^{\rho\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_3+k_2)$$

$$=-gf^{kji}i(k_{3\lambda}-k_{1\lambda})g^{\rho\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_2+k_1)-gf^{kij}i(k_{3\rho}-k_{2\rho})g^{\lambda\tau}(2\pi)^4\delta^4(k_3+k_1+k_2)$$

$$-gf^{jki}i(k_{2\tau}-k_{1\tau})g^{\rho\lambda}(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+k_1)$$

$$=igk^{ijk}[(k_{3\lambda}-k_{1\lambda})g^{\rho\tau}+(k_{2\rho}-k_{3\rho})g^{\lambda\tau}+(k_{1\tau}-k_{2\tau})g^{\rho\lambda}](2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3+k_1)$$

この手順だと今の伝播関数の定義に合わせる為に、最後に i をかける必要があります。それによってゲージ場が３つ結

合しているときのファインマン則は (デルタ関数の部分は除いて)

$$-gf^{ijk}[(k_{3\lambda}-k_{1\lambda})g^{\rho\tau}+(k_{2\rho}-k_{3\rho})g^{\lambda\tau}+(k_{1\tau}-k_{2\tau})g^{\rho\lambda}]$$

残りの４つ結合している場合は汎関数微分を 4 回行うんですが、これは 24 個添え字を変えただけの項が出現し、それの添え字をいじっていくことで求められます。面倒なので結果だけ示せば

$$-ig^2[f_{abe}f_{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}-g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho})+f_{ace}f_{edb}(g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}-g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda})+f_{ade}f_{ebc}(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}-g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda})]$$

このようになっています。ちなみに生成汎関数の方法でやっていくなら

$$\begin{aligned}
&-i\int d^4x\frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}\frac{\delta^4}{\delta J^{\mu a}\delta J^{\nu b}\delta J^c_\mu\delta J^d_\nu}Z^G_0 \\
&\quad=-i\frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}\int d^4xd^4y_1d^4y_2d^4y_3d^4y_4 \\
&\qquad\times D^{aa_1}_{\mu\mu_1}(x-y_1)D^{ba_2}_{\nu\mu_2}(x-y_2)D^{\mu ca_3}_{\mu_3}(x-y_3)D^{\nu da_4}_{\mu_4}(x-y_4)J^{\mu_1a_1}(y_1)J^{\mu_2a_2}(y_2)J^{\mu_3a_3}(y_3)J^{\mu_4a_4}(y_4)
\end{aligned}$$

これを 4 回 J で汎関数微分すればいいです。
後はフェルミオンと結合している場合を考えます。相互作用ラグランジアンは

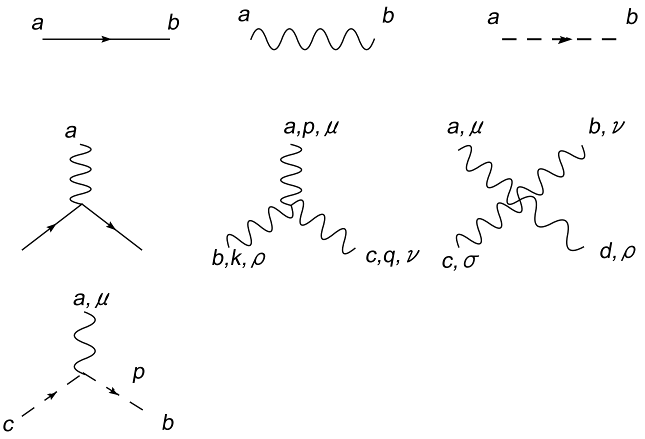
$$\mathcal{L}^f_{int}=\overline{\psi}^i(g\gamma^\mu A^a_\mu t^a))\psi^j$$

この部分からの頂点は、上の方法を使うなら運動量表示

$$\int d^4p_1d^4p_2d^4p_3\overline{\psi}^i(p_1)(g\gamma^\mu A^a_\mu(p_2)t^a))\psi^j(p_3)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3)$$

に直して、$\overline{\psi},\psi,A_\mu$ で汎関数微分すればすぐに出てきますし、電磁場の相互作用と同じ形で余計なものとして t^a がいるだけだと考えてしまい、$ig\gamma^\mu t^a$ だとすぐに分かります。
というわけで、QED ではゲージ場 (電磁場) はゲージ場とは結合せずにフェルミオンとしか結合していませんでしたが、非可換ゲージ場ではゲージ場自体が結合したものが出てき、さらにゴースト場によるファインマン則が出てきます。この非可換ゲージ場のファインマン則はそのまま QCD(量子色力学) に使われ、フェルミオンがクォーク、非可換ゲージ場がグルーオンになり、ローマ字の添え字は $SU(3)$ つまりカラー自由度に対応します。

最後にファインマン則をまとめておきます



一番上の段がフェルミオン、ボソン、ゴースト伝播関数、二段目がボソン・フェルミオン・フェルミオン頂点、ボソンによる 3 点頂点、ボソンによる 4 点頂点、三段目がボソン・ゴースト・ゴースト頂点。p, q, k は運動量、ローマ字が内部自由度、ギリシャ文字が 4 次元の添え字です。ボソンによる 3 点頂点、ボソンによる 4 点頂点でのボソンの向きは真ん中に向かっています。

- フェルミオン伝播関数 $\dfrac{i\delta_{ab}}{\not{p}-m}$

- ボソン伝播関数 $-i\delta_{ab}(\dfrac{g_{\mu\nu}}{p^2}-(1-\alpha)\dfrac{p_\mu p_\nu}{p^2})$

- ゴースト伝播関数 $\dfrac{i\delta_{ab}}{p^2}$

- ボソン・フェルミオン・フェルミオン頂点 $ig\gamma^\mu t^a$

- ボソンによる 3 点頂点

$$gf_{abc}[g^{\mu\nu}(p-q)^\rho+g^{\nu\rho}(q-k)^\mu+g^{\rho\mu}(k-p)^\nu]$$

- ボソンによる 4 点頂点

$$-ig^2[f_{abe}f_{cdr}(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})+f_{ace}f_{bde}(g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})+f_{ade}f_{bce}(g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho}-g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})]$$

- ボソン・ゴースト・ゴースト頂点 $gf_{abc}p_\mu$

フェルミオンのループがあれば-tr をつけ、そしてゴーストのループに対しては-をつけます。ゴーストでマイナスが付くのは反交換するせいで、tr がつかないのは γ 行列に対応する行列ではないからです。