

経路積分～クライン・ゴールドン場～

経路積分を使って実数クライン・ゴールドン場での計算をしていきます。ここでするのは $Z[J]$ からクライン・ゴールドン場での n 点相関関数を求めることです。

$Z[J]$ は

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) + J(x)\phi(x) + \frac{1}{2}i\epsilon\phi^2) \right]$$

利便性のために減衰項を $(1/2)i\epsilon\phi^2$ としています。ラグランジアン密度として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

これを代入して

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 + i\epsilon\phi^2) + J\phi \right) \right]$$

この積分を計算していきます (Z_0 は相互作用がない場合という意味です)。まず、 $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ の部分は

$$\int d^4x \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \int d^4x \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \int d^4x \phi\Box\phi \quad (1)$$

第一項はガウスの定理によって

$$\int d^4x \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) = \int_S dS_\mu \phi\partial^\mu\phi$$

という 4 次元空間上での表面積分になります。無限遠での面 S 上で ϕ は 0 になるとして (もしくは表面積分は境界の条件で決まる定数なので、オイラー・ラグランジュ方程式に寄与しないことから無視する)、この項は消します。よって

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}(-\phi\Box\phi - m^2\phi^2 + i\epsilon\phi^2) + J\phi \right) \right] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi - J\phi \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

場 $\phi(x)$ を $\phi(x) + \phi'(x)$ というように変数変換をします (この変数変換で測度 $\mathcal{D}\phi$ は変化しません)。

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\phi + \phi') (\square + m^2 - i\epsilon) (\phi + \phi') - J(\phi + \phi') \right) \right] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi + \frac{1}{2} \phi' (\square + m^2 - i\epsilon) \phi' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi' + \frac{1}{2} \phi' (\square + m^2 - i\epsilon) \phi - J(\phi + \phi') \right) \right] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi + \frac{1}{2} \phi' (\square + m^2 - i\epsilon) \phi' + \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi' - J(\phi + \phi') \right) \right]
\end{aligned}$$

最後の部分で

$$\int d^4x \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi' = \int d^4x \phi' (\square + m^2 - i\epsilon) \phi$$

を使っています。この関係を求めるには

$$\int d^4x \partial_\mu (\phi + \phi') \partial^\mu (\phi + \phi') = \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi' + \partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi')$$

これらの各項に対して (1) と同じことをやっていけば、 $\partial_\mu \phi' \partial^\mu \phi, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi'$ の部分は等しいことから

$$\int d^4x \phi' \square \phi = \int d^4x \phi \square \phi'$$

となります。 ϕ' が方程式として

$$(\square + m^2 - i\epsilon) \phi'(x) = J(x)$$

このように外場があるときのクライン・ゴールドン方程式を満たしているとすれば

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi + \frac{1}{2} \phi' J + \phi J - J(\phi + \phi') \right) \right] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi - \frac{1}{2} J \phi' \right) \right]
\end{aligned}$$

また、 ϕ' がその方程式に従うなら解はグリーン関数によって

$$\phi' = - \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y)$$

$$(\square + m^2 - i\epsilon) \Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$$

と書け (右辺に i をつけて定義する場合があります)、これは式を見て分かるようにクライン・ゴールドン場の伝播関数です。

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi + \frac{1}{2} \int d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right) \right] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]
\end{aligned}$$

そうすると始めの $\exp$ 部分だけが $\mathcal{D}\phi$ の積分に引っかかり何かしらの定数になってしまうのはすぐにわかるので、 $\mathcal{N}$ の中にいれてしまって

$$Z_0[J] = \mathcal{N}' \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]$$

$\mathcal{N}'$ を決定させてすっきりさせます。規格化の条件は

$$Z_0[0] = 1$$

なので、(2) に戻って

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi - J\phi \right) \right] \\
\Rightarrow Z_0[0] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi \right] = 1
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi \right]} \\
&= \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]
\end{aligned}$$

結局この伝播関数部分のみが生き残ります。この結果からも分かるように規格化 $Z_0[0] = 1$ を踏まえた $Z_0[J]$ は

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]}$$

となっています。

$\Delta_F(x-y)$ はクライン・ゴールドン場の伝播関数なのでフーリエ変換によって

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \Delta_F(p) \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$

見て分かるように、「クライン・ゴールドン場～伝播関数～」で使っていた伝播関数とは i があるかないかの違いになっています。「クライン・ゴールドン場～伝播関数～」のところでは

$$(\square + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$$

$$D(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

としていたんですが、ここでは i を外に出して $i\Delta_F(x-y) = D(x-y)$ となっています。これから見ていくと分かりますが、 $Z[J]$ から導かれるのは i が含まれたものなので、今までどおり $i\Delta_F$ を伝播関数とします。また、分母に収束させるために入れた $i\epsilon$ が、そのまま極をずらすものとして自動的に入ってきています。これは時間軸を回転させる $i\delta$ でも同様のことです。結局今の $i\epsilon$ も時間軸を回転させる $i\delta$ も、極である $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ が軸上にいるかズラすのかという動きに関係してきます。なので、収束させようとしたことがそのまま積分経路の極に対する振る舞い (境界条件) に繋がっていたという重要な結果が分かったことになります。

ここでユークリッド化について触れておきます。「経路積分」でも触れていましたが、ユークリッド化の方法においては

$$p_4 = -ip_0$$

$$p_E^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -p^2$$

$$d^4p_E = d^3p dp_4 = -id^3p dp_0 = -id^4p$$

このように、運動量の虚軸への回転を定義します。 x_0 は $x_4 = ix_0$ とするので、この定義でのユークリッド空間での内積 $p_E \cdot x_E$ は

$$p_E \cdot x_E = p_4 x_4 + \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}_E$$

となっているのに対して、今の選びかただと ($ix_0 = x_4, -ip_0 = p_4$)

$$p \cdot x = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p_4 x_4 - \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}_E$$

となっており、ユークリッド空間の内積にはなりません。その代わり、フーリエ変換を行うときに、通常通りの形の平面波によるものを使用できます。もし、ユークリッド空間での $p_E \cdot x_E$ に合わせるなら

$$ix_0 = x_4, \quad ip_0 = p_4$$

のように、両方とも同じ方向で虚軸に向かって回転させます。ここでのユークリッド化と言ったときには $ix_0 = x_4, -ip_0 = p_4$ を選んで行います。

ユークリッド化は積分変数の変数変換ではないということを再度注意しておきます。これはユークリッド化は複素平面上での実軸を虚軸に回転させるという作業だからです。つまり、 x_0 の実軸が虚軸に回転させられたものが x_4 の複素平面上での実軸と対応するようになっています。そのため、積分範囲は $-\infty \sim +\infty$ のままです。 x_0 と p_0 で回転させる方向 (符号) が変わっているので積分範囲も逆になりそうですが、 x_4 と p_4 の実軸の方向は同じで、違うのは虚軸側なので (虚軸の向きが逆になる)、 p_4 も $-\infty \sim +\infty$ です。

この状況での伝播関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x) &= i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(p_4 x_4 - \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}_E)}}{-p_E^2 - m^2} \\
&= -i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(p_4 x_4 + \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}_E)}}{p_E^2 + m^2} \\
&= -i \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i p_E x_E}}{p_E^2 + m^2}
\end{aligned}$$

二行目にいくときに、 $\mathbf{p}_E \rightarrow -\mathbf{p}_E$ とすることで、ユークリッド空間での内積で書くことができます。ユークリッド座標にすることで分母に $i\epsilon$ の項を含めなくても、極は $p_4 = \pm i\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ と最初から虚数となり実軸上にはいません。そして、さらに上手いことできていて、ユークリッド空間での伝播関数をミンコフスキー空間へ接続すると、 $i\epsilon$ を含んだ伝播関数が導かれます。つまり、極を避けるような境界条件が自然と出てきます。

このことは、ユークリッド空間からミンコフスキー空間へ解析接続することで現われる p_0 積分の積分経路が $-i\infty$ から $+i\infty$ であることから分かります。そして、ミンコフスキー空間の伝播関数の分母は $p^2 - m^2$ となっているために、 $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ で極を持っています。そのため、この $-i\infty$ から $+i\infty$ の経路を実軸に移そうとするとときに (時計周りに)、この極に当たらないように実軸に移す必要性が自動的に出てきます。当たらないようにするためには、 $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ の上側を、 $p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ の下側を通るようにすればいいです。これは明らかにファインマンによって与えられた伝播関数に対する積分経路であり、極を避けるというのは分母に $i\epsilon$ を加えることにそのまま対応します (分かりづらいのでそのうち経路の図を載せます)。

ユークリッド化 (ウィック回転) は物理ではかなり多用されているんですが、数学的には十分に証明されていません。ユークリッド化は数学での解析接続に当たり、真面目に解析接続を使ってユークリッド化を行うのはかなり複雑な問題のようです。それでもユークリッド化によって問題なく話を進められるので細かいことには突っ込まずに使いましょうということみたいです。

ユークリッド化の話は終わりにして伝播関数部分についてさらに見ていきます。 $Z_0[J]$ を展開してみると

$$\begin{aligned}
Z_0[J] &= \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\
&= \left(1 - \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \left(\int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)^2 + \dots \right)
\end{aligned}$$

$J(x)$ はフーリエ変換によって

$$J(x) = \int d^4 p J(p) e^{-ipx}$$

これを使い、一次の項は

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x d^4 y d^4 p d^4 k_1 d^4 k_2 J(k_1) e^{-ik_1 x} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} J(k_2) e^{-ik_2 y} \\
&= -\frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x d^4 y d^4 p d^4 k_1 d^4 k_2 J(k_1) J(k_2) e^{-i(k_1+p)x} e^{-i(k_2-p)y} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= -\frac{i}{2} (2\pi)^4 \int d^4 p d^4 k_1 d^4 k_2 J(k_1) J(k_2) \delta^4(k_1+p) \delta^4(k_2-p) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= -\frac{i}{2} (2\pi)^4 \int d^4 p J(-p) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} J(p)
\end{aligned}$$

ここで図との対応として、
伝播関数

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \text{---}$$

外線

$$i(2\pi)^4 J(p) = \text{---} \times$$

こうすることで、図として

$$\times \text{---} \times$$

このように書くことができます (正確には $1/2$ の係数がつきます)。これは一つの粒子の源 J から源 J への伝播を表しています。 $Z_0[J]$ を図で書けば

$$Z_0 = 1 + \frac{1}{2} \times \text{---} \times + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \begin{array}{c} \times \text{---} \times \\ \times \text{---} \times \end{array} + \dots$$

つまり、それぞれの項で一つの粒子から多粒子にいたる源から源への伝播によって構成されているということです。このように Z_0 の中に伝播関数 (グリーン関数) が含まれており、こういったことから Z のことをグリーン関数 (相関関数) の生成汎関数 (generating functional) と呼びます。すでに n 点相関関数と $Z_0[J]$ の関係はわかっているので、その n 点相関関数を取り出します。

$$\langle 0|T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n))|0\rangle = \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

まずは 1 個の場合

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} &= \frac{1}{i} \frac{\delta \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]}{\delta J(x_1)} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y (\delta^4(x-x_1) \Delta_F(x-y) J(y) + J(x) \Delta_F(x-y) \delta^4(y-x_1)) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int d^4y \Delta_F(x_1-y) J(y) + \int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_1) \right) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned}$$

$\Delta_F(x-y) = \Delta_F(y-x)$ から、第一項と第二項は同じ積分になっているので一つにしてしまっても

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} \Big|_{J=0} &= - \int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_1) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

つまり 1 点相関関数は 0 です。2 点相関関数では

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} &= -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_2) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0} \\
&= i \int d^4x \delta^4(x-x_1) \Delta_F(x-x_2) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0} \\
&= i \Delta_F(x_1-x_2) = D(x_1-x_2)
\end{aligned}$$

これで 2 点相関関数としてクライン・ゴールドン場の伝播関数がちゃんと出てくることが確かめられました。面倒なので途中計算を書きませんが 3 点相関関数は 0 です。4 点では

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i^4} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} &= -\Delta_F(x_1-x_2) \Delta_F(x_3-x_4) - \Delta_F(x_1-x_3) \Delta_F(x_2-x_4) - \Delta_F(x_1-x_4) \Delta_F(x_2-x_3) \\
&= D(x_1-x_2) D(x_3-x_4) + D(x_1-x_3) D(x_2-x_4) + D(x_1-x_4) D(x_2-x_3)
\end{aligned}$$

ここから出てくる相関関数のファインマン則については正準量子化でのファインマン則のところをみてください。