

経路積分～クライン・ゴールドン場 (相互作用あり)～

相互作用がある場合での n 点相関関数がどのように求められ、ファインマン図とどう対応するのか見ていきます。

最初にこれから頻繁に出てくる関係を出しておきます。発想は単純で

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J(x)\phi(x)) \right] = \phi(z) \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J(x)\phi(x)) \right]$$

という $\exp$ の微分による性質を使います。この両辺を見比べれば、右辺の $\phi(x)$ は

$$\phi(x) \Rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}$$

と置き換えられることがわかり、経路積分での $\mathcal{D}\phi$ 積分の中にいる ϕ を J による汎関数微分に置き換えることで $\mathcal{D}\phi$ の外に出せるようになります。例えば

$$\int \mathcal{D}\phi \phi(z) \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J(x)\phi(x)) \right] = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J(x)\phi(x)) \right]$$

このように $\mathcal{D}\phi$ の積分の外に出して書くことができます。なので、規格化 $Z[J=0] = 1$ から

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}) \right]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]}$$

と定義される $Z[J]$ の汎関数微分は

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(z) \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]}$$

となります。 $Z[J]$ の分母は $Z[J=0]$ です。ついでに作用

$$S_0[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}_0, \quad S[\phi] = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int})$$

$$S_0[\phi, J] = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi), \quad S[\phi, J] = \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J\phi)$$

も定義しておきます。こうすれば

$$\int \mathcal{D}\phi \phi(z) \exp[iS[\phi, J]] = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi, J]]$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} Z[J] = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi, J]]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi]]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(z) \exp[iS[\phi, J]]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi]]}$$

と書けます。

相互作用ありのラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{L}_{int}$$

このように設定し、相互作用がある場合の経路積分を計算していきます。ここで問題になるのは相互作用項をどう扱うかです。素直に考えれば

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi, J]] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{L}_{int} + J\phi \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \right] \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) \right] \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi \right) \right] \\ &= \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) \right] \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

として、相互作用項を積分から分離させればいいです。 ϕ から $\delta/i\delta J$ への置き換えは $Z_0[J]$ に作用すること前提ですが、 $\exp$ を展開すればそうになっていることはすぐに分かります。しかし、本当にこれでいいのか確かめておきます。

$Z[J]$ の方程式を作って、(1) がその解になっていることを示します。まずは $Z_0[J]$ の方程式を出します。 $Z_0[J]$ は $\mathcal{L}_{int} = 0$ の場合です。 $Z_0[J]$ に対する方程式として、「経路積分～クライン・ゴールドン場～」での $Z_0[J]$

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2}\phi(\square + m^2 - i\epsilon)\phi - J\phi \right) \right] \\ &= \mathcal{N}' \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned}$$

の汎関数微分 $\delta Z_0[J]/\delta J(x)$ に $(\square + m^2)$ を作用させて、 Z_0 の方程式を

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} &= -(\square + m^2) \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ &= \int d^4y \delta^4(x-y) J(y) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ &= J(x) Z_0[J] \end{aligned}$$

として作れます。同じことを $Z[J]$ でも行います。ここで新しく

$$Z'[\phi] = \frac{\exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}) \right]} = \frac{\exp[iS[\phi]]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi]]}$$

という $Z[J]$ の分子から $\mathcal{D}\phi$ 積分と $\exp$ 内の $J\phi$ を抜いたものを定義して、 $\phi(x)$ で汎関数微分し

$$\begin{aligned}
i \frac{\delta Z'[\phi]}{\delta \phi(x)} &= i \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \frac{\exp[iS[\phi]]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi]]} \\
&= i \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \frac{\exp \left[-i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi(\square + m^2) \phi - \mathcal{L}_{int} \right) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi]]} \\
&= i(-i) \int d^4x \left(\frac{1}{2} \frac{\delta \phi}{\delta \phi} (\square + m^2) \phi + \frac{1}{2} \phi(\square + m^2) \frac{\delta \phi}{\delta \phi} - \frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\delta \phi} \right) Z'[\phi] \\
&= \left((\square + m^2) \phi - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \right) Z'[\phi] \tag{2}
\end{aligned}$$

$(\square + m^2)$ の左右は入れ替えても等しいということと、汎関数微分の性質

$$\frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int d^4x F(\phi(x)) = \frac{\partial F(\phi(y))}{\partial \phi(y)}$$

を使っています。これは $\delta S / \delta \phi$ から運動方程式が出てきただけです。これに、 $\exp[i \int d^4x J(x) \phi(x)]$ をかけて $\mathcal{D}\phi$ 積分を行うと

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi \left((\square + m^2) \phi - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \right) Z'[\phi] \exp \left[i \int d^4x J(x) \phi(x) \right] \\
&= \frac{\int \mathcal{D}\phi \left((\square + m^2) \phi - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \right) \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J(x) \phi(x)) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi]]} \\
&= (\square + m^2) \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi \exp[iS[\phi, J]]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi]]} - \frac{\int \mathcal{D}\phi \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \exp[iS[\phi, J]]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi]]} \\
&= (\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \Big|_{\phi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}} Z[J]
\end{aligned}$$

ϕ を $\delta / i \delta J$ におきかえて積分の外に出しています。(2) の左辺の $i \delta Z'[\phi] / \delta \phi(x)$ にも同じように、 $\exp[i \int d^4x J(x) \phi(x)]$ をかけて $\int \mathcal{D}\phi$ を作用させると、通常の部分積分のようにして

$$\begin{aligned}
i \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta Z'[\phi]}{\delta \phi(x)} \exp \left[i \int d^4x J(x) \phi(x) \right] &= i Z'[\phi] \exp \left[i \int d^4x J(x) \phi(x) \right] \Big|_{\phi \rightarrow \pm \infty} \\
&\quad + \int \mathcal{D}\phi J(x) Z'[\phi] \exp \left[i \int d^4x J(x) \phi(x) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\phi J(x) Z'[\phi] \exp \left[i \int d^4x J(x) \phi(x) \right] \\
&= J(x) Z[J]
\end{aligned}$$

第一項は境界 ($\phi \rightarrow \pm \infty$) で消えるとしています。というわけで、方程式として

$$(\square + m^2) \frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \phi} \Big|_{\phi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}} Z[J] = J(x) Z[J]$$

というのを得ることが出来ます。この解は

$$Z[J] = N \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] Z_0[J]$$

確かめるのは面倒なので省略します。これは (1) と一致しています。また、上でも触れたように $Z[J]$ は摂動展開できるとして

$$Z[J] = Z_0[J](1 + \lambda A[J] + \lambda^2 A^2[J] \cdots) = N \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] Z_0[J]$$

このようにしても出てきます。ちなみに、例えば Z の J の 2 回汎関数微分を見てみると

$$\left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + J\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}) \right]}$$

右辺の形が Gell-Mann-Low の定理での関係に似ていることが分かります。実際に、この右辺は相互作用ありでの 2 点相関関数に対応しているということが、相互作用のない真空での関係を同じように相互作用ありで行えば分かります。

具体的に ϕ^4 理論だとして $\mathcal{L}_{int}$ を

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 = -\frac{\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4$$

としてみています。これを入れれば

$$Z[J] = \frac{\exp \left[i \int d^4z \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]}{\exp \left[i \int d^4z \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0}}$$

まずは分子のほうを計算します。分母は分子の結果を $J = 0$ にするだけなので分子さえ求めてしまえばすぐに求められます。相互作用ラグランジアンを含んでいる $\exp$ 部分を展開して

$$\exp \left[\int d^4z \frac{-i\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \right] = 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 + \cdots$$

λ^0 のオーダーで $Z_0[J]$ に一致します。今問題にするのは λ が一次のオーダーのほうで

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]$$

これを計算します。マジメに 4 回微分を行っていきます

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] = - \int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^2 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] &= \left\{ i \Delta_F(z-z) + \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^2 \right\} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^3 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ = \left\{ -i \Delta_F(z-z) \int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) - i2 \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right) \Delta_F(z-z) - \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^3 \right\} \\ \quad \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ = \left\{ -3i \Delta_F(z-z) \int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) - \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^3 \right\} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ = \left\{ -3 (\Delta_F(z-z))^2 + 3i \Delta_F(z-z) \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^2 \right. \\ \quad \left. + 3i \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right) \Delta_F(z-z) + \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^4 \right\} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ = \left\{ -3 (\Delta_F(z-z))^2 + 6i \Delta_F(z-z) \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^2 + \left(\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^4 \right\} \\ \quad \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \end{aligned}$$

これを図にするときは

$$\begin{aligned} \Delta_F(z-z) &= \bigcirc \\ \Delta_F(x-y) &= \times \text{---} \times \end{aligned}$$

× になっているのは源 J を表現しています。これらの組み合わせでいいので

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]$$

$$= \left(-3 \bigcirc\!\!\!\bigcirc + 6i \times \text{---} \bigcirc \text{---} \times + \times \text{---} \times \right) \exp[\dots]$$

3とか6といった係数は同じ形のものがこの数だけ作れますよといったもので、対称因子に絡んでくるものです。ここでの図の特徴は「相関関数のファインマン則」でやったものなのでそっちをみてください。これで分子が終わったので分母に移りますが、やることは単純に $J = 0$ にすればいいので

$$\begin{aligned} & \exp \left[\int d^4 z \frac{-i\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \Big|_{J=0} \\ &= 1 - \frac{i\lambda}{4!} (-3 (\Delta_F(z-z))^2) \end{aligned}$$

というわけで、 $Z[J]$ は λ の一次のオーダーで

$$\begin{aligned} Z[J] &= \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z \left(-3 (\Delta_F(z-z))^2 + 6i \Delta_F(z-z) \left(\int d^4 x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^2 + \left(\int d^4 x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^4 \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} (-3 (\Delta_F(z-z))^2) \right\}^{-1} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ &= \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z \left(-3 (\Delta_F(z-z))^2 + 6i \Delta_F(z-z) \left(\int d^4 x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^2 + \left(\int d^4 x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^4 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z (-3 (\Delta_F(z-z))^2) \right\} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\ &= \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4 z \left(6i \Delta_F(z-z) \left(\int d^4 x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^2 + \left(\int d^4 x \Delta_F(z-x) J(x) \right)^4 \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \tag{3} \end{aligned}$$

このようにちゃんと真空泡の図は消えてくれます。

これで $Z[J]$ が求まったので、まずは相互作用ありでの二点相関関数 $u(x_1, x_2)$

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0}$$

を計算してみます。 $Z[J]$ の第一項は相互作用なしの自由な伝播関数になり、(3) の第三項は J を4つ含んでいることから $J = 0$ で消えるので、第二項だけを計算すればいいことになります。面倒なので

$$Z_0[J] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]$$

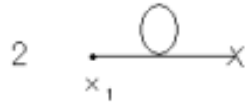
とします (規格化定数を抜いたもの)。 $J(x_1)$ に対する微分は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) J(y_1) J(y_2) \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \\
&= 2 \frac{1}{i} \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_2 \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-y_2) J(y_2) Z_0[J] \\
&\quad + \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) J(y_1) J(y_2) \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z_0[J]
\end{aligned} \tag{4}$$

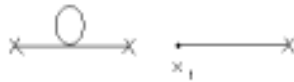
後はこれを $J(x_2)$ で微分して

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(\right) = -2 \Delta_F(z-z) \int dz^4 \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) Z_0[J] + \dots \tag{5}$$

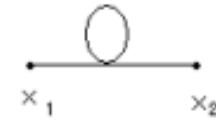
$J(x_2)$ の微分での $()$ は $J(x_1)$ の微分の結果のことで、 $\dots$ は $J=0$ で消える項です。これでなんとなく微分に関して法則性みたいなのがわかってきます。まず、1 階目の微分での一行目から二行目にいくときに、第一項に関しては



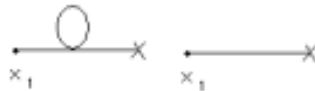
こんな図が書けて、対称であるために 2 倍になっています。第二項は $\exp$ を微分するだけで、それは



そして 2 回目の微分を実行すると、二行目の第一項から源 J が除かれて x_1 から x_2 への伝播として



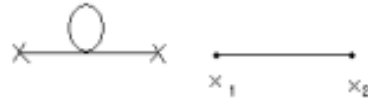
こうなり、 $\exp$ の方を微分したほうは



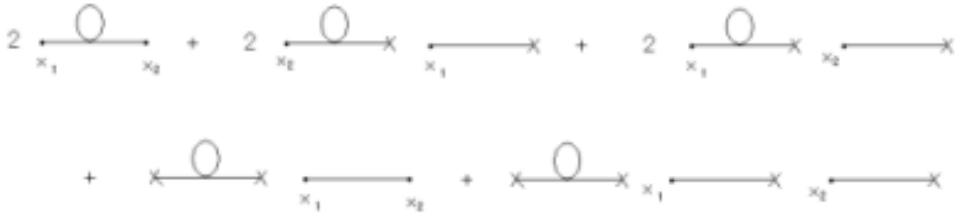
第二項では、源 J が一つ落ちるので



そして余分についている $\times_1 \longleftarrow \times$ を微分した



最後に $\exp$ を微分したやつが加わり、全体として



こうなっています。つまり微分の働きとしては

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \times \longleftarrow = \times_1 \longleftarrow$$

こうやって図で計算してしまいその後に式に対応させれば比較的楽になります。
微分の結果を $J = 0$ にして

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{4!} 6i2\Delta_F(z - z) \int d^4z \Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_2) \\ &= i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{\lambda}{2} \Delta_F(z - z) \int d^4z \Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_2) \end{aligned}$$

これが λ が 1 次までの相互作用ありでの二点相関関数 (伝播関数) になります。この相互作用による影響である第二項部分をもう少しみてみます。自由な伝播関数 $\Delta_F(x - y)$ は

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

なので

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(z - z) \int d^4z \Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_2) \\ &= -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(z - z) \int d^4z \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} \frac{e^{-ip(x_1-z)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{e^{-iq(x_2-z)}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(z - z) \int d^4z \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} \frac{e^{-ipx_1}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{e^{-iqx_2}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i(p+q)z} \\ &= -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(z - z) \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx_1}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{e^{-iqx_2}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \delta^4(p+q) \\ &= -\frac{\lambda}{2} \Delta_F(z - z) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \end{aligned}$$

これを代入して

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{\lambda}{2} \Delta_F(z-z) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \\
&= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left(1 + \frac{i\lambda}{2} \frac{\Delta_F(z-z)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)
\end{aligned}$$

この括弧の中は

$$\left(1 + \frac{i\lambda}{2} \frac{\Delta_F(z-z)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \simeq \left(1 - \frac{i\lambda}{2} \frac{\Delta_F(z-z)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^{-1}$$

と書けるので

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left(1 - \frac{i\lambda}{2} \frac{\Delta_F(z-z)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^{-1} \\
&= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 - \frac{i\lambda}{2} \Delta_F(z-z) + i\epsilon}
\end{aligned}$$

この意味は極の位置がさらに $\frac{i\lambda}{2} \Delta_F(z-z)$ の影響で動くということです。この余計な項を質量に関係させて

$$m_{phy}^2 = m^2 + \frac{i\lambda}{2} \Delta_F(z-z) = m^2 + \delta m^2$$

この m_{phy} が物理的な質量で、質量のくり込みです。質量のくり込みの詳しいことはここでは触れずにおきます。

次は 4 点相関関数 $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ です。今度は (3) の第三項も消えないので計算しないといけません。 λ が 0 次の部分である第一項は自由な 4 点での相関関数になり、「ウィックの定理」で示したように

$$-(\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3))$$

マイナスがつくのは $i\Delta_F = D$ だからです。相互作用部分に移って、(3) の第二項の汎関数微分を行う場合では、図の規則を使わず直接行っておきます。 $Z[J]$ の第二項部分を $Z_2[J]$ として

$$\frac{\delta^3}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)} Z_2[J]$$

とします。 Z_0 の汎関数微分を 1 回したものは

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z_0[J] &= \left(-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \delta^4(x - x_1) \Delta_F(x - y) J(y) - \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \delta^4(y - x_1) \Delta_F(x - y) J(x) \right) Z_0[J] \\
&= \left(-\frac{i}{2} \int d^4 y \Delta_F(x_1 - y) J(y) - \frac{i}{2} \int d^4 x \Delta_F(x - x_1) J(x) \right) Z_0[J] \\
&= -i \int d^4 x \Delta_F(x_1 - x) J(x) Z_0[J]
\end{aligned}$$

であることを使えば、 $Z_2[J]$ を 1 回汎関数微分をしたものは

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z_2[J] &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) J(y_1) J(y_2) Z_0[J] \\
&= 2 \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_2 \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-y_2) J(y_2) Z_0[J] \\
&\quad + \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) J(y_1) J(y_2) \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z_0[J] \\
&= 2 \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_1 \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-y_1) J(y_1) Z_0[J] \\
&\quad + \frac{1}{i} \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) J(y_1) J(y_2) \int d^4 y_3 \Delta_F(x_1-y_3) J(y_3) Z_0[J] \\
&= 2 \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_1 \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-y_1) K_1 \\
&\quad + \frac{1}{i} \Delta_F(z-z) \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) K_2 Z_0[J] \tag{6}
\end{aligned}$$

これから分かるように、後2回汎関数微分して J が1つだけ残るのは

$$\frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_2)} K_1, \quad \frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_2)} K_2$$

から出てきます。計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_2)} K_1 &= \frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_2)} J(y_1) Z_0[J] \\
&= \frac{\delta}{\delta J(x_3)} \delta(y_1-x_2) Z_0[J] + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} J(y_1) \int d^4 y_2 \Delta_F(x_2-y_2) J(y_2) Z_0[J] \\
&= \delta(y_1-x_2) \frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_0[J] + \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_3)} J(y_1) \int d^4 y_2 \Delta_F(x_2-y_2) J(y_2) Z_0[J] \\
&= \frac{1}{i} d^4 y_2 \delta(y_1-x_2) \Delta_F(x_3-y_2) J(y_2) Z_0[J] + \frac{1}{i} \delta^4(y_1-x_3) \int d^4 y_2 \Delta_F(x_2-y_2) J(y_2) Z_0[J] \\
&\quad + \frac{1}{i} J(y_1) \int d^4 y_2 \Delta_F(x_2-y_2) \delta^4(x_3-y_2) Z_0[J]
\end{aligned}$$

K_2 の方は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)}K_2 &= \frac{\delta^2}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)}J(y_1)J(y_2)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)J(y_3) \\
&= \frac{\delta}{\delta J(x_3)}\delta^4(x_2-y_1)J(y_2)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)J(y_3) + \frac{\delta}{\delta J(x_3)}\delta^4(x_2-y_2)J(y_1)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)J(y_3) \\
&\quad + \frac{\delta}{\delta J(x_3)}J(y_1)J(y_2)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)\delta^4(x_2-y_3) \\
&= \delta^4(x_2-y_1)\delta^4(x_3-y_2)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)J(y_3) + \delta^4(x_2-y_1)J(y_2)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)\delta^4(x_3-y_3) \\
&\quad + \delta^4(x_2-y_2)\delta^4(x_3-y_1)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)J(y_3) + \delta^4(x_2-y_2)J(y_1)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)\delta^4(x_3-y_3) \\
&\quad + \delta^4(x_3-y_1)J(y_2)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)\delta^4(x_2-y_3) + \delta^4(x_3-y_2)J(y_1)\int d^4y_3\Delta_F(x_1-y_3)\delta^4(x_2-y_3)
\end{aligned}$$

これらを入れて、 J を 1 つしか含まない項だけを取り出すと、(6) の第一項では

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\delta^2}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)}\int dz^4d^4y_1\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-y_1)K_1 \\
&= \int dz^4d^4y_1\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-y_1)J(y_1)Z_0[J] \\
&= \frac{1}{i}\left(\int dz^4d^4y_2\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(x_3-y_2)J(y_2) \right. \\
&\quad + \int dz^4d^4y_2\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(x_2-y_2)J(y_2) \\
&\quad + \left.\int dz^4d^4y_1\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-y_1)\Delta_F(x_2-x_3)J(y_1)\right)Z_0[J] \\
&= \frac{1}{i}\left(\int dz^4d^4y\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(x_3-y)J(y) \right. \\
&\quad + \int dz^4d^4y\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(x_2-y)J(y) \\
&\quad + \left.\int dz^4d^4y\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-y)\Delta_F(x_2-x_3)J(y)\right)Z_0[J]
\end{aligned}$$

第二項は

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{\delta^2}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)} \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) K_2 Z_0[J] \\
&= \left(\int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) \delta^4(x_2-y_1) \delta^4(x_3-y_2) \Delta_F(x_1-y_3) J(y_3) \right. \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) \delta^4(x_2-y_1) J(y_2) \Delta_F(x_1-y_3) \delta^4(x_3-y_3) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) \delta^4(x_2-y_2) \delta^4(x_3-y_1) \Delta_F(x_1-y_3) J(y_3) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) \delta^4(x_2-y_2) J(y_1) \Delta_F(x_1-y_3) \delta^4(x_3-y_3) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) \delta^4(x_3-y_1) J(y_2) \Delta_F(x_1-y_3) \delta^4(x_2-y_3) \\
&\quad \left. + \int dz^4 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \Delta_F(z-y_1) \Delta_F(z-y_2) \delta^4(x_3-y_2) J(y_1) \Delta_F(x_1-y_3) \delta^4(x_2-y_3) \right) Z_0 \\
&= \left(\int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-y) J(y) \right. \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-y) \Delta_F(x_1-x_3) J(y) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-y) J(y) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-y) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_1-x_3) J(y) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-y) \Delta_F(x_1-x_2) J(y) \\
&\quad \left. + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-y) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-x_2) J(y) \right) Z_0 \\
&= 2 \left(\int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-y) J(y) \right. \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_1-x_3) \Delta_F(z-y) J(y) \\
&\quad \left. + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-x_2) \Delta_F(z-y) J(y) \right) Z_0
\end{aligned}$$

よって、3 回汎関数微分した後に J を 1 つだけ含む項は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i^3} \frac{\delta^3}{\delta J(x_3) \delta J(x_2) \delta J(x_1)} Z_2[J] \\
&= -\frac{i\lambda}{4!} 6i \frac{1}{i^3} (2L_1 + \frac{1}{i} L_2) \\
&= \frac{\lambda}{2} \left(\int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_3-y) J(y) \right. \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_2-y) J(y) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(x_2-x_3) \Delta_F(z-y) J(y) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-y) J(y) \\
&\quad + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_1-x_3) \Delta_F(z-y) J(y) \\
&\quad \left. + \int dz^4 d^4 y \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-x_2) \Delta_F(z-y) J(y) \right) Z_0
\end{aligned}$$

図との対応を見ながらやるともっと簡単です。これらをもう 1 回汎関数微分しますが、 $J=0$ で消えないのはこれらの項だけなので、(3) の第二項を 4 回汎関数微分して $J=0$ とした結果として

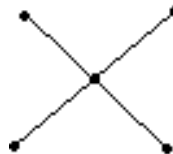
$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_4) \delta J(x_3) \delta J(x_2) \delta J(x_1)} Z_2[J]|_{J=0} \\
&= -\frac{i\lambda}{2} \Delta_F(z-z) \int d^4 z \left[\Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_3-x_4) + \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_2-x_4) \right. \\
&\quad + \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_4) \Delta_F(x_2-x_3) + \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-x_4) \\
&\quad \left. + \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(x_1-x_3) \Delta_F(z-x_4) + \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(x_1-x_2) \Delta_F(z-x_4) \right]
\end{aligned}$$

これらの各項は配置を無視すれば同じ図を描き



ちゃんとした配置で描きたければ各点を固定して描けばいいだけです。 $Z[J]$ での残っている (3) の第三項 $Z_3[J]$ を 4 回汎関数微分すれば、4 乗であることから $Z_0[J]$ には 1 回も作用させずに

$$\frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_4) \delta J(x_3) \delta J(x_2) \delta J(x_1)} Z_3[J]|_{J=0} = -i\lambda \int d^4 z \Delta_F(z-x_1) \Delta_F(z-x_2) \Delta_F(z-x_3) \Delta_F(z-x_4)$$



となります (J の作用のさせ方から $4!$ が出てくる)。というわけで、全部の項を足して

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = -3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} - \frac{i\lambda}{4!} 12 \times 6 \begin{array}{c} \bigcirc \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} + 24 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

こうなっています。これは前に S 行列のところで求めた 4 点相関関数と同じです。第一項の自由な場合では配置が違っただけで書き方としては二本の伝播関数があるだけなのでまとめてこのように書いています。また第二項もまとめて書いてしまっているので対称因子として計算されるのは 6 をかけない $12/4!$ のほうです。相関関数に関するファインマン則に関しては正準量子化のときに出てきたのと同じなのでそっちを見てください。というわけで、今見た経路積分によって作られた結果は前に出てきたものと一致したものになります。

最後に、正準量子化のところで見たように S 行列に寄与するのは connected diagrams だということをみましたが、ここで n 点相関関数が全て連結している connected diagrams を取り出す方法をみていきます (ここで言っている connected diagrams は全ての external point が線で繋がっている、二つに分離しない図のことです)。どうするかというと

$$Z[J] = e^{iW[J]}$$

$$W[J] = -i \log Z[J]$$

というのを作ります。具体的に 2 点相関関数で求めてみます。この $W[J]$ を $J[x]$ で微分して

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} &= -i \frac{\delta^2 \log Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \\ &= -i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta \log Z}{\delta Z} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} \\ &= -i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left(\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} \right) \\ &= i \frac{1}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \end{aligned}$$

この後、相関関数にするなら $J = 0$ とすべきで、そうすると

$$\left. \frac{\delta Z}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = 0$$

であることと、 $Z[J = 0] = 1$ であることから

$$\left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = -i \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = \frac{1}{i} \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0}$$

これは i の数が足りないだけで、明らかに二点相関関数の式なので Z との関係は

$$\left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = \frac{1}{i} \left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = i u(x_1, x_2)$$

具体的には、自由な場合でのクライン・ゴールドンの伝播関数は

$$\frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = i \Delta_F(x_1, x_2)$$

だったので

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = i \Delta_F(x_1 - x_2)$$

となっています。一般化させて書くと、connected な n 点相関関数 $G_{con}^{(n)}$ は

$$\frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = G_{con}^{(n)}$$

また、 W と Z はプランク定数が一つ分ズレています。 W の定義はプランク定数を落とさずに書けば

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} \quad , \quad W[J] = -i\hbar \log Z[J]$$

これを見れば分かるように Z に余計に $\hbar$ が掛かるようになっています。一般的な形では

$$\left(\frac{\hbar}{i}\right)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = G_{con}^{(n)}$$

なんでわざわざこんな定義を使うのかと言うと、後々余計なところに i が出てこないようにするためです。 W にすること disconnected 部分が落ちる理由というのは、2 点での結果

$$i \frac{1}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)}$$

これを見ても分かることです。第一項は 1 点相関関数であって、 x_1 と x_2 は繋がっていません。つまり、 $Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar} W[J]}$ とすることで、disconnected 部分を 2 点相関関数全体から引くという形で出てきます。2 点だとそのまま連結した 2 点相関関数しか出てこないのがイメージしづらいですが、細かく見たければ高次の微分で確かめることで実際に分離されていることがわかります。

というわけで、本当に connected だけなのか確かめるために 4 点相関関数をみてみます。

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} &= \frac{\delta^2}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} \left(\frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta J(x_4)} \left(-\frac{i}{Z^3} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_3)} + \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} + \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_3)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^3 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} \right) \end{aligned}$$

ここで後で $J=0$ に持っていくことを考えて第一項はここで落としてしまい、尚且つここから計算する途中で明らかに落とせる項は落としてしまいます

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta J(x_4)} \left(\frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} + \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} + \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_3)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^3 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3)} \right) \Big|_{J=0} \\
&= \left(\frac{i}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_4)} + \frac{i}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right)_{J=0} \\
&= i \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_4)} + i \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} \\
&\quad + i \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - i \frac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)}
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} &= i \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_3)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_4)} + i \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2) \delta J(x_3)} \\
&\quad + i \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} - i \frac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \\
&= i(u(x_1, x_3)u(x_2, x_4) + u(x_1, x_4)u(x_2, x_3) + u(x_3, x_4)u(x_1, x_2) - u(x_1, x_2, x_3, x_4))
\end{aligned}$$

で、これをバラして計算するんですがあまりにも面倒なので詳しいことは書きません。簡単にどうゆう構成になっているのか言うと、2点相関関数の積が4点相関関数のいくつかの項と等しくなります。図で言うと、例えば

$$\text{---} \times \text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{---}$$



といったものです。そうして見ていくと生き残るのは

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} \\
&= \frac{-\lambda}{4!} 24 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = -\lambda \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}
\end{aligned}$$

となって、connected diagrams だけで構成されていることが確かめられます。このように4点でやってみても、全体の4点相関関数から disconnected 部分が消されるように構成されています。