経路積分～QED の摂動展開～

QED の生成汎関数を摂動論で計算します。QED の「ファインマン則」を先に見ておくと分かりやすいかもしれません。注意として、電子と光子の伝播関数を $S, D_{\mu\nu}$ と書いていますが、これは通常の定義から i を抜いたものです ($S' = iS, D'_{\mu\nu} = iD_{\mu\nu}$)。また、規格化定数は無視しますが、規格化定数による効果は「経路積分～クライン・ゴルドン場 (相互作用あり)～」で出てきたものと変わりません。

QED の生成汎関数 Z は

$$Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp[i\int d^4x(\mathcal{L} + J\cdot A + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)]$$

$$\mathcal{L} = \int d^4x[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \overline{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi - e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu]$$

「経路積分～クライン・ゴルドン場 (相互作用あり)～」で見たように、生成汎関数 Z は相互作用なしでの生成汎関数 Z_0 から

$$Z[J,\eta,\overline{\eta}] = \exp\left[i\int d^4z\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu}, \frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta\eta}]\right] Z_0[J,\eta,\overline{\eta}]$$

と書くことができます (規格化定数は無視していきます)。今の場合、ラグランジアンの相互作用項は

$$\mathcal{L}_{int} = -e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

であり、相互作用なしでの生成汎関数は変形を行うことで、定数を無視すれば

$$Z_0 = \exp\left[i\int d^4xd^4y(-\frac{1}{2}J^\nu(x)D_{\nu\rho}(x-y)J^\rho(y) - \overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y))\right]$$

このようになっています (「経路積分～ディラック場～」「経路積分～電磁場～」参照)。a, b はスピノール成分で、ここからローマ字の添え字は全てスピノール成分に対するものとします。

生成汎関数は一次の摂動までで

$$\begin{aligned}
Z[J,\eta,\overline{\eta}] &= \exp\left[i\int d^4z\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu}, \frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta\eta}]\right] Z_0[J,\eta,\overline{\eta}] \\
&= \big(1 + i\int d^4z\mathcal{L}_{int}[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu}, \frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta\eta}]\big)Z_0[J,\eta,\overline{\eta}] \\
&= \big(1 - ie\int d^4z\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\big)Z_0[J,\eta,\overline{\eta}] \\
&= \big(1 - ie\int d^4z\frac{-\delta}{i\delta\eta_j(z)}\gamma^\mu_{jk}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_k(z)}\frac{\delta}{i\delta J^\mu(z)}\big)Z_0[J,\eta,\overline{\eta}] \quad (A^\mu \rightarrow \frac{\delta}{i\delta J_\mu}\ ,\ \psi \rightarrow \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\ ,\ \overline{\psi} \rightarrow -\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}) \\
&= Z_0 + Z_1
\end{aligned}$$

というわけで、Z_0 を汎関数微分します。$J^\mu(x)$ に関する微分は電磁場部分だけを見ればいいので

$$Z_0 = Z_{EN}Z_F$$

$$Z_{EM} = \exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^\lambda(x)D_{\lambda\rho}(x-y)J^\rho(y)\Big]$$

$$Z_F = \exp\Big[-i\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\Big]$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{i\delta J^\mu(z)}Z_{EM}[J] =& \frac{\delta}{i\delta J^\mu(z)}\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^\lambda(x)D_{\lambda\rho}(x-y)J^\rho(y)\Big] \\
=& \big[-\frac{1}{2}\int d^4xd^4yg_\mu{}^\lambda\delta^4(x-z)D_{\lambda\rho}(x-y)J^\rho(y) \\
&\quad -\frac{1}{2}\int d^4xd^4yg_\mu{}^\rho D_{\lambda\rho}(x-y)\delta^4(y-z)\big]\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ^\lambda(x)D_{\lambda\rho}(x-y)J^\rho(y)\Big] \\
=& \Big(-\frac{1}{2}\int d^4yD_{\mu\rho}(z-y)J^\rho(y)-\frac{1}{2}\int d^4xD_{\lambda\mu}(x-z)\Big)Z_{EM}
\end{aligned}$$

$D_{\mu\lambda} = D_{\lambda\mu}$ と $D_{\mu\lambda}(x-y) = D_{\mu\lambda}(y-x)$ から

$$\frac{\delta}{i\delta J^\mu(z)}Z_{EM}[J] = -\int d^4xD_{\mu\rho}(z-x)J^\rho(x)Z_{EM}$$

次に $\eta, \overline{\eta}$ による微分を見ます。微分の形は

$$\frac{-\delta}{i\delta\eta_j(z)}\gamma^\mu_{ij}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_k(z)}$$

このようになっていますが、今はスピノールの成分を表示して書いているのでガンマ行列との交換をいちいち気にせずに動かせて

$$\gamma^\mu_{jk}\frac{-\delta}{i\delta\eta_j(z)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_k(z)}$$

また、$\eta, \overline{\eta}$ はグラスマン数なのでこの二つの位置を交換したら符号は反転します。グラスマン数の微分は

$$\frac{\delta}{\delta\eta} = \psi_1\cdots\psi_n\eta = (-1)^n\frac{\delta}{\delta\eta}\eta\psi_1\cdots\psi_n = -\psi_1\cdots\psi_n$$

として実行します (ψ, η はグラスマン数)。今の場合

$$A(\eta_i, \overline{\eta}_j)\exp[\overline{\eta}S\eta]$$

このような形をしたものがでてきて (A は $\eta_i, \overline{\eta}_j$ が n 個並んでいるもの)、これを微分するときは

$$\frac{\delta A(\eta,\overline{\eta})}{\delta\eta}\exp[\overline{\eta}S\eta]+(-1)^n A(\eta,\overline{\eta})\frac{\delta\exp[\overline{\eta}S\eta]}{\delta\eta}$$

とするんですが、第二項の微分を実行するときに $A(\eta,\overline{\eta})$ の前に $\exp[\overline{\eta}S\eta]$ 出してから微分を行えば符号の変更がおきないので、前にだしてしまいます。

微分を実行すると

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu_{jk}\frac{-\delta}{i\delta\eta_j(z)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_k(z)}Z_f =&\gamma^\mu_{jk}\frac{-\delta}{i\delta\eta_j(z)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_k(z)}\exp\Big[-i\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\Big]\\
=&\gamma^\mu_{jk}\frac{-\delta}{i\delta\eta_j(z)}\big(-\int d^4xd^4y\delta_{ak}\delta^4(x-z)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\big)\exp\Big[-i\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\Big]\\
=&\gamma^\mu_{jk}\frac{\delta}{i\delta\eta_j(z)}\int d^4yS_{kb}(z-y)\eta_b(y)\exp\Big[-i\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\Big]\\
=&\gamma^\mu_{jk}\big(\frac{1}{i}\int d^4yS_{kb}(z-y)\delta_{bj}\delta^4(y-z)\\
&\qquad+\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\delta_{bj}\delta^4(y-z)\int d^4yS_{kb}(z-y)\eta_b(y)\big)\\
&\ \times\exp\Big[-i\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\Big]\\
=&\gamma^\mu_{jk}\Big(\frac{1}{i}S_{kj}(z-z)+\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z)\int d^4yS_{kb}(z-y)\eta_b(y)\Big)Z_F
\end{aligned}$$

ここでは積分記号の間が 1 セットになっていると思ってください。例えば

$$\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\delta_{bj}\delta^4(y-z)\int d^4yS_{kb}(z-y)\eta_b(y)$$

この場合では

$$\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\delta_{bj}\delta^4(y-z)$$

までが 1 セットで、この部分だけで積分、クロネッカーデルタ、デルタ関数は作用します。ただし、これ以降の話ですが、z,z_1,z_2 に関する積分は全体にかかっているとします。

結果をまとめれば

$$
\begin{aligned}
Z_1 =& -ie\int d^4z\gamma^{\mu}_{jk}\Big[\frac{1}{i}S_{kj}(z-z)\\
&\qquad +\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z)\int d^4yS_{kb}(z-y)\eta_b(y)\big)\big(-\int d^4xD_{\mu\rho}(z-x)J^{\rho}(x)\big)\Big]Z_{EM}Z_F\\
=& -ie\int d^4z\gamma^{\mu}_{jk}\Big[-\frac{1}{i}S_{kj}(z-z)\int d^4xD_{\mu\rho}(z-x)J^{\rho}(x)\\
&\qquad -\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z)\int d^4yS_{kb}(z-y)\eta_b(y)\int d^4xD_{\mu\rho}(z-x)J^{\rho}(x)\Big]Z_{EM}Z_F
\end{aligned}
$$

これが 1 次のオーダでの生成汎関数です。しかし、電子や光子の 2 点相関関数を求めようと思うと、このオーダは明らかに無関係なので、次のオーダにいきます。ちなみに、第二項からは最低次の頂点 $-ie\gamma_\mu$ が出てきます。頂点は 3 点関数なので、求めるには $J_\mu,\eta,\overline{\eta}$ で汎関数微分して

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{i\delta\eta_s(x_1)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_t(x_2)}\frac{\delta}{i\delta J_\nu(x_3)}Z_1|_{\eta=\overline{\eta}=J=0} &= ie\gamma^{\mu}_{jk}\frac{1}{i}S_{tj}(x_2-z)\frac{1}{i}S_{ks}(z-x_1)\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z-x_3)\\
&= -ie\gamma^{\mu}_{jk}iS_{tj}(x_2-z)iS_{ks}(z-x_1)iD_{\mu\nu}(z-x_3)\\
&= -ieiS_{tj}(x_2-z)\gamma^{\mu}_{jk}iS_{ks}(z-x_1)iD_{\mu\nu}(z-x_3)\\
&= S'(x_2-z)(-ie\gamma^{\mu})S'(z-x_1)D'_{\mu\nu}(z-x_3)
\end{aligned}
$$

S',D' が通常使っている定義の伝播関数です。全ての伝播関数が z に集まっていることから、頂点に対応していることが分かると思います。

2 次のオーダを計算していきます。2 次まで展開したものは

$$
\begin{aligned}
Z[J,\eta,\overline{\eta}] =&\Big(1-ie\int d^4z\frac{-\delta}{i\delta\eta_j(z)}\gamma^{\mu}_{jk}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_k(z)}\frac{\delta}{i\delta J^{\mu}(z)}\\
&\qquad -\frac{1}{2}e^2\int d^4z_1d^4z_2\frac{-\delta}{i\delta\eta_d(z_1)}\gamma^{\nu}_{de}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_e(z_1)}\frac{\delta}{i\delta J^{\nu}(z_1)}\frac{-\delta}{i\delta\eta_j(z_2)}\gamma^{\mu}_{jk}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_k(z_2)}\frac{\delta}{i\delta J^{\mu}(z_2)}\Big)Z_0[J,\eta,\overline{\eta}]\\
=&Z_0+Z_1+Z_2
\end{aligned}
$$

というわけで、1 次のオーダの結果にさらにもう 1 回同じ微分を行います。なので、出発点は

$$
\begin{aligned}
&\int d^4z_2\gamma^{\mu}_{jk}\Big[-\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^{\rho}(x)\\
&\qquad -\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^{\rho}(x)\Big]Z_{EM}Z_F\\
&=\int d^4z_2\gamma^{\mu}_{jk}\Big[\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)\\
&\qquad +\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\Big]\Big(-\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^{\rho}(x)\Big)Z_{EM}Z_F
\end{aligned}
$$

これに対して、$J_\mu, \eta, \overline{\eta}$ の微分を行います。J_ν を実行すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{i\delta J_\nu(z_1)}\int d^4x(-D_{\mu\rho}(z_2-x)J^\rho(x))Z_{EM}\\
&\qquad\qquad =-\frac{\delta}{i\delta J_\nu(z_1)}\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^\rho(x)\exp[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y(J^\lambda(x)D_{\lambda\rho}(x-y)J^\rho(y)]\\
&\qquad\qquad =-\Big[\frac{1}{i}\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)g^\rho{}_\nu\delta^4(x-z_1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^\rho(x)\big(-\int d^4xD_{\lambda\rho}(z_1-x)J^\rho(x)\big)\Big]Z_{EM}\\
&\qquad\qquad =\Big[-\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)+\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^\rho(x)\int d^4xD_{\nu\rho}(z_1-x)J^\rho(x)\Big]Z_{EM}
\end{aligned}
$$

次の $\eta, \overline{\eta}$ ではかなり面倒なことになって

$$\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\frac{-\delta}{i\delta\eta_d(z_1)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_e(z_1)}\Big[\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)$$

$$+\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\Big]\exp\Big[-i\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\Big]$$

$$=-\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\frac{\delta}{i\delta\eta_d(z_1)}\Big[\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)(-\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y))$$

$$+\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)$$

$$-\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\Big]Z_F$$

$$=-\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\frac{\delta}{i\delta\eta_d(z_1)}\Big[-\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)$$

$$+\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)$$

$$-\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\Big]Z_F$$

$$=-\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\Big[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)$$

$$-\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{ad}(x-z_1)\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)$$

$$-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)$$

$$+\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{ad}(x-z_1)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)$$

$$-\frac{1}{i}S_{ed}(z_1-z_1)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)$$

$$-\frac{1}{i}\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)$$

$$-\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{ad}(x-z_1)\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\Big]Z_F$$

少し大雑把な状況を見ておきます。ここで源 $\eta,\overline{\eta}$ を 0 に持っていくと、生き残るのは第一項と第二項です (規格化定数に対応します。$Z[J,\eta,\overline{\eta}]$ の分母に出てくるので、分子にいる同じものを消します)。J_μ で微分した結果も源 J_μ が 0 だとしたら、第一項のみが生き残ります。なので、あわせると源なしでの Z_2 は

$$-\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\Big[-S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)+S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\Big]$$

$$=\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\big[iS_{kj}(z_2-z_2)iS_{ed}(z_1-z_1)iD_{\mu\nu}(z_2-z_1)-iS_{ej}(z_1-z_2)iS_{kd}(z_2-z_1)iD_{\mu\nu}(z_2-z_1)\big]$$

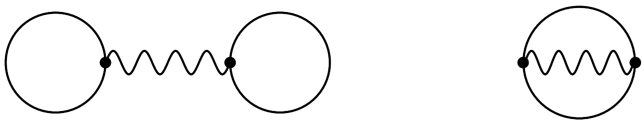
これに $-e^2/2$ をくっつけて、並びを整理すると、第一項は

$$-\frac{1}{2}e^2S'_{ed}(z_1-z_1)\gamma^\nu_{de}S'_{kj}(z_2-z_2)\gamma^\mu_{jk}D'_{\mu\nu}(z_2-z_1)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{tr}[S'(z_1-z_1)(-ie\gamma^\nu)]D'_{\mu\nu}(z_2-z_1)\mathrm{tr}[S'(z_2-z_2)(-ie\gamma^\mu)]$$

第二項は

$$\frac{1}{2}e^2\gamma^\nu_{de}S'_{ej}(z_1-z_2)\gamma^\mu_{jk}S'_{kd}(z_2-z_1)D'_{\mu\nu}(z_2-z_1)$$
$$=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(-ie\gamma^\nu)S'(z_1-z_2)(-ie\gamma^\mu)D'_{\mu\nu}(z_2-z_1)S'(z_2-z_1)]$$

となります (実際には z_1, z_2 の積分がくっついています)。トレースはスピノール成分に対するもので、添え字の付き方がトーレスに対応しているので出てきています。この二つは $S', D'_{\mu\nu}$ をそれぞれの位置に対応するように実線と波線で結び (例えば $S'(z_1-z_2)$ なら z_1 と z_2 を実線で繋ぐように)、複数の線が来ている黒点に $-ie\gamma^\mu$ を対応させることで



このように書くことができます (1/2 は対称因子)。で、これらは QED の 2 次のオーダでの真空への寄与 (有効ポテンシャル) に対応する図 (真空泡) になっています。ちなみに、これは最初から源が 0 になっている状況で行った有限温度の場の理論の「logZ の摂動計算〜QED〜」で出てくる $\log Z$ の結果と一致しています。ただし、左の図 (第一項) は QED では禁止されているので、右の図 (第二項) だけが効いてきます (「くり込み理論」参照)。

式と図の対応は、運動量表示にしていませんが QED の「ファインマン則」で書いたものと対応していることが分かると思います。頂点には $-ie\gamma_\mu$ を入れ、内線には最低次の伝播関数、電子のループに対しては $-\mathrm{tr}$ をつけるといったものです。

さらにファインマン則が分かりやすいように、光子と電子の 2 点相関関数を求めてみます。Z_2 は上での結果をまとめることで

$$
\begin{aligned}
Z_2 =&\frac{1}{2}e^2\gamma^{\nu}_{de}\gamma^{\mu}_{jk}\int d^4z_1d^4z_2\\
&\Big[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)\\
&\quad-\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{ad}(x-z_1)\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\\
&\quad-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\\
&\quad+\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{ad}(x-z_1)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\\
&\quad-\frac{1}{i}S_{ed}(z_1-z_1)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\\
&\quad-\frac{1}{i}\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\\
&\quad-\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{ad}(x-z_1)\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\Big]\\
&\times\Big[-\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)+\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^{\rho}(x)\int d^4xD_{\nu\rho}(z_1-x)J^{\rho}(x)\Big]Z_{EM}Z_F
\end{aligned}
$$

光子の 2 点相関関数を求める場合は J_μ で二回微分すればいいです。2 点相関関数を求めるには源 $\eta, \overline{\eta}, J$ は 0 にとるということを踏まえれば簡単に生き残る部分がわかるので、消える部分は無視していくと (z_1, z_2 の積分は省略します)

$$\frac{\delta}{i\delta J^{\alpha}(w_1)}\frac{\delta}{i\delta J^{\beta}(w_2)}Z_2\Big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}$$

$$=e^2\gamma^{\nu}_{de}\gamma^{\mu}_{jk}[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)]$$

$$\times\frac{\delta}{i\delta J^{\alpha}(w_1)}\Big[-\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)(-\int d^4xD_{\mu\rho}(w_2-x)J^{\rho}(x))$$

$$+\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)\delta^4(x-w_2)g^{\rho}{}_{\beta}\int d^4xD_{\nu\rho}(z_1-x)J^{\rho}(x)$$

$$+\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^{\rho}(x)\int d^4xD_{\nu\rho}(z_1-x)\delta^4(x-w_2)g^{\rho}{}_{\beta}+\cdots\Big]Z_2\Big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}$$

$$=e^2\gamma^{\nu}_{de}\gamma^{\mu}_{jk}[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)]$$

$$\times\frac{\delta}{i\delta J^{\alpha}(w_1)}\Big[\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\int d^4xD_{\beta\rho}(w_2-x)J^{\rho}(x)$$

$$+D_{\mu\beta}(z_2-w_2)\int d^4xD_{\nu\rho}(z_1-x)J^{\rho}(x)+\int d^4xD_{\mu\rho}(z_2-x)J^{\rho}(x)D_{\nu\beta}(z_1-w_2)\Big]Z_2\Big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}$$

$$=e^2\gamma^{\nu}_{de}\gamma^{\mu}_{jk}[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)]$$

$$\times[-D_{\mu\nu}(z_2-z_1)D_{\beta\alpha}(w_2-w_1)+D_{\mu\beta}(z_2-w_2)D_{\nu\alpha}(z_1-w_1)+D_{\mu\alpha}(z_2-w_1)D_{\nu\beta}(z_1-w_2)]Z_2\Big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}$$

$$=e^2\gamma^{\nu}_{de}\gamma^{\mu}_{jk}[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)]$$

$$\times[-D_{\mu\nu}(z_2-z_1)D_{\beta\alpha}(w_2-w_1)+D_{\mu\beta}(z_2-w_2)D_{\nu\alpha}(z_1-w_1)+D_{\mu\alpha}(z_2-w_1)D_{\nu\beta}(z_1-w_2)]$$

$D_{\mu\nu}(z_2-z_1)D_{\beta\alpha}(w_2-w_1)$ の部分は disconnected な図になっているので無視して

$$e^2\gamma^{\nu}_{de}\gamma^{\mu}_{jk}\big[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)(D_{\mu\beta}(z_2-w_2)D_{\nu\alpha}(z_1-w_1)+D_{\mu\alpha}(z_2-w_1)D_{\nu\beta}(z_1-w_2))$$

$$-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)(D_{\mu\beta}(z_2-w_2)D_{\nu\alpha}(z_1-w_1)+D_{\mu\alpha}(z_2-w_1)D_{\nu\beta}(z_1-w_2))\big]$$

第一項は明らかに disconnected な図になっているので、無視します。第二項は z_1 と z_2 を入れ替えれば同じになるので

$$2e^2\gamma^{\nu}_{de}\gamma^{\mu}_{jk}[-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)D_{\mu\beta}(z_2-w_2)D_{\nu\alpha}(z_1-w_1)]$$

というわけで、2 次のオーダでの光子の 2 点相関関数への寄与は

$$
\begin{aligned}
D^{(2)}_{\alpha\beta}(w_1,w_2) &= \frac{\delta}{i\delta J^\alpha(w_1)}\frac{\delta}{i\delta J^\beta(w_2)}Z_2\Big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0} \\
&= e^2\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\int d^4z_1d^4z_2[-S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)D_{\mu\alpha}(z_2-w_1)D_{\nu\beta}(z_1-w_2)] \\
&= e^2\int d^4z_1d^4z_2\big[-\gamma^\nu_{de}S_{ej}(z_1-z_2)\gamma^\mu_{jk}S_{kd}(z_2-z_1)D_{\mu\alpha}(z_2-w_1)D_{\nu\beta}(z_1-w_2)\big] \\
&= e^2\int d^4z_1d^4z_2D_{\beta\nu}(w_2-z_1)\big(-\mathrm{tr}[\gamma^\nu S(z_1-z_2)\gamma^\mu S(z_2-z_1)]\big)D_{\mu\alpha}(z_2-w_1)
\end{aligned}
$$

式の右側から位置を追っていけば、光子が w_1 から z_2 にいき、z_2 から電子が z_1 にいき、そこで二つに別れ、電子は z_1 から z_2 に戻っていき、もう片方では光子が z_1 から w_2 に向かっていっています。

ちなみに、Z を汎関数微分して出てくるのは i を含んだ 2 点相関関数なので、$D^{(2)}_{\alpha\beta}(w_1,w_2)$ は通常の定義の伝播関数に対応するものです。

これをフーリエ変換して運動量表示に持っていきます。フーリエ変換は

$$
\int d^4w_1d^4w_2e^{ip_1w_1}e^{ip_2w_2}D^{(2)}_{\alpha\beta}(w_1,w_2)=(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)D^{(2)}_{\alpha\beta}(p_1,p_2)
$$

これで定義します。デルタ関数は伝播関数が位置の差にのみ依存しているということを受けたもので、運動量保存に対応します。そうすると

$$
\begin{aligned}
&\int d^4w_1d^4w_2e^{ip_1w_1}e^{ip_2w_2}D^{(2)}_{\alpha\beta}(w_1,w_2) \\
&=\int d^4w_1d^4w_2e^{ip_1w_1}e^{ip_2w_2}\int d^4z_1d^4z_2\int\frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3d^4k_4}{(2\pi)^{16}}(-\mathrm{tr}[\gamma^\nu S(k_1)\gamma^\mu S(k_2)] \\
&\qquad\times D_{\beta\nu}(k_3)D_{\mu\alpha}(k_4))e^{-ik_1(z_1-z_2)}e^{-ik_2(z_2-z_1)}e^{-ik_3(w_2-z_1)}e^{-ik_4(z_2-w_1)} \\
&=\int d^4w_1d^4w_2d^4z_1d^4z_2\int\frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3d^4k_4}{(2\pi)^{16}}(-\mathrm{tr}[\gamma^\nu S(k_1)\gamma^\mu S(k_2)]D_{\nu\beta}(k_3)D_{\mu\alpha}(k_4)) \\
&\qquad\times\exp[i(p_2+k_4)w_1]\exp[i(p_1-k_3)w_2]\exp[i(-k_1+k_2+k_3)z_1]\exp[i(k_1-k_2-k_4)z_2] \\
&=\int d^4k_1d^4k_2d^4k_3d^4k_4(-\mathrm{tr}[\gamma^\nu S(k_1)\gamma^\mu S(k_2)]D_{\nu\beta}(k_3)D_{\mu\alpha}(k_4)) \\
&\qquad\times\delta^4(p_2+k_4)\delta^4(p_1-k_3)\delta^4(-k_1+k_2+k_3)\delta^4(k_1-k_2-k_4) \\
&=\int d^4k_1d^4k_2(-\mathrm{tr}[\gamma^\nu S(k_1)\gamma^\mu S(k_2)]D_{\nu\beta}(p_1)D_{\mu\alpha}(-p_2))\delta^4(-k_1+k_2+p_1)\delta^4(k_1-k_2+p_2) \\
&=\int d^4k_1(-\mathrm{tr}[\gamma^\nu S(k_1)\gamma^\mu S(p_2+k_1)]D_{\nu\beta}(-p_1)D_{\mu\alpha}(p_2))\delta^4(p_2+p_1) \\
&=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}(-\mathrm{tr}[\gamma^\nu S(k_1)\gamma^\mu S(p_2+k_1)]D_{\nu\beta}(-p_1)D_{\mu\alpha}(p_1))(2\pi)^4\delta^4(p_2+p_1)
\end{aligned}
$$

よって

$$D^{(2)}_{\alpha\beta}(p_1,p_2)=e^2\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\big(-\mathrm{tr}[\gamma^\nu S(k_1)\gamma^\mu S(p_2+k_1)]D_{\nu\beta}(-p_1)D_{\mu\alpha}(p_1)\big)$$

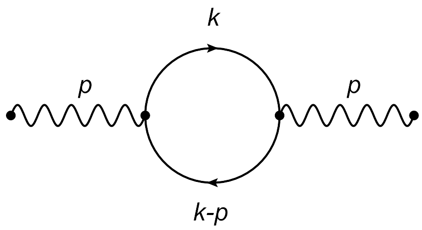
であり、デルタ関数より $-p_1=p_2=p$、$k_2=k$ として、並びを整理すれば

$$D^{(2)}_{\alpha\beta}(p)=e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_{\alpha\mu}(p)(-\mathrm{tr}[\gamma^\mu S(k)\gamma^\nu S(k-p)])D_{\nu\beta}(p)$$

で、右辺を通常の伝播関数の定義に直して、ファインマン則が見やすい形にすれば

$$D^{(2)}_{\alpha\beta}(p)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}D'_{\alpha\mu}(p)\big(-\mathrm{tr}[(-ie\gamma^\mu)S'(k)(-ie\gamma^\nu)S'(k-p)]\big)D'_{\nu\beta}(p)$$

これを図にすれば



線が交わっている頂点 (黒点部分) には $-ie\gamma^\mu$、頂点と頂点を結ぶ線には、電子 (実線) と光子 (波線) の最低次の伝播関数、電子のループに対しては $-\mathrm{tr}$ をつけ、ループ部分の運動量に対しては積分を当てる、といったファインマン則が出てきます。そして、両側の光子の伝播関数を抜いたものが、真空偏極 (光子の自己エネルギー) です。

電子の場合は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{i\delta\eta_s(w_1)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_t(w_2)}Z_2|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}\\
=&\frac{1}{2}e^2\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\frac{\delta}{i\delta\eta_s(w_1)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_t(w_2)}\big[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)\\
&\qquad -\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{ad}(x-z_1)\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\\
&\qquad -S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\\
&\qquad +\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{ad}(x-z_1)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\\
&\qquad -\frac{1}{i}S_{ed}(z_1-z_1)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\\
&\qquad -\frac{1}{i}\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\int d^4x\overline{\eta}_a(x)S_{aj}(x-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\big]\\
&\times\big[-\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\big]\exp\Big[-i\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\Big]\Big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}\\
=&\frac{1}{2}e^2\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\frac{\delta}{i\delta\eta_s(w_1)}\big[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)(-i\int d^4yS_{tb}(w_2-y)\eta_b(y))\\
&\qquad -\frac{1}{i}\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)S_{td}(w_2-z_1)\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)\\
&\qquad -S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)(-i\int d^4yS_{tb}(w_2-y)\eta_b(y))\\
&\qquad +\frac{1}{i}\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)S_{td}(w_2-z_1)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\\
&\qquad -\frac{1}{i}\frac{1}{i}S_{ed}(z_1-z_1)S_{tj}(w_2-z_2)\int d^4yS_{kb}(z_2-y)\eta_b(y)\\
&\qquad +\frac{1}{i}\frac{1}{i}\int d^4yS_{eb}(z_1-y)\eta_b(y)S_{tj}(w_2-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\big]\\
&\times\big[-\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\big]\exp\Big[-i\int d^4xd^4y\overline{\eta}_a(x)S_{ab}(x-y)\eta_b(y)\Big]\Big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}e^2\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\big[S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)(-S_{ts}(w_2-w_1))\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{i}\frac{1}{i}\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)S_{td}(w_2-z_1)S_{es}(z_1-w_1)\\
&\qquad\qquad -S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)(-S_{ts}(w_2-w_1))\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{i}\frac{1}{i}\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)S_{td}(w_2-z_1)S_{ks}(z_2-w_1)\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{i}\frac{1}{i}\frac{1}{i}S_{ed}(z_1-z_1)S_{tj}(w_2-z_2)S_{ks}(z_2-w_1)\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{i}\frac{1}{i}\frac{1}{i}S_{es}(z_1-w_1)S_{tj}(w_2-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\big]\big[-\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\big]Z_F\big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}\\
=&\frac{1}{2}e^2\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\big[-S_{kj}(z_2-z_2)S_{ed}(z_1-z_1)S_{ts}(w_2-w_1)\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{i}S_{kj}(z_2-z_2)S_{td}(w_2-z_1)S_{es}(z_1-w_1)\\
&\qquad\qquad +S_{ej}(z_1-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)S_{ts}(w_2-w_1)\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)S_{td}(w_2-z_1)S_{ks}(z_2-w_1)\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{i}S_{ed}(z_1-z_1)S_{tj}(w_2-z_2)S_{ks}(z_2-w_1)\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{i}S_{es}(z_1-w_1)S_{tj}(w_2-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\big]\big[-\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\big]
\end{aligned}
$$

このとき、第一項、第二項、第三項、第五項は disconnected なので、残りの

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}e^2\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\big[-\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)S_{td}(w_2-z_1)S_{ks}(z_2-w_1)\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{i}S_{es}(z_1-w_1)S_{tj}(w_2-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\big]\big[-\frac{1}{i}D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\big]
\end{aligned}
$$

が効いてきます。よって

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{st}(w_1,w_2)=&\frac{\delta}{i\delta\eta_s(w_1)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}_t(w_2)}Z_2\big|_{\eta=\overline{\eta}=J=0}\\
=&-\frac{1}{2}\frac{1}{i}e^2\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\big[-\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)S_{td}(w_2-z_1)S_{ks}(z_2-w_1)\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{i}S_{es}(z_1-w_1)S_{tj}(w_2-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)\big]D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\\
=&-\frac{1}{2}\frac{1}{i}e^2\gamma^\nu_{de}\gamma^\mu_{jk}\big[-\frac{1}{i}S_{ej}(z_1-z_2)S_{td}(w_2-z_1)S_{ks}(z_2-w_1)D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{i}S_{es}(z_1-w_1)S_{tj}(w_2-z_2)S_{kd}(z_2-z_1)D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\big]
\end{aligned}
$$

これも z_1, z_2 の入れ替えによって

$$
\begin{aligned}
\text{第一項}\ &:\ -\frac{1}{i}S_{td}(w_2-z_2)\gamma^{\nu}_{de}S_{ej}(z_1-z_2)\gamma^{\mu}_{jk}S_{ks}(z_1-w_1)D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\\
\text{第二項}\ &:\ -\frac{1}{i}S_{tj}(w_2-z_2)\gamma^{\mu}_{jk}S_{kd}(z_2-z_1)\gamma^{\nu}_{de}S_{es}(z_1-w_1)D_{\mu\nu}(z_2-z_1)
\end{aligned}
$$

と書けるので、結局同じになって

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}_{st}(w_1,w_2) &= -e^2\gamma^{\nu}_{de}\gamma^{\mu}_{jk}\int d^4z_1d^4z_2[S_{ej}(z_1-z_2)S_{td}(w_2-z_1)S_{ks}(z_2-w_1)D_{\mu\nu}(z_2-z_1)]\\
&= -e^2\int d^4z_1d^4z_2\big[S_{td}(w_2-z_1)\gamma^{\nu}_{de}S_{ej}(z_1-z_2)\gamma^{\mu}_{jk}S_{ks}(z_2-w_1)D_{\mu\nu}(z_2-z_1)\big]\\
&= \int d^4z_1d^4z_2\big[S(w_2-z_1)(-ie\gamma^{\nu})S(z_1-z_2)(-ie\gamma^{\mu})S(z_2-w_1)D_{\nu\mu}(z_1-z_2)\big]_{st}
\end{aligned}
$$

右側から位置を追うと、電子が w_1 から z_2 に行き、z_2 で電子と光子に別れ、それぞれが別の線で z_1 に向かっていき z_1 で出会って、z_1 から電子が w_2 に向かっていきます。

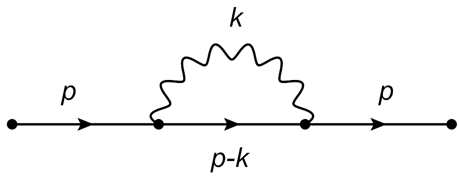
フーリエ変換すると

$$
\begin{aligned}
&\int d^4w_1d^4w_2e^{ip_1w_1}e^{ip_2w_2}S^{(2)}_{st}(w_1,w_2)\\
&=\int d^4w_1d^4w_2d^4z_1d^4z_2\int\frac{d^4k_1d^4k_2d^4k_3d^4k_4}{(2\pi)^{16}}[S(k_1)(-ie\gamma^{\nu})S(k_2)(-ie\gamma^{\mu})S(k_3)D_{\mu\nu}(k_4)]_{st}\\
&\qquad\times e^{ip_1w_1}e^{ip_2w_2}e^{-ik_1(w_2-z_1)}e^{-ik_2(z_1-z_2)}e^{-ik_3(z_2-w_1)}e^{-ik_4(z_1-z_2)}\\
&=\int d^4k_1d^4k_2d^4k_3d^4k_4\big[S(k_1)(-ie\gamma^{\nu})S(k_2)(-ie\gamma^{\mu})S(k_3)D_{\mu\nu}(k_4)\big]_{st}\\
&\qquad\times\delta^4(p_1+k_3)\delta^4(p_2-k_1)\delta^4(k_1-k_2-k_4)\delta^4(k_2-k_3+k_4)\\
&=\int d^4k_2d^4k_4\big[S(p_2)(-ie\gamma^{\nu})S(k_2)(-ie\gamma^{\mu})S(-p_1)D_{\mu\nu}(k_4)\big]_{st}\\
&\qquad\times\delta^4(p_2-k_2-k_4)\delta^4(k_2+p_1+k_4)\\
&=\int\frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}\big[S(p_2)(-ie\gamma^{\nu})S(-p_1-k_4)(-ie\gamma^{\mu})S(p_1)D_{\mu\nu}(k_4)\big]_{st}(2\pi)^4\delta^4(p_2+p_1)
\end{aligned}
$$

よって、$-p_1=p_2=p$, $k_4=k$、$S'=iS, D'_{\mu\nu}=iD_{\mu\nu}$ として

$$
S^{(2)}(p)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}S'(p)(-ie\gamma^{\nu})S'(p-k)(-ie\gamma^{\mu})S'(p)D'_{\nu\mu}(k)
$$

これは図にすれば



電子の線を実線、光子の線を波線で描き、線が交わっている黒点に $-ie\gamma^\mu$ をいれ、ループしている部分の運動量に対しては積分を入れています。両側の電子の伝播関数を抜いた部分が電子の自己エネルギーに対応するものです。

生成汎関数を直接汎関数微分して求めてきましたが、もっと簡単に求めることができます。やってきたことは相互作用項を汎関数微分に置き換えて微分を実行していくというものでしたが、これは汎関数微分によって伝播関数を取り出していくという作業でした。これの別の見方をします。1 次のオーダでの

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

というのがあったとき、これを変形して

$$\overline{\psi}_i\gamma^\mu_{ij}\psi_j = \gamma^\mu_{ij}\overline{\psi}_i\psi_j = -\gamma^\mu_{ij}\psi_j\overline{\psi}_i$$

これは源を 0 としたとき電子の伝播関数を exp 内から取り出します。このことは 2 点相関関数が

$$< 0|T\left(\psi(x)\overline{\psi}(y)\right)|0 >= \frac{\int\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ \psi(x)\overline{\psi}(y)\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_0\right]}{\int\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_0\right]}$$

とかけることからも分かると思います。こういったことをちゃんと見ていくと、摂動展開され exp の外に出た相互作用項において、$\psi\overline{\psi}$ と並んで現われているなら電子の伝播関数と置き換えていいということになります。細かく言えば、exp の外にいる場に対して、伝播関数となる組み合わせを作っていけばいいということです。伝播関数が作れずに場が余ると、源を 0 に持っていったときに、余った場が 0 となるのに対応するので、その場合は消えます。

そのために、2 次のオーダでも

$$\overline{\psi}_i(z_1)\gamma^\mu_{ij}\psi_j(z_1)\overline{\psi}_k(z_2)\gamma^\nu_{kl}\psi_l(z_2) = -\gamma^\mu_{ij}\psi_j(z_1)\overline{\psi}_k(z_2)\gamma^\nu_{kl}\psi_l(z_2)\overline{\psi}_i(z_1)$$

このように書き換え、それぞれのペアを伝播関数に置き換えれば

$$-\gamma^\mu_{ij}S_{jk}(z_1-z_2)\gamma^\nu_{kl}S_{li}(z_2-z_1)$$

となります。

例えば光子の 2 点相関関数では、これにさらに 2 点相関関数を求めるための汎関数微分の J_μ による A_μ が 2 個と、相互作用項にいる A_μ2 個が加わるので、全部書くと

$$-\int d^4z_1d^4z_2A_\alpha(x)A_\beta(y)\gamma^\mu_{ij}\psi_j(z_1)\overline{\psi}_k(z_2)\gamma^\nu_{kl}\psi_l(z_2)\overline{\psi}_i(z_1)A_\mu(z_1)A_\nu(z_2)$$

これから、connected な図を取り出せるような並びは

$$-\int d^4xd^4yA_\alpha(x)A_\mu(z_1)\gamma^\mu_{ij}\psi_j(z_1)\overline{\psi}_k(z_2)\gamma^\nu_{kl}\psi_l(z_2)\overline{\psi}_i(z_1)A_\nu(z_2)A_\beta(y)$$

なので

$$\begin{aligned}
&-\int d^4xd^4yD_{\alpha\mu}(z_1-x)\gamma^\mu_{ij}S_{jk}(z_1-z_2)\gamma^\nu_{kl}S_{li}(z_2-z_1)D_{\nu\beta}(z_2-y)\\
&\qquad=\int d^4xd^4yD_{\alpha\mu}(z_1-x)\big(-\mathrm{tr}[\gamma^\mu S(z_1-z_2)\gamma^\nu S(z_2-z_1)]\big)D_{\nu\beta}(z_2-y)
\end{aligned}$$

となり、z_1 と z_2 の入れ替えによって対称になっていることから 2 倍され、摂動展開の係数 1/2 と打ち消しあって、上で求めた結果と一致します。かなり大雑把に見ましたが、流れとしてはこのようなものでお手軽に求めることもできます。

ちなみに、この形でやるとなんで電子のループに対してトレースが現われるのかが分かりやすく、$-\mathrm{tr}$ の起源は

$$\overline{\psi}_i\gamma^\mu_{ij}\psi_j=\gamma^\mu_{ij}\overline{\psi}_i\psi_j=-\gamma^\mu_{ij}\psi_j\overline{\psi}_i=-\mathrm{tr}[\gamma^\mu\psi\overline{\psi}]$$

から来ています。これは電子の伝播関数が頂点 γ^μ から出て戻ってくるというのに対応しているので、明らかにループです。というように、スピノール成分とグラスマン数の反交換性から $-\mathrm{tr}$ は出てきます。