

カイラル対称性と PCAC

カイラル対称性と関連する物理の説明をします。カイラル対称性が破れて質量を得ることは物理として重要な意味がありますが、ここではもっと直接的に見ます。

計算的には $U(1)$ が一番簡単なのですが、物理としては相当厄介な性質を抱えているので、 $SU(2)$ を使います。同じローマ字の添え字は和をとります。

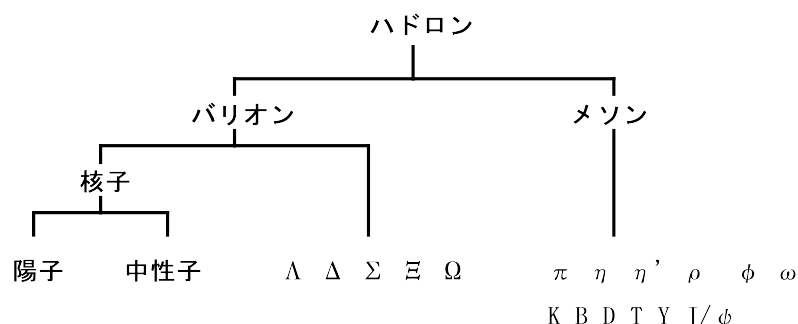
ついでの話として最初に、強い相互作用に関する単語に触れておきます。歴史的な経緯のために、強い相互作用は 2 重に使われています。元々は陽子と中性子の間の相互作用 (核力) のように、相互作用の強さが 1 程度 (電磁相互作用は 10^{-2} 、弱い相互作用は 10^{-8}) のものを強い相互作用と呼びました。1960 年代までに大量の相互作用が 1 程度の粒子が見つかり、それらをハドロン (hadron) と名付けました。この意味で、強い相互作用をする粒子の総称がハドロンで、ハドロンは素粒子とされていました。

しかし、大量のハドロンはクォークによる複合粒子として構成できることがゲルマンのクォークモデルで示され (クォークモデルは分類法であって、粒子の運動に関するモデルではない)、ハドロンを複合粒子としたパートンモデルと実験結果 (深非弾性散乱) の検証から、クォークが素粒子となり、媒介粒子の存在も必要になりました。そして、クォークモデルではクォークには 3 色のカラー自由度が必要になり、それによる $SU(3)$ ゲージ理論として QCD が作られました。カラー $SU(3)$ でのゲージ場がグルーオンで、グルーオンで媒介されるクォーク間の相互作用を強い相互作用と呼びます。

このように強い相互作用は、クォーク間とハドロン間の相互作用の 2 つの意味で使われています。クォーク間の強い相互作用が本質的でハドロン間の相互作用はそれの 2 次的なものと考える立場からは、どちらも強い相互作用と言えます。

ちなみに、パートンモデルではハドロンを構成する粒子をパートンと呼びます。パートンはクォークとグルーオンを指します。歴史的には、先に分類法としてのクォークモデルが現れ、その後に実験との検証としてパートンモデルが現れました。

ハドロンの分類は



このようになっています。ハドロンはまずフェルミオンかボソンかで区別し、フェルミオンがバリオン (baryon)、ボソンがメソン (中間子, meson) になります。その次に粒子の名前が出てきます。バリオンの陽子 (proton) と中性子 (neutron) はまとめて核子 (nucleon) と呼ばれます。実験で確認されているバリオンは約 180 個、メソンは約 190 個で、その一部だけを書いています。それらは Particle Data Group なんかを見てください。

本題のカイラル対称性に移ります。ここでは $SU(2)$ の場合だけを使います。 $SU(2)$ でのカイラル変換は

$$\exp[i\gamma_5 \frac{\tau^i}{2} \theta^i] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

と与えられます。同じローマ字の添え字は和をとります。 τ^i はパウリ行列で、 θ^i は座標依存させません。これを用いる場合はディラック場による 2 重項で

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

変換は

$$\exp[i\gamma_5 \frac{\tau^i}{2}\theta^i]\psi, \psi^\dagger \exp[-i\gamma_5 \frac{\tau^i}{2}\theta^i]$$

と作用します ($\psi^\dagger$ は 1 行 2 列なので右から変換がかかる)。 $SU(2)$ のカイラル変換と呼ぶとき、本来は $SU(2)$ のベクトル変換

$$\exp[i\frac{\tau^i}{2}\theta^i] \quad (2)$$

も含まれます。なので、区別して言うなら (1) は軸性変換、(2) はベクトル変換となります。しかし、大抵はカイラル変換と言ったときは軸性変換を指しますし、ここではベクトル変換を使わないので、(1) をカイラル変換としていきます (他のところでもカイラル変換といったときはほぼ軸性変換)。また、今の場合は $SU(2)$ 変換なので、軸性変換は $SU(2)_A$ 、ベクトル変換は $SU(2)_V$ と書きます。

この $SU(2)_A$ 変換をディラック場のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi$$

に行ってみます。無限小変換として θ^i の 2 次以上を無視すれば、運動項は

$$\begin{aligned} \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi &\Rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\gamma_5\tau^i\theta^i/2}\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu(e^{i\gamma_5\tau^i\theta^i/2}\psi) = i\psi^\dagger e^{-i\gamma_5\tau^i\theta^i/2}\gamma_0\gamma_\mu e^{i\gamma_5\tau^i\theta^i/2}\partial^\mu\psi \\ &= i\psi^\dagger(1 - \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)\gamma_0\gamma_\mu(1 + \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)\partial^\mu\psi \\ &= i\psi^\dagger(1 - \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)(1 + \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\psi \\ &= i\psi^\dagger(1 - \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5 + \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\psi \end{aligned}$$

となって変換に対して不変です (γ_5 は他のガンマ行列と反交換する)。質量項では

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &\Rightarrow \psi^\dagger e^{-i\gamma_5\tau^i\theta^i/2}\gamma_0 e^{i\gamma_5\tau^i\theta^i/2}\psi = \psi^\dagger(1 - \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)\gamma_0(1 + \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)\psi \\ &= \psi^\dagger\gamma_0(1 + \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)(1 + \frac{i\tau^i\theta^i}{2}\gamma_5)\psi \\ &= \psi^\dagger\gamma_0(1 + i\tau^i\theta^i\gamma_5)\psi \\ &= \bar{\psi}\psi + \bar{\psi}(i\tau^i\theta^i\gamma_5)\psi \end{aligned}$$

となって変換に対して不変になっていません。というわけで、 $SU(2)_A$ 変換に対して質量項は不変でない、質量 0 のフェルミオンなら $SU(2)_A$ 変換に対して不変になります。これだと単に質量 0 のフェルミオンのラグランジアンなら $SU(2)_A$ の対称性を持っていることが分かるだけなので、 $SU(2)_A$ 変換に対する他の性質を見ていきます (カイラル変換単体での性質は「南部・Jona-Lasinio モデル」参照)。

ディラック場のラグランジアンにはいませんが、相対論的量子力学の「 γ 行列～双線形～」で出てきたように、スピノールの組み合わせとして

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

これは擬スカラーです (空間反転 $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ で符号が反転する)。今の場合、 $SU(2)$ の変換なのでこれにパウリ行列を加えて

$$\bar{\psi}\tau^i\gamma_5\psi$$

として、 θ^i が微小として無限小 $SU(2)_A$ 変換してみると (i をかけたものを計算する)

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\tau^i\gamma_5\psi &\Rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\gamma_5\tau^i\theta^i/2}\gamma_0\gamma_5 e^{i\gamma_5\tau^i\theta^i/2}\psi = i\psi^\dagger(1 - \frac{i\tau^j\theta^j}{2}\gamma_5)\gamma_0\tau^i\gamma_5(1 + \frac{i\tau^k\theta^k}{2}\gamma_5)\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma_0(\gamma_5 + \frac{i\tau^j\theta^j}{2})\tau^i(1 + \frac{i\tau^k\theta^k}{2}\gamma_5)\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma_0(\tau^i\gamma_5 + \frac{i\tau^j\tau^i\theta^j}{2} + \frac{i\tau^i\tau^k\theta^k}{2})\psi \\ &= i\bar{\psi}\tau^i\gamma_5\psi + i\bar{\psi}(\frac{i\tau^j\tau^i}{2} + \frac{i\tau^i\tau^j}{2})\theta^j\psi \\ &= i\bar{\psi}\tau^i\gamma_5\psi - \bar{\psi}\delta^{ij}\theta^j\psi \\ &= i\bar{\psi}\tau^i\gamma_5\psi - \theta^i\bar{\psi}\psi \end{aligned}$$

途中でパウリ行列の関係 $\tau^i\tau^j + \tau^j\tau^i = 2\delta^{ij}$ を使っています。このように $SU(2)_A$ 変換に対して不変になっていません。しかし、重要な性質がこれから分かります。変換後の式を見ると、擬スカラー $i\bar{\psi}\tau^i\gamma_5\psi$ とスカラー $\bar{\psi}\psi$ の組み合わせになっています。つまり、 $SU(2)_A$ 変換は擬スカラーを擬スカラーとスカラーが混ざった状態に変換していると言える、お互いに入れ替われることを意味します。このことは回転変換に対応させられます。2次元の xy 平面で $A = (a, b)$ に対して回転変換を行うことで、新しい x 座標は a, b が混じった $a' = a\cos\theta - b\sin\theta \simeq a - \theta b$ に移るということを今の場合に当てはめれば (擬スカラー部分を π^i 、スカラー部分を σ として)、 $\pi^i\sigma$ 平面において (π^i, σ) を回転変換させたと言えます。このように、 $SU(2)_A$ 変換は回転変換の一種と見れます。なので、擬スカラーをスカラーに完全に変換できることも予想でき、実際そうなっています。これは微小変換とせず、三角関数を使った形で書くと分かりやすいので、その形も出しておきます (こっちは無限小変換ではない)。そのために角度の単位ベクトルとして ($|\theta|$ は θ^i の絶対値)

$$\hat{\theta}^i = \frac{\theta^i}{|\theta|}$$

このように設定して $\theta^i\tau^i$ を

$$\theta^i\tau^i = \hat{\theta}^i\tau^i|\theta|$$

と書きます。そうすると三角関数の展開

$$\cos\theta = 1 + \frac{-1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots$$

$$\sin\theta = \theta + \frac{-1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots$$

を利用して $\exp$ の展開を書き換えれば

$$\begin{aligned}
e^{i\gamma_5\tau^i\theta^i/2} &= 1 + i\gamma_5\hat{\theta}^i\tau^i\frac{|\theta|}{2} - (\hat{\theta}^i\tau^i)^2\frac{|\theta|^2}{8} - \dots \\
&= 1 + i\gamma_5\hat{\theta}^i\tau^i\frac{|\theta|}{2} - \frac{|\theta|^2}{8} - \dots \quad ((\hat{\theta}^i\tau^i)(\hat{\theta}^j\tau^j) = 1) \\
&= \cos\frac{|\theta|}{2} + i\gamma_5\hat{\theta}^i\tau^i\sin\frac{|\theta|}{2}
\end{aligned}$$

パウリ行列の性質

$$(\sigma^i A^i)(\sigma^j A^j) = A^i A^i$$

から $(\hat{\theta}^i\tau^i)(\hat{\theta}^j\tau^j) = 1$ となるのを使っています。これによって

$$\begin{aligned}
\pi^k &= i\bar{\psi}\gamma^5\tau^k\psi \\
&\Rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\theta/2}\gamma_0\gamma^5\tau^k e^{+i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\theta/2}\psi \\
&= i\psi^\dagger(\cos\frac{\theta}{2} - i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2})\gamma_0\gamma^5\tau^k(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^5(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2})\tau^k(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^5(\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} - \tau^a\hat{\theta}^a\tau^k\tau^b\hat{\theta}^b\sin^2\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^k\tau^b\hat{\theta}^b\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^a\tau^k\hat{\theta}^a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^5[\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} - (2\delta^{ak} - \tau^k\tau^a)\hat{\theta}^a\tau^b\hat{\theta}^b\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&\quad + i\gamma^5\tau^k\tau^b\hat{\theta}^b\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + i\gamma^5(2\delta^{ak} - \tau^k\tau^a)\hat{\theta}^a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}]\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^5[\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} - (2\hat{\theta}^k\tau^b\hat{\theta}^b - \tau^k)\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\gamma^5\hat{\theta}^k\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}]\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^5[\tau^k - \hat{\theta}^k\tau^b\hat{\theta}^b(1 - \cos\theta) + i\gamma^5\hat{\theta}^k\sin\theta]\psi \quad \left(\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta), 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta\right) \\
&= i\bar{\psi}\gamma^5\tau^k\psi - i(\bar{\psi}\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\psi)\hat{\theta}^k(1 - \cos\theta) - \bar{\psi}\psi\hat{\theta}^k\sin\theta
\end{aligned}$$

となって、 $|\theta| \simeq 0$ と思えば上の結果と一致します。 $k = 1$ として、回転を $\theta^1 = \pi/2, \theta^2 = \theta^3 = 0$ のように設定すれば、 $\hat{\theta}^1 = 1$ より

$$\pi^1 = i\bar{\psi}\gamma^5\tau^1\psi \Rightarrow i\bar{\psi}\gamma^5\tau^1\psi - i\bar{\psi}\gamma^5\tau^1\psi - \bar{\psi}\psi\hat{\theta}^1 = -\bar{\psi}\psi = -\sigma$$

となって、スカラーになります。

このカイラル変換の擬スカラーとスカラーを回転させるという性質が物理として重要になっています。なぜなら、カイラル変換によって擬スカラーとスカラーが入れ替わるために、カイラル対称性を持った状態の固有値は擬スカラーとスカラーで同じになっていなければいけないことが分かるからです。この数学的な結論を実験と結びつけます。

その固有値を質量とすれば、同じ質量を持った擬スカラーとスカラーの粒子が存在するはずですが (縮退している)。そして、擬スカラーとスカラーはパリティ変換 (空間反転) に対して符号が逆に変換されるために、パリティ変換によって区別されます。なので、擬スカラーとスカラーはパリティ2重項を組んでいると表現できます。で、擬スカラーではスピン0でパリティがマイナス (パリティ変換によってマイナスになるから)、スカラーではスピン

0でパリティがプラスとなっています。この性質を持っている粒子として、擬スカラーはパイオン π 、スカラーはシグマメソン σ です。シグマメソンの存在は実験での確証がないので特殊ですが、取り合えずいるとします (1980年代に一度存在を否定されている)。それぞれの質量は π は約 140MeV、 σ は約 600MeV (理論的な予想値) なので明らかに質量は同じでないです。つまり、現実の粒子においてカイラル対称性は成立していないことを示しています。シグマメソンが理論値なので、それがおかしいんじゃないかという突っ込みもありますが、一応実験値があるベクトル側でやっても同様に成り立っていません。

ベクトルといっているのは

$$\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$$

これに対応する軸性ベクトルは

$$\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi$$

今度はベクトルが空間反転によって符号が変わり、軸性ベクトルが空間反転で符号が変わらないことに注意してください。今必要なのはこれに τ^i を入れた

$$\bar{\psi}\tau^i\gamma_{\mu}\psi = \rho_{\mu}^i, \quad \bar{\psi}\tau^i\gamma_{\mu}\gamma_5\psi = a_{1\mu}^i$$

となります。 τ^i がなければ $\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ はカイラル変換に対して不変ですが、 τ_i がいると不変ではなくなります。 $\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ を $SU(2)_A$ 変換すれば

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma_{\mu}\tau^k\psi &\Rightarrow \psi^{\dagger}e^{-i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\theta/2}\gamma_0\gamma_{\mu}\tau^ke^{+i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\theta/2}\psi \\ &= \psi^{\dagger}(\cos\frac{\theta}{2} - i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2})\gamma_0\gamma_{\mu}\tau^k(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\sin\frac{\theta}{2})\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma_{\mu}(\cos\frac{\theta}{2} - i\gamma^5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\theta}{2})\tau^k(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^b\hat{\theta}^b\sin\frac{\theta}{2})\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma_{\mu}[\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} + \tau^a\tau^k\tau^b\hat{\theta}^a\hat{\theta}^b\sin^2\frac{\theta}{2} + i\gamma^5\tau^k\tau^b\hat{\theta}^b\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - i\gamma^5\tau^a\tau^k\hat{\theta}^a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}]\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma_{\mu}[\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} + (2\delta^{ak} - \tau^k\tau^a)\hat{\theta}^a\tau^b\hat{\theta}^b\sin^2\frac{\theta}{2} + i\gamma^5(\tau^k\tau^a - \tau^a\tau^k)\hat{\theta}^a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}]\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma_{\mu}[\tau^k\cos^2\frac{\theta}{2} + (2\delta^{ak} - \tau^k\tau^a)\hat{\theta}^a\tau^b\hat{\theta}^b\sin^2\frac{\theta}{2} - 2\gamma^5\epsilon^{kaj}\tau^j\hat{\theta}^a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}]\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma_{\mu}[\tau^k\cos\theta + \hat{\theta}^k\tau^b\hat{\theta}^b(1 - \cos\theta) - \gamma^5\epsilon^{kij}\hat{\theta}^i\tau^j\sin\theta]\psi \end{aligned}$$

パウリ行列の交換関係

$$[\tau^i, \tau^j] = 2\epsilon^{ijk}\tau^k$$

を使っています。微小変換とすれば

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma_{\mu}[\tau^k - \gamma_5\epsilon^{kij}\theta^i\tau^j]\psi &= \bar{\psi}\gamma_{\mu}\tau^k\psi - i\epsilon^{kij}\theta^i\tau^ji\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi \\ &= \rho_{\mu}^k - \epsilon^{kij}\theta^ia_{1\mu}^j \\ &= \rho_{\mu}^k - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}_{1\mu} \end{aligned}$$

スカラーのときより少し複雑な式になっていますが、同じようにベクトルと軸性ベクトルを混ぜています。なので、この場合でもカイラル対称性があるなら、パリティで区別される同じ質量を持った粒子が存在するはずですが。この場合は、ベクトルが ρ メソン、軸性ベクトルが a_1 メソンです (これらはベクトルなのでベクトルメソンと呼ばれる)。これらは観測値があって、 ρ メソンが 770MeV、 a_1 メソンが 1260MeV です。この場合でも質量は離れています。

というわけで、見つかっている粒子間にはカイラル対称性が実現しているための関係性がありません。この結果からカイラル対称性はないということが結論されます。ここまでなら単にカイラル対称性はないという話ですが、そう素直な構造にはなっていません。

今度は違う方向からカイラル対称性を見ます。まず、軸性ベクトルカレントを出します。まともに出すのも面倒なので、ベクトル変換 $SU(2)_V$ に対するネーターカレントであるベクトルカレント (保存カレント)

$$J_\mu^i(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu \frac{\tau^i}{2}\psi(x)$$

の類推から求めてしまいます。これは、普通の保存カレントの式に $SU(2)$ の添え字 $i = 1, 2, 3$ がついているだけです。 i はアイソスピン成分と言っていきます。

ベクトル変換によって現れる保存カレントはベクトルということから分かるように、 $SU(2)_A$ のカイラル (軸性) 変換では軸性ベクトルカレントが現れます。そして、軸性ベクトルはベクトルに γ_5 がくっつくだけなので、カイラル変換 $SU(2)_A$ の保存カレントは

$$A_\mu^i(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^i}{2}\psi(x)$$

となっています (おそらく軸性変換に対する軸性ベクトルカレントと言った方が意味が分かりやすい)。 A_μ^i とするとゲージ場と紛らわしいですが、ここではゲージ場が出てこないのでカイラル変換に対するカレントを A_μ^i と書きます。また、軸性ベクトルカレントと書くのは面倒なので軸性カレントと書きます。

カレントの他にも保存量が必要なので、保存量である 0 成分を

$$Q_5^i = \int d^3x \bar{\psi}(x)\gamma_0\gamma_5 \frac{\tau^i}{2}\psi(x) = \int d^3x A_0^i(x)$$

このように定義します (「ネーターの定理」参照)。もし、理論がカイラル対称ならその真空も当然カイラル対称なので、 Q_5^i を演算子として作用させれば

$$Q_5|0\rangle = 0$$

となっています。アイソスピン成分は無視して Q_5 と書きます。カイラル対称性を持った状況ではここで終わってしまうので、上の話でのカイラル対称性はないということから、真空はカイラル対称性を持っていないとします。真空がカイラル対称性を持っていないなら、0 にならないで

$$Q_5|0\rangle = |v\rangle \neq 0$$

これは Q_5 が真空中で粒子生成を行えるとしたことにもなります。この状態と真空中で $A_\mu^i(x)$ を挟んで (A_μ^i は演算子)

$$\langle 0|A_\mu^i|v\rangle = \langle 0|\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^i}{2}\psi(x)|v\rangle \neq 0$$

フーリエ変換して運動量表示にするなら単純に

$$\langle 0|\bar{\psi}(p')\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^i}{2}\psi(p)|v\rangle \neq 0$$

となるだけです。 $\psi(p)$ と $\bar{\psi}(p')$ は on-shell として、質量を $p^2 = p'^2 = m^2$ とします。後は v として何を選ぶのかを決めます。そのために Q_5 が保存量であることからの制限を使います。

Q_5 が保存量となるためには、ハミルトニアン H がカイラル対称性を持っている必要性あります。そして、 Q_5 が保存量なら、ハミルトニアンと保存量は交換することから

$$H|v\rangle = HQ_5|0\rangle = Q_5H|0\rangle = 0$$

となっていることが分かります (真空はカイラル対称でなく、ハミルトニアンはカイラル対称性を持っているとして)。真空の定義 (エネルギーが 0) とローレンツ共変性から $H|0\rangle$ は対称性が破れてようとも 0 とできます。この式から H を $|v\rangle$ に作用させると 0 になることが分かります。さらに 3 次元運動量演算子 $\mathbf{P}$ でも同様のことが言えて

$$\mathbf{P}|v\rangle = \mathbf{P}Q_5|0\rangle = -Q_5\mathbf{P}|0\rangle + i \int d^3x \nabla A_0^i(x)|0\rangle = 0$$

$$([\mathbf{P}, A_0^i(x)] = i\nabla A_0^i(x))$$

となります。この場合は空間の並進不変性から $\mathbf{P}|0\rangle = 0$ で、積分の項は表面積分で落ちます。空間の並進不変性がこう書けるのは $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ が空間並進の演算子であることから分かります。ハミルトニアン演算子はエネルギー、3 次元運動量演算子は 3 次元運動量なので、 $|v\rangle$ はエネルギーと 3 次元運動量が 0 になっているのが分かります。このため、 $|v\rangle$ は質量も 0 でなければいけません。よって、 Q_5 から生成される状態 $|v\rangle$ は質量 0 粒子の状態になっていけばいいことが分かり、それをパイオン π^i として

$$\langle 0|\bar{\psi}(p')\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^i}{2}\psi(p)|\pi^j\rangle \quad (3)$$

とします。 $|v\rangle$ は $|0\rangle$ に Q_5 がかかって作られているために擬スカラーの必要があることと、パイオンは他の粒子に比べて質量が小さいということから、選択としては妥当です。

真空ではカイラル対称性が破れてて、ハミルトニアンではカイラル対称性は破られていないとしているので、今の状況はカイラル対称性が真空で自発的に破れているように作られています。そうすると、質量 0 として導入されたパイオンはゴールドストーンボソンに対応させられます。そもそもこの話は、対称性が自発的に破れている時、3 次元運動量を 0 としたとき $E = 0$ となる状態 (相対論の関係 $E^2 - |\mathbf{k}|^2 = m^2$ から、質量 0 粒子の状態に対応) が存在する、というゴールドストーンの定理そのものです。

(3) に $q^\mu = (p' - p)^\mu$ を作用させて、ディラック方程式 $p_\mu\gamma^\mu\psi = m\psi$ を使うと

$$\begin{aligned} \langle 0|\bar{\psi}(p')q^\mu\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^i}{2}\psi(p)|\pi^j\rangle &= \langle 0|\bar{\psi}(p')(p'_\mu\gamma^\mu - p_\mu\gamma^\mu)\gamma_5\frac{\tau^i}{2}\psi(p)|\pi^j\rangle \\ &= \langle 0|\bar{\psi}(p')(m\gamma^\mu + \gamma_5p_\mu\gamma^\mu)\gamma_5\frac{\tau^i}{2}\psi(p)|\pi^j\rangle \\ &= 2m\langle 0|\bar{\psi}(p')\gamma_5\frac{\tau^i}{2}\psi(p)|\pi^j\rangle \\ &= -im\langle 0|\bar{\psi}(p')i\gamma_5\tau^i\psi(p)|\pi^j\rangle \end{aligned}$$

$\langle 0, |\pi^j\rangle$ に挟まれている部分は、演算子なので、作用したとき $i = j$ でないと 0 になってしまうと考えられるために、これは δ^{ij} に比例することになります。この結果を位置表示に戻すと

$$q^\mu\langle 0|\bar{\psi}(p')\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^i}{2}\psi(p)|\pi^j\rangle \propto \delta^{ij} \Rightarrow \partial^\mu\langle 0|\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^i}{2}\psi(x)|\pi^j\rangle \propto \delta^{ij}$$

位置表示での比例部分を $f_\pi m_\pi^2$ として

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^i(x) | \pi^j \rangle = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ij}$$

とします。 f_π はパイオンの崩壊定数、 m_π はパイオンの質量です。この関係を部分的に保存される軸性カレント (partially conserved axial vector current) 仮説と呼び、略して PCAC です。パイオンの崩壊定数が出てくる理由は、 $\langle 0 |, |\pi^j \rangle$ 部分がパイオンから真空への遷移なので、これはパイオンのミューオン-ニュートリノ (もしくは電子-ニュートリノ) 崩壊の遷移振幅に比例することから、パイオンの崩壊定数が出てくるためです。

PCAC はもっと感覚的に出すこともできます。最初に運動量 q でのパイオンの状態を使って

$$\langle 0 | A_\mu^i(x) | \pi^j(q) \rangle$$

というのを作ります。このとき、ローレンツ不変性を考えれば

$$\langle 0 | A_\mu^i(x) | \pi^j(q) \rangle = -i F q_\mu e^{-iqx} \delta^{ij}$$

となっていると考えられます (F は定数。規格化は無視しています)。この式の左辺は、始状態 $\pi^j(p)$ から軸性カレントを経由して終状態の真空になっていると考えられるので、 $A_\mu^i(x)$ はパイオンを運ぶカレントとなります。 β 崩壊ではベクトルカレント-軸性ベクトルカレント型の相互作用によって崩壊が計算されていたことを考えれば、今の場合は軸性カレントが崩壊に寄与していると見なせて、 F をパイオンの崩壊定数 f_π としてしまえます。よって、 ∂^μ を両辺に作用させれば

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^i(x) | \pi^j(q) \rangle = -f_\pi q^2 e^{-iqx} \delta^{ij} = -f_\pi m_\pi^2 e^{-iqx} \delta^{ij}$$

となって、パイオン状態が運動量依存しているときの PCAC が求まります。また

$$\langle 0 | \Phi^i(x) | \pi^j(q) \rangle = \delta^{ij} e^{-iqx}$$

となるような場 Φ^i を導入すれば、状態を外せて

$$A_\mu^i(x) = f_\pi \partial_\mu \Phi^i(x) \quad (4)$$

PCAC を演算子による式の形で書けます。ここまでの話から Φ^i はパイオン場と解釈できます。

$\partial^\mu A_\mu^i(x)$ は軸性カレント $A_\mu^i(x)$ の発散なので、これが 0 になれば軸性カレントは保存されます。で、PCAC の式を見ると明らかに 0 ではないので保存されていませんが、もしパイオンの質量が小さいなら、近似的に軸性カレントは保存されていると見ることができます。

実際の計算において、パイオンは核子と結合して現れるので核子との軸性カレントが重要になります。そして、核子を使った軸性カレントに対して PCAC を使って導出されるゴールドバーガー・トライマン (Goldberger-Treiman) の関係は実験とほぼ一致することが分かっています。

ゴールドバーガー・トライマンの関係をまともに導くための情報を用意するのが面倒なので、細かいことを省いて雑に求めます。核子の軸性カレント A_μ^{tot} を (アイソスピンの成分は省略して書きます)

$$A_\mu^{tot} = g_A \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \psi_N + f_\pi \partial_\mu \Phi$$

とします。第 1 項が核子による通常の軸性カレントで、 ψ_N は陽子と中性子によるアイソスピン 2 重項、 g_A は核子の形状因子です (核子は電子と違って内部構造があるので形状因子が必要)。第 2 項でパイオンからの寄与として (4) を加えています。 β 崩壊の計算において核子部分が軸性カレントからズレており、それはパイオンからの強い相互作用による寄与と考えて、このように加えます。通常の軸性カレントは核子の質量が 0 とは考えられないので、発散を取っても 0 にならないですが、パイオンの寄与を加えることで補正された軸性カレント A_μ^{tot} は保存していると考えます (PCAC においてパイオンの質量を 0 とする)。軸性カレント A_μ^{tot} が保存しているなら発散を取ったときに 0 になるので

$$\partial^\mu (g_A \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_N) + f_\pi \partial^\mu \partial_\mu \Phi = 0$$

$$f_\pi \partial^\mu \partial_\mu \Phi = -g_A \partial^\mu (\bar{\psi}_N \gamma_\mu) \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_N + g_A \bar{\psi}_N \gamma_5 \frac{\tau}{2} \partial^\mu (\gamma_\mu \psi_N)$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = -i \frac{g_A M}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \tau \psi_N$$

途中でディラック方程式 $\partial^\mu \bar{\psi}_N \gamma_\mu = iM_N$, $\gamma_\mu \partial^\mu \psi_N = -iM_N$ を使っています (核子はフェルミオン)。この式の格好は質量 0 のクライン・ゴールドン方程式なので (軸性カレントが保存するとしてるので、当然パイオンの質量は 0)、右辺はパイオンと核子による相互作用項になります。そして、 $g_A M_N / f_\pi$ はパイオンと核子の相互作用における結合定数 $g_{\pi NN}$ に相当します。崩壊定数を $f_\pi \simeq 93(\text{MeV})$ 、核子の質量を $M_N \simeq 940(\text{MeV})$ 、形状因子を $g_A = 1.26$ とすれば

$$g_{\pi NN} = \frac{g_A M_N}{f_\pi} \simeq 12.7$$

これがゴールドバーガー・トライマンの関係です。実験的には $g_{\pi NN} = 13.4$ 程度なので、10% の誤差に収まっています。よって、理論における軸性カレントは保存していると考えられます。

また、軸性カレントが保存していないとして、PCAC を使うなら

$$\partial^\mu A_\mu^{\text{tot}} = -f_\pi m_\pi^2 \Phi$$

なので

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_\pi^2) \Phi = -i \frac{g_A M}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \tau \psi_N$$

となって、パイオンの質量が 0 でない式になります。この式からゴールドバーガー・トライマンの関係は軸性カレントが保存していなくても成立しているように見えますが、軸性カレント A_μ^i を核子の状態で挟んでちゃんと計算すると、パイオン質量を 0 の極限に取ることに相当する手続きをします。なので、ゴールドバーガー・トライマンの関係は軸性カレントが保存していることを要求します。

ここまでして来た 2 つの話は、実験的に見つかっている粒子はカイラル対称性を持っていない、軸性カレントは (部分的に) 保存される、ということです。で、この 2 つは明らかに矛盾しています。軸性カレントが保存されるならカイラル対称性は成立しているはずですが、粒子の質量の組み合わせはカイラル対称性を持っていません。どちらも実験との比較が出来ているので、どちらかが致命的に間違っていると言うことはできません。なので、この 2 つを共存させる発想が必要になります。といっても、PCAC の導出でカイラル対称性が真空中で破れているというのを使ったことから予想できるように、カイラル対称性の自発的破れを考えればいいだけです。つまり、粒子の質量 (パイオンとシグマメソン等) がカイラル対称性を持っていないのは真空中でカイラル対称性が自発的に破れたために質量に差ができたとし (パイオンはゴールドストーンボソン)、真空中で対称性が破れただけなのでハミルトニアン自体はカイラル対称性を持つために軸性カレントは (部分的に) 保存すると考えればいいことになります。

このようにカイラル対称性の破れを考えることによって、ハドロンのカイラル対称性に関する話を矛盾なく進められます。これが、カイラル対称性とその破れが必要になる理由です。また、ハドロン質量とクォーク質量を説明するためにもカイラル対称性の破れは必要になり (こっちはクォークのフレーバに対するカイラル対称性)、それが「カイラル対称性の力学的破れ」での話です。

話としては簡単なことなので、カイラル対称性周りはほとんど解決しているんじゃないかと思いますが、実際にやろうとするととんでもなく難しく、今 (2010 年) でも根本的には解決していません (この手の話は 1960 年代ぐらいから始まっています)。