相互作用描像と時間発展演算子

相互作用があるときに扱いやすい相互作用描像を与えます。そして、それを使って時間発展演算子を作ります。
量子力学での「相互作用描像」と同じ話ですが、ここでは場の演算子に関連づけて作っていきます。
古典的な場と場の演算子の両方が出てきますが、演算子にハットをつけて区別していません。

状態に時間依存を持たせるシュレーディンガー描像と、演算子に持たせるハイゼンベルク描像があります。これらは相互作用があるとき不便なので、より便利な方法を作ります。

相互作用があるときに何が問題になるのかを簡単に見ておきます。相互作用があるときラグランジアンは、例えば実スカラー場のとき

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi)$$

として、クライン・ゴルドン方程式に新しい項がくっつきます。これをオイラー・ラグランジュ方程式に入れれば

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

となり、右辺が 0 でなくなります。例えば V として (λ は定数)

$$V(\phi) = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

とすれば

$$(\Box + m^2)\phi(x) = -\frac{\lambda}{6}\phi^3$$

このように $V(\phi)$ を選んだものを ϕ^4 理論と言います。これは非線形方程式なので、一般的に解く方法がありません。これが問題で、物理で必要になる相互作用項を入れると大抵の場合で微分方程式が非線形になり解けなくなります。このため、フーリエ展開の係数 $a_{\boldsymbol{p}}(t)$ の時間依存性を知ることが出来ません ($a_{\boldsymbol{p}}(t) = a_{\boldsymbol{p}}e^{iEt}$ とはならない)。これは場の量子化において、生成、消滅演算子を分からなくします。

場の演算子も同様の非線形方程式に従うことを見ておきます。場の演算子に対する時間発展はハイゼンベルク方程式から

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = [\phi(x), H]$$

と与えられます。ここでの H は相互作用項も含めたハミルトニアンで

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x(\pi\dot{\phi} - \mathcal{L}) \qquad (\dot{\phi} = \partial_0\phi) \\
&= \int d^3x(\frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(x))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)) \\
&= \int d^3x(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int})
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{int}$ は相互作用項、π は正準共役な量で

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

これからハイゼンベルク方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = [\phi(x), H]$$
$$= \int d^3y[\phi(\boldsymbol{x},t), \frac{1}{2}\pi^2(\boldsymbol{y},t) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\boldsymbol{y},t))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\boldsymbol{y},t) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4(\boldsymbol{y},t)]$$

このとき、同時刻交換関係として

$$[\phi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{y},t)] = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\ ,\ [\phi(\boldsymbol{x},t), \phi(\boldsymbol{y},t)] = [\pi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{y},t)] = 0$$

が成立しているとすれば

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) &= \frac{1}{2}\int d^3y[\phi(\boldsymbol{x},t), \pi^2(\boldsymbol{y},t)] \\
&= \frac{1}{2}\int d^3y(\pi(\boldsymbol{y},t)[\phi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{y},t)] + [\phi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{y},t)]\pi(\boldsymbol{y},t)) \\
&= i\int d^3y\ \pi(\boldsymbol{y},t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) &= \pi(\boldsymbol{y},t)
\end{aligned}$$

$\pi(x)$ のハイゼンベルク方程式にこれを入れれば

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) &= [\pi(x), H] \\
&= \int d^3y[\pi(\boldsymbol{x},t), \frac{1}{2}\pi^2(\boldsymbol{y},t) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\boldsymbol{y},t))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\boldsymbol{y},t) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4(\boldsymbol{y},t)] \\
&= \int d^3y\big(\frac{1}{2}[\pi(\boldsymbol{x},t), (\nabla\phi(\boldsymbol{y},t))^2] + \frac{1}{2}m^2[\pi(\boldsymbol{x},t), \phi^2(\boldsymbol{y},t)] + \frac{\lambda}{4!}[\pi(\boldsymbol{x},t), \phi^4(\boldsymbol{y},t)]\big) \\
&= -i\int d^3y\big(\nabla_y\phi(\boldsymbol{y},t)\nabla_{\boldsymbol{y}}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + m^2\phi(\boldsymbol{y},t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + 4\frac{\lambda}{4!}\phi^3(\boldsymbol{y},t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\big) \\
&= -i\int d^3y\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(-\nabla_y^2\phi(\boldsymbol{y},t) + m^2\phi(\boldsymbol{y},t) + \frac{\lambda}{6}\phi^3(\boldsymbol{y},t)) \\
\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) &= \nabla^2\phi(\boldsymbol{x},t) - m^2\phi(\boldsymbol{x},t) - \frac{\lambda}{6}\phi^3(\boldsymbol{x},t) \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) &= \nabla^2\phi(\boldsymbol{x},t) - m^2\phi(\boldsymbol{x},t) - \frac{\lambda}{6}\phi^3(\boldsymbol{x},t)
\end{aligned}$$

$\nabla_{\boldsymbol{y}}$ は $\boldsymbol{y}$ の微分です。よって

$$(\Box + m^2)\phi(x) = -\frac{\lambda}{6}\phi^3(\boldsymbol{x}, t)$$

となって、場の演算子は同じ形の非線形微分方程式に従います (これは演算子の方程式なので意味が異なる)。なので、場の演算子の時間発展を記述するハイゼンベルク方程式が解けません。この状況を改善するために相互作用描像を導入します。

古典的な場のシュレーディンガー方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi(t)$$

を用意します。$\boldsymbol{x}$ 依存性は関係ないので省いていきます。相互作用ありハミルトニアン H は時間依存しないとし、この中にいる相互作用項 H_{int} を分けて

$$H = H_0 + H_{int}$$

相互作用なしのハミルトニアン H_0 は自由ハミルトニアン H_0、H_{int} は相互作用ハミルトニアン H_{int}、H は全ハミルトニアンと言っていきます (H_0, H_{int} はシュレーディンガー描像)。また、自由ハミルトニアンと言ったときには、相互作用がないという意味でなく、そのハミルトニアンで記述される場は解くことができるという意味を持たせます。解の形として

$$\psi(t) = e^{-iH_0(t-t_0)}\Psi(t) \quad\quad (\psi(t_0) = \Psi(t_0))$$

というのを仮定すると (t_0 は適当な初期値)、シュレーディンガー方程式は、演算子としての H_0 と H_{int} は一般的には交換しないことから

$$\begin{aligned}
H_0 e^{-iH_0(t-t_0)}\Psi(t) + ie^{-iH_0(t-t_0)}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) &= (H_0 + H_{int})e^{-iH_0(t-t_0)}\Psi(t) \\
i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) &= e^{iH_0(t-t_0)}H_{int}e^{-iH_0(t-t_0)}\Psi(t) \\
i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) &= H'_{int}\Psi(t)
\end{aligned} \tag{1}$$

と書き換えられます。このように、H'_{int} によるシュレーディンガー方程式の形を作るための自由ハミルトニアン H_0 による変換

$$\Psi(t) = e^{iH_0(t-t_0)}\psi(t)\ ,\ H'_{int} = e^{iH_0(t-t_0)}H_{int}e^{-iH_0(t-t_0)}$$

による描像を相互作用描像 (interaction picture)、もしくは朝永描像やディラック描像と呼びます (今の $\Psi(t)$ は古典的な量)。シュレーディンガー描像、ハイゼンベルク描像との関係を見ていきます。

シュレーディンガー描像とハイゼンベルク描像の関係はブラケットを使えば、ハミルトニアン H によって

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle_H$$

ケットについてる S, H はシュレーディンガー描像、ハイゼンベルク描像を表しています。ある時間 t_0 としていますが、面倒なら $t_0 = 0$ としてください。これからシュレーディンガー描像での時間発展は

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t')}|\psi(t')\rangle_S \tag{2}$$

によって表され、$e^{-iH(t-t')}$ は時間発展演算子です。

演算子に対するシュレーディンガー描像とハイゼンベルク描像の関係は

$$O_H(t) = e^{iH(t-t_0)}O_S(t_0)e^{-iH(t-t_0)}$$

となっています。演算子の添え字 S, H もシュレーディンガー描像、ハイゼンベルク描像を表します。また、ハミルトニアン演算子は

$$H(t) = e^{iH(t-t_0)}He^{-iH(t-t_0)} = H$$

となり、両方の描像で同じです。

シュレーディンガー描像では場の演算子が位置 $\boldsymbol{x}$ のみに依存するので、相対論的な場合では時間を含んでいるハイゼンベルク描像の方が適しています。しかし、最初に見たように相互作用があるときハイゼンベルク描像では H の相互作用項のために、実際の計算が複雑になりすぎるという欠点があります (大抵解くことができない)。

なので、全ハミルトニアン H でなく、自由ハミルトニアン H_0 を使って、演算子 O_S と状態ベクトル $|\psi(t)\rangle_S$ に対して

$$O_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)}O_S(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}$$

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S$$

としたものを作ります。添え字 I がついてるのが相互作用描像です。シュレーディンガー描像に対して、ハイゼンベルク描像は全ハミルトニアンそのものを使い、相互作用描像では相互作用があろうと自由ハミルトニアンを使うということです。相互作用描像とハイゼンベルク描像の関係は

$$O_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}O_H(t)e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}$$

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle_H$$

状態 (ケット) を見ると分かるように、$|\psi(t)\rangle_I$ は $|\psi(t)\rangle_S$ から自由ハミルトニアン H_0 による時間発展を抜いた形です。そして、これから分かるように相互作用ハミルトニアン H_{int} が 0 のとき相互作用描像とハイゼンベルク描像は一致します。また、演算子、状態ベクトルは $t = 0$ に対して

$$O_I(0) = O_H(0) = O_S$$

$$|\psi(0)\rangle_I = |\psi(0)\rangle_S = |\psi\rangle_H$$

となります。

実際に $|\psi(t)\rangle_I$ が (1) になることは、H は演算子であることに気をつけて t 微分を計算すれば

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_I =& -H_0 e^{iH_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S + e^{iH_0(t-t_0)} i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_S \\
=& -H_0 e^{iH_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S + e^{iH_0(t-t_0)} H|\psi(t)\rangle_S \\
=& -H_0 e^{iH_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S + e^{iH_0(t-t_0)} H e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S \\
=& -H_0|\psi(t)\rangle_I + H_I|\psi(t)\rangle_I \\
=& (H_I - H_0^I)|\psi(t)\rangle_I \quad (H_0 = e^{iH_0 t}H_0 e^{-iH_0 t} = H_0^I) \\
=& H_{int}^I|\psi(t)\rangle_I \quad\ (H_I = e^{iH_0 t}(H_0 + H_{int})e^{-iH_0 t} = H_0^I + H_{int}^I)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となるので分かります。(1) でもそうですが、相互作用描像での相互作用ハミルトニアン H_{int}^I によるシュレーディンガー方程式の形になるので、相互作用描像と言われます。

相互作用描像での演算子の t 微分は

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}O_I(t) =& -H_0 e^{iH_0(t-t_0)}O_S(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)} + e^{iH_0(t-t_0)}O_S(t_0)H_0 e^{-iH_0(t-t_0)} \\
=& -H_0 O_I(t) + O_I(t)H_0 \\
=& [O_I(t), H_0]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

これから、相互作用描像での演算子は自由ハミルトニアン H_0 によるハイゼンベルク方程式を満たしています。言い換えれば、$O_I(t)$ の時間発展は H_0 によって記述されるということです。これが相互作用描像の利点です。

この利点を具体的に見るために、クライン・ゴルドン場を使います。簡単のために $t_0 = 0$ にします。スカラー場の演算子 ϕ_I をハイゼンベルク方程式に入れれば

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}\phi_I(t) =& [\phi_I(t), H_0] \quad \Big(H_0 = \int d^3x(\frac{1}{2}\pi^2(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\boldsymbol{x}))^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(\boldsymbol{x}))\Big) \\
=& [e^{iH_0 t}\phi_S e^{-iH_0 t}, H_0] \\
=& e^{iH_0 t}[\phi_S, H_0]e^{-iH_0 t} \\
=& ie^{iH_0 t}\pi_S e^{-iH_0 t} \\
\frac{\partial}{\partial t}\phi_I(t) =& \pi_I(t)
\end{aligned}
$$

「クライン・ゴルドン場～実数スカラー場～」で求めた

$$
[\phi_S, H_0] = [\phi(\boldsymbol{x}), H_0] = i\pi(\boldsymbol{x}) = i\pi_S
$$

を使っています。そして、

$$i\frac{\partial}{\partial t}\pi_I = [\pi_I, H_0] = e^{iH_0t}[\pi_S, H_0]e^{-iH_0t} = ie^{iH_0t}(\nabla^2 - m^2)\phi_S e^{-iH_0t} = i(\nabla^2 - m^2)\phi_I$$

$$[\pi_S, H_0] = i(\nabla^2 - m^2)\phi_S$$

から、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_I(t) = \frac{\partial}{\partial t}\pi_I(t) = (\nabla^2 - m^2)\phi_I$$

となるので、$\phi_I(t)$ は相互作用のないクライン・ゴルドン方程式

$$(\Box + m^2)\phi_I(t) = 0$$

に従います。よって、「クライン・ゴルドン場〜実数スカラー場〜」でのハイゼンベルク描像の式がそのまま使えるので、$a_{\boldsymbol{p}}^{I\dagger}, a_{\boldsymbol{p}}^I$ を相互作用描像での生成、消滅演算子として

$$\phi_I(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}(a_{\boldsymbol{p}}^I e^{-ipx} + a_{\boldsymbol{p}}^{I\dagger}e^{ipx})$$

$p_0 = E_{\boldsymbol{p}}$ としています。このように、相互作用描像は相互作用なしでのハイゼンベルク描像の形と一致します。なので、$a_{\boldsymbol{p}}^{I\dagger}, a_{\boldsymbol{p}}^I$ は通常の交換関係

$$[a_{\boldsymbol{p}}^I, a_{\boldsymbol{p}'}^{I\dagger}] = \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$$

に従い (他の交換関係は 0)、$a_{\boldsymbol{p}}^I$ によって真空 $|0\rangle_I$ は

$$a_{\boldsymbol{p}}^I|0\rangle_I = 0$$

と定義できます。

このように、相互作用描像の演算子は相互作用のないハイゼンベルク方程式になるので、相互作用描像の演算子は相互作用のないハイゼンベルク描像の演算子とみなせます。これを別の方向からも見ておきます。ハイゼンベルグ描像の古典的な場を

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \int d^3p a_{\boldsymbol{p}}(t)e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

と展開したとします (規格化は無視します)。$a_{\boldsymbol{p}}(t)$ を演算子化すれば、全ハミルトニアン H によるハイゼンベルク方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}a_{\boldsymbol{p}}(t) = [a_{\boldsymbol{p}}(t), H]$$

に従います ($a_{\boldsymbol{p}}^\dagger(t), a_{\boldsymbol{p}}(t)$ は生成、消滅演算子の交換関係に従う)。これも H_0 に関しては解くことができても、H_{int} がいる H では解けないとします。なので、H を直接扱わずに分かっている範囲内の情報を加えることを考えます。

H_0 は単純なエネルギー固有値で表現できるとして、例えば相互作用項のないクライン・ゴルドン場なら H_0 に対して

$$E = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$$

が使えるとします。この段階での情報によって、$a_{\boldsymbol{p}}(t_0) = a_{\boldsymbol{p}}$ から H_0 に従う $a'_{\boldsymbol{p}}(t)$ (例えば相互作用項のないクライン・ゴルドン方程式に従う) として

$$a'_{\boldsymbol{p}}(t) = a_{\boldsymbol{p}} e^{-iEt} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}} e^{iEt}$$

を作り (「クライン・ゴルドン場〜実スカラー場〜」参照)、これによって展開される場 $\phi'(\boldsymbol{x}, t)$ を作ってしまえば、全ハミルトニアンを使わずにすみます。そして、演算子化したとき、H_0 と $a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$ の交換関係は分かるので、$a'_{\boldsymbol{p}}(t), a'^\dagger_{\boldsymbol{p}}(t)$ に対応する演算子として

$$\begin{aligned}
a'(t) \;&\Leftrightarrow\; \hat{a}_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} \hat{a}_S e^{-iH_0(t-t_0)} = \hat{a}_S e^{-iE(t-t_0)} \\
a'^\dagger(t) \;&\Leftrightarrow\; \hat{a}^\dagger_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} \hat{a}^\dagger_S e^{-iH_0(t-t_0)} = \hat{a}^\dagger_S e^{iE(t-t_0)}
\end{aligned}$$

というのが作れ ($a, a^\dagger$ にハットをつけて演算子との区別を明確にしています)、これは相互作用描像です。つまり、相互作用描像での場の演算子 $\phi'(\boldsymbol{x}, t) = \phi_I(\boldsymbol{x}, t)$ を生成、消滅演算子 $a^\dagger_I(t), a_I(t)$ で展開したとき、相互作用のないハイゼンベルク描像の場の演算子と同じ構造を持ちます。このため、相互作用のないハイゼンベルク描像の場の演算子を真空に作用させたときと同じ結果を出します。これは先に示した話と同じです。

他にも、例えばハミルトニアンの相互作用項 H_{int} は、場の演算子 $\phi_S, \partial_i\phi_S$ とその共役量 π_S によって

$$H^I_{int} = e^{iH_0(t-t_0)} H_{int}(\pi_S(t_0), \phi_S(t_0), \partial_i\phi_S(t_0)) e^{-iH_0(t-t_0)} = H_{int}(\pi_I, \phi_I, \partial_i\phi_I)$$

となるので、H^I_{int} は H_{int} の場の演算子を相互作用描像に置き換えればいいだけです。そして、ϕ_I は相互作用のないハイゼンベルク描像の演算子と同じです。

次に相互作用描像の状態 $|\psi(t)\rangle_I$ が、どのように相互作用がある中で時間発展するのか見ていきます。なので、重要なのは (3) です。まずは、状態 $|\psi(t)\rangle_I$ の時間発展を形式的に表現するために、時間発展演算子 $U(t, t_0)$ を作ります。ここから時間発展演算子と言った時は (2) でなく、相互作用描像での時間発展演算子 $U(t, t_0)$ を指します。$|\psi(t)\rangle_I$ は時間発展演算子によって

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I$$

このように t_0 から t へ発展するとします。この演算子 $U(t, t_0)$ はシュレーディンガー描像と相互作用描像の関係を使うことで

$$\begin{aligned}
|\psi(t_2)\rangle_I &= e^{iH_0(t_2-t_0)} |\psi(t_2)\rangle_S \\
&= e^{iH_0(t_2-t_0)} e^{-iH(t_2-t_1)} |\psi(t_1)\rangle_S \\
&= e^{iH_0(t_2-t_0)} e^{-iH(t_2-t_1)} e^{-iH_0(t_1-t_0)} |\psi(t_1)\rangle_I
\end{aligned}$$

よって

$$U(t_2,t_1)=e^{iH_0(t_2-t_0)}e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH_0(t_1-t_0)}$$

とわかります。また、ハイゼンベルク描像から始めることで

$$O_H(t)=e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}O_I(t)e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}$$

なので、t_2 を t にして $t_1=t_0$ とすれば

$$U(t,t_0)=e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}$$

$$O_H(t)=U^\dagger(t,t_0)O_I(t)U(t,t_0)$$

$$|\psi(t)\rangle_I=U(t,t_0)|\psi\rangle_H$$

となります。

$U(t_2,t_1)$ の性質をまとめておくと

$$\begin{aligned}
&U(t_1,t_1)=1\\
&U^{-1}(t_2,t_1)=U(t_1,t_2)\\
&U(t_3,t_2)U(t_2,t_1)=U(t_3,t_2)U^\dagger(t_1,t_2)=U(t_3,t_1)\\
&U^\dagger(t_2,t_1)U(t_2,t_1)=I\quad(\text{ユニタリー演算子})
\end{aligned}$$

時間発展演算子 U は量子力学で出てくるのと同じなので、「相互作用描像」と同じことをします。

U を時間微分すれば

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=&-H_0e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}+e^{iH_0(t-t_0)}He^{-iH(t-t_0)}\\
=&-e^{iH_0(t-t_0)}H_0e^{-iH(t-t_0)}+e^{iH_0(t-t_0)}He^{-iH(t-t_0)}\\
=&\,e^{iH_0(t-t_0)}(H-H_0)e^{-iH(t-t_0)}\\
=&\,e^{iH_0(t-t_0)}(H-H_0)e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}\\
=&\,H^I_{int}(t)U(t,t_0)\quad(H^I_{int}(t)=e^{iH_0(t-t_0)}(H-H_0)e^{-iH_0(t-t_0)})
\end{aligned}$$

相互作用描像の状態と同じシュレーディンガー方程式の形になり、U は H_0 によって時間依存性が与えられた $H^I_{int}(t)$ に従っています。ハイゼンベルク描像からの $U(t,t_0)$ を使っていますが、どちらでも時間依存の関係上同じ結果になります。これ以降、相互作用描像の相互作用ハミルトニアンしか出てこないので、H^I_{int} を H_{int} と表記します。

この微分方程式を逐次近似で解きます。微分方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_{int}(t)U(t,t_0)$$

に対して、境界条件を $U(t_0,t_0)=1$ として、積分範囲 t_0 から t で積分すれば

$$U(t,t_0)=1+(-i)\int_{t_0}^{t}dt'H_{int}(t')U(t',t_0)$$

最初の近似として $U=1$ での

$$U^{(1)}(t_1,t_0)=I+(-i)\int_{t_0}^{t_1}dt_1H_{int}(t_1)$$

これを、次の近似として $U(t',t_0)$ に入れれば

$$U(t,t_0)=1+(-i)\int_{t_0}^{t}dt'H_{int}(t')\big(1+(-i)\int_{t_0}^{t'}dt'H_{int}(t')\big)$$

文字の対応から代入する部分は $t_1\to t'$ としています。同様に続けることで

$$\begin{aligned}U(t,t_0)=\ &1+(-i)\int_{t_0}^{t}dt_1H_{int}(t_1)+(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)\\&+(-i)^3\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\int_{t_0}^{t_2}dt_3H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)H_{int}(t_3)+\cdots\\&+(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nH_{int}(t_1)\cdots H_{int}(t_n)\end{aligned}$$

この展開はノイマン級数 (Neumann series) もしくはダイソン (Dyson) 級数と呼ばれます。

積分範囲を揃えます。階段関数 Θ を使うと、例えば

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)=\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\Theta(t_1-t_2)H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)$$

左辺は直角三角形、右辺は四角形の積分領域になります。積分範囲が揃っているので変数は勝手に付け替えられて

$$\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)=\int_{t_0}^{t}dt_2\int_{t_0}^{t}dt_1\Theta(t_2-t_1)H_{int}(t_2)H_{int}(t_1)$$

この 2 つ足せば

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 (\Theta(t_1 - t_2) H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) + \Theta(t_2 - t_1) H_{int}(t_2) H_{int}(t_1)) \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \mathrm{T}[H_{int}(t_1) H_{int}(t_2)]
\end{aligned}
$$

右辺の T は時間順序積です。このように、時間順序積によって積分範囲を t_0 から t に揃えた形で書けます。一般化すると

$$
\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}(t_1) \cdots H_{int}(t_n) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_n \mathrm{T}(H_{int}(t_1) \cdots H_{int}(t_n))
$$

これを使うと $U(t, t_0)$ は

$$
\begin{aligned}
U(t, t_0) &= 1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{int}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!}\int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2 \mathrm{T}(H_{int}(t_1) H_{int}(t_2)) + \cdots \\
&= \mathrm{T}\Big[\exp\Big[-i\int_{t_0}^{t} dt' H_{int}(t')\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

と書けます。この時間発展演算子は散乱の計算で重要なものです。

相互作用描像の利点は、相互作用描像の演算子は相互作用のないハイゼンベルク方程式に従うことと、時間発展演算子に対応するのが相互作用描像での相互作用ハミルトニアンであることです。そして、時間発展演算子にいる相互作用ハミルトニアンが相互作用描像であるために、この部分も相互作用のないハイゼンベルク描像の演算子と見なせます。このように、計算に使われる場の演算子が相互作用のない場合 (解くことができるもの) に置き換えられるので、摂動計算に適しています。