

プロカ方程式

質量を持つベクトル場の方程式を簡単に見ていきます。

質量を持つベクトル場 (質量を持つスピン 1 のボソン) はプロカ (Proca) 方程式に従います。プロカ方程式はスカラー場のように質量 m の項を

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu$$

と加えます。質量項によってゲージ不変性はなくなります。これをオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu A_\mu)} = 0$$

に入れると、第一項と第三項はマクスウェル方程式を作り、残りの第二項によって新しい項が加わることになり

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) + m^2 A^\mu = j^\mu$$

として、質量項が表われます。この方程式をプロカ方程式と呼びます。 $j^\mu = 0$ として ∂_μ をプロカ方程式に作用させると

$$\begin{aligned} 0 &= \square \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) + m^2 \partial_\mu A^\mu \\ &= (\square - \square + m^2) \partial_\mu A^\mu \end{aligned}$$

なので、ローレンツ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ がオイラー・ラグランジュ方程式の結果として出てきます。プロカ方程式に使用すれば

$$(\square + m^2) A^\mu = 0$$

このように、4 個のクライン・ゴールドン方程式となります。

また、エネルギー・運動量テンソルは、電磁場の場合に質量項がつくだけなので

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\rho)} \partial_\nu A^\rho - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = -F_{\mu\rho} \partial_\nu A^\rho + g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha + j_\alpha A^\alpha \right)$$

と求められます。

プロカ方程式の伝播関数 $D_{\nu\lambda}(x, y)$ は

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu = (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu + g^{\mu\nu} m^2) A_\mu = 0$$

から、 $i\epsilon$ をつけて

$$(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu + g^{\mu\nu}m^2 - ig^{\mu\nu}\epsilon)D_{\nu\lambda}(x, y) = \delta^4(x - y)\delta_\lambda^\mu$$

と定義できます。ついでに、電磁場との対応を取りやすくするためにゲージ固定項を加えて

$$(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu + \frac{1}{\xi}\partial^\mu\partial^\nu + g^{\mu\nu}m^2)A_\mu = 0$$

$$(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu + \frac{1}{\xi}\partial^\mu\partial^\nu + g^{\mu\nu}M^2)D_{\nu\lambda}(x, y) = \delta^4(x - y)\delta_\lambda^\mu \quad (M^2 = m^2 - i\epsilon)$$

運動量表示にして、ローレンツ共変な形 $D_{\nu\lambda} = Ag_{\nu\lambda} + Bq_\nu q_\lambda$ になるように求めます。運動量を q^μ として

$$\begin{aligned} & (-g^{\mu\nu}q^2 + q^\mu q^\nu(1 - \frac{1}{\xi}) + g^{\mu\nu}M^2)(Ag_{\nu\lambda} + Bq_\nu q_\lambda) \\ &= -Ag^{\mu\nu}q^2g_{\nu\lambda} + Aq^\mu q^\nu(1 - \frac{1}{\xi})g_{\nu\lambda} + AM^2g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} \\ &\quad -Bg^{\mu\nu}q^2q_\nu q_\lambda + Bq^\mu q^\nu(1 - \frac{1}{\xi})q_\nu q_\lambda + BM^2g^{\mu\nu}q_\nu q_\lambda \\ &= A(-\delta_\lambda^\mu q^2 + \delta_\lambda^\mu M^2 + q^\mu q_\lambda(1 - \frac{1}{\xi})) \\ &\quad + B(-q^2 q^\mu q_\lambda + M^2 q^\mu q_\lambda + q^2 q^\mu q_\lambda(1 - \frac{1}{\xi})) \\ &= \delta_\lambda^\mu \end{aligned}$$

これから

$$A(-q^2 + M^2) = 1$$

$$Aq^\mu q_\lambda(1 - \frac{1}{\xi}) + Bq^\mu q_\lambda(-q^2 + M^2 + q^2(1 - \frac{1}{\xi})) = 0$$

なので、 A は

$$A = -\frac{1}{q^2 - M^2}$$

B は

$$0 = -\frac{1}{q^2 - M^2}(1 - \frac{1}{\xi}) + B(-q^2 + M^2 + q^2(1 - \frac{1}{\xi}))$$

$$B = \frac{1}{q^2 - M^2}(1 - \xi^{-1})(-q^2 + M^2 + q^2(1 - \xi^{-1}))^{-1}$$

となり

$$\begin{aligned}
Ag_{\nu\lambda} + Bq_{\nu}q_{\lambda} &= -\frac{g_{\nu\lambda}}{q^2 - M^2} + \frac{q_{\nu}q_{\lambda}}{q^2 - M^2}(1 - \xi^{-1})(M^2 - \xi^{-1}q^2)^{-1} \\
&= \frac{1}{q^2 - M^2}(-g_{\nu\lambda} + q_{\nu}q_{\lambda}(1 - \xi^{-1})\frac{1}{M^2 - q^2\xi^{-1}}) \\
&= \frac{1}{q^2 - M^2}(-g_{\nu\lambda} + \frac{q_{\nu}q_{\lambda}(1 - \xi)}{q^2 - \xi M^2})
\end{aligned}$$

よって、プロカ方程式の伝播関数は

$$D_{\nu\lambda}(q) = \frac{1}{q^2 - M^2}(-g_{\nu\lambda} + \frac{q_{\nu}q_{\lambda}(1 - \xi)}{q^2 - \xi M^2})$$

ゲージ固定項を消すなら、 ξ の無限大の極限を取ればいいので

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} D_{\nu\lambda}(q) = \frac{1}{q^2 - M^2}(-g_{\nu\lambda} - \frac{q_{\nu}q_{\lambda}\xi}{-\xi M^2}) = \frac{1}{q^2 - M^2}(-g_{\nu\lambda} + \frac{q_{\nu}q_{\lambda}}{M^2})$$

となります。

偏極ベクトルにも触れておきます。偏極ベクトルは3次元運動量 $\mathbf{k}$ と3次元角運動量 $\mathbf{J}$ によるヘリシティ演算子 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ の固有ベクトルとして定義されます。 z 軸方向 (第3成分方向) に進んでいるとして、 J_z とその固有値を $\lambda = \pm 1$ (ヘリシティの固有値が ± 1) として

$$J_z \epsilon(\pm) = \pm \epsilon(\pm) \quad (\mathbf{k} = (0, 0, |\mathbf{k}|))$$

偏極ベクトルの直交性は

$$\epsilon^*(\pm) \cdot \epsilon(\pm) = 1, \quad \epsilon^*(\pm) \cdot \epsilon(\mp) = 0$$

と与えます。 J_z は (「リー群」参照)

$$J_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので

$$\epsilon(+)=\frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}, \quad \epsilon(-)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}$$

さらに固有値が0の場合として

$$\epsilon(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\epsilon(0)$ は運動量方向のベクトルです。今は $\partial_\mu A^\mu = 0$ から自由度は 3 なので、これらによって偏極ベクトルは与えられます。

また、 $\epsilon(\pm)$ は 3 次元デカルト座標での基底ベクトル

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から

$$\epsilon(\pm) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 \pm i\epsilon_2)$$

として作られています。

回転の生成子 J_i ($i = x, y, z$) の交換関係は

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

となっており、角運動量演算子と同じです。このため、角運動量演算子と同じように、固有ベクトル $\epsilon(\pm), \epsilon(0)$ に対して、上昇、下降演算子を

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & -i \\ \pm 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

として作れて、実際に

$$J_+\epsilon(-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\epsilon(0)$$

同様に求めれば

$$J_+\epsilon(0) = \sqrt{2}\epsilon(+), \quad J_-\epsilon(+) = \sqrt{2}\epsilon(0), \quad J_-\epsilon(0) = \sqrt{2}\epsilon(-)$$

となります。

任意の運動量方向での偏極ベクトルにするには回転させればいいです。今は z 軸方向を基準にしているので、極座標 (r, θ, ϕ) での角度 θ, ϕ で回転させれば任意の方向になります (θ は z 軸からの角度、 ϕ は x 軸からの角度)。なので、 y 軸周りに回転させて、 z 軸周りに回転させます。その回転変換は

$$\begin{aligned}
R(\theta, \phi) &= R_z(\phi)R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これを偏極ベクトルに作用させて

$$\begin{aligned}
\epsilon(\mathbf{n}, +) &= \frac{-1}{\sqrt{2}} R(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - i \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi + i \cos \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\
\epsilon(\mathbf{n}, -) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi + i \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi - i \cos \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\
\epsilon(\mathbf{n}, 0) &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これが運動量方向 $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ を基準とした偏極ベクトルです。
 $\epsilon(\mathbf{n}, \pm)$ から

$$\sum_{\lambda=\pm} \epsilon^{i*}(\mathbf{n}, \lambda) \epsilon^j(\mathbf{n}, \lambda)$$

を求めてみます。 $\epsilon^{1*}\epsilon^1$ では

$$\begin{aligned}
\epsilon^{1*}(\mathbf{n}, +)\epsilon^1(\mathbf{n}, +) + \epsilon^{1*}(\mathbf{n}, -)\epsilon^1(\mathbf{n}, -) &= \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \\
&= 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\
&= 1 - \frac{(k^1)^2}{|\mathbf{k}|^2} \quad (n^1 = \frac{k^1}{|\mathbf{k}|} = \sin \theta \cos \phi)
\end{aligned}$$

$\epsilon^{1*}\epsilon^2$ では

$$\begin{aligned}
\epsilon^{1*}(\mathbf{n}, +)\epsilon^2(\mathbf{n}, +) + \epsilon^{1*}(\mathbf{n}, -)\epsilon^2(\mathbf{n}, -) &= \frac{1}{2}(\cos\theta\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\theta\sin\phi + i\cos\phi) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\cos\theta\cos\phi - i\sin\phi)(\cos\theta\sin\phi - i\cos\phi) \\
&= \frac{1}{2}(\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi + i\cos\theta\sin^2\phi + i\cos\theta\cos^2\phi - \sin\phi\cos\phi) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi - i\cos\theta\sin^2\phi - i\cos\theta\cos^2\phi - \sin\phi\cos\phi) \\
&= \cos^2\theta\sin\phi\cos\phi - \sin\phi\cos\phi \\
&= (\cos^2\theta - 1)\sin\phi\cos\phi \\
&= -\sin\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi \\
&= -n^1n^2 \\
&= -\frac{k^1k^2}{|\mathbf{k}|^2}
\end{aligned}$$

他も同様にすることで

$$\sum_{\lambda=\pm} \epsilon^{i*}(\mathbf{n}, \lambda)\epsilon^j(\mathbf{n}, \lambda) = \delta^{ij} - \frac{k^ik^j}{|\mathbf{k}|^2}$$

これは「マクスウェル方程式」での横偏極ベクトルでの和と一致します。

質量が0でないなら静止系にできるので、 ϵ から静止系での4元偏極ベクトルを

$$\epsilon^\mu(\pm) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^\mu(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として作ります。そして、静止系から $-z$ 軸方向へ速度 v_z で進む座標系へローレンツ変換して、 z 軸方向の運動量を持たせます。 $-z$ 軸方向のローレンツ変換は

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (\beta = v_z, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_z^2}})$$

これによって $k^\nu = (m, 0, 0, 0)$ が

$$k'^\mu = \Lambda^\mu_\nu k^\nu = (k_0, 0, 0, k_z)$$

と変換されるとします。そうすると、 $\epsilon'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \epsilon^\nu$ は、 $k_0 = m\gamma$, $k_z = m\beta\gamma$ から

$$\epsilon'^{\mu}(n_z, \pm) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon'^{\mu}(n_z, 0) = \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k_z \\ 0 \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix}$$

任意の運動量方向 $\mathbf{n}$ を基準にするなら、3次元回転 $R(\theta, \phi)$ を行えばいいので、 $\epsilon^{\mu}(\mathbf{n}, \pm)$ は

$$\epsilon^{\mu}(\mathbf{n}, \pm) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{n}, \pm 1) \end{pmatrix}$$

$\epsilon^{\mu}(\mathbf{n}, 0)$ は

$$\epsilon(\mathbf{n}, 0) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_z \\ 0 \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k_z \\ k_0 \sin \theta \cos \phi \\ k_0 \sin \theta \sin \phi \\ k_0 \cos \theta \end{pmatrix}$$

回転前では $k_z = |\mathbf{k}|$ ($k_0^2 = |\mathbf{k}|^2 + m^2$) なので、回転不変性から

$$\epsilon(\mathbf{n}, 0) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} |\mathbf{k}| \\ k_0 \sin \theta \cos \phi \\ k_0 \sin \theta \sin \phi \\ k_0 \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} |\mathbf{k}| \\ k_0 \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

これらが、質量があるときの偏極ベクトルとなります。

質量があるときの $\epsilon^{\mu}(\mathbf{n}, 0)$ は $1/m$ を含むために、質量を 0 にできません。これが質量が 0 での電磁場において、縦偏極が物理的な意味を持たないことに対応します ($\epsilon^{\mu}(\mathbf{n}, 0)$ の空間成分は 3 次元運動量方向)。

3 個の偏極ベクトルの和による完全性を

$$\sum_{\lambda=\pm,0} \epsilon^{\mu*}(\mathbf{n}, \lambda) \epsilon^{\nu}(\mathbf{n}, \lambda)$$

と定義します。 $\epsilon^{0*} \epsilon^0$ と $\epsilon^{0*} \epsilon^i$ は

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=\pm,0} \epsilon^{0*}(\mathbf{n}, \lambda) \epsilon^0(\mathbf{n}, \lambda) &= \epsilon^{0*}(\mathbf{n}, 0) \epsilon^0(\mathbf{n}, 0) = \frac{|\mathbf{k}|^2}{m^2} \\ \sum_{\lambda=\pm,0} \epsilon^{0*}(\mathbf{n}, \lambda) \epsilon^i(\mathbf{n}, \lambda) &= \epsilon^{0*}(\mathbf{n}, 0) \epsilon^i(\mathbf{n}, 0) = \frac{|\mathbf{k}|}{m} \frac{k_0}{m} n^i = \frac{k_0 k^i}{m^2} \end{aligned}$$

$\epsilon^{1*}(\mathbf{n}, \lambda) \epsilon^1(\mathbf{n}, \lambda)$ では

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=\pm,0} \epsilon^{1*}(\boldsymbol{n}, \lambda) \epsilon^1(\boldsymbol{n}, \lambda) &= \epsilon^{1*}(\boldsymbol{n}, +) \epsilon^1(\boldsymbol{n}, +) + \epsilon^{1*}(\boldsymbol{n}, -) \epsilon^1(\boldsymbol{n}, -) + \epsilon^{1*}(\boldsymbol{n}, 0) \epsilon^1(\boldsymbol{n}, 0) \\
&= \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi + \frac{k_0 n^1 k_0 n^1}{m^2} \\
&= 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{(k_0)^2 (k^1)^2}{m^2 |\boldsymbol{k}|^2} \\
&= 1 - \frac{(k^1)^2}{|\boldsymbol{k}|^2} + \frac{(|\boldsymbol{k}|^2 + m^2)(k^1)^2}{m^2 |\boldsymbol{k}|^2} \\
&= 1 + \frac{(k^1)^2}{m^2}
\end{aligned}$$

他の成分も同様に求めれば、完全性は

$$\sum_{\lambda=\pm,0} \epsilon^{\mu*}(\boldsymbol{n}, \lambda) \epsilon^\nu(\boldsymbol{n}, \lambda) = -(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2})$$

となります。