

伝播関数について

ここでは、「クライン・ゴールドン場～伝播関数～」と「ディラック場～伝播関数～」での話を詳しく見ていきます。真空期待値 $\langle 0|O|0\rangle$ を $\langle O\rangle$ と書いていますが、同じ意味で使っています。

最後の補足で伝播関数の定義に対する注意をしています。

場の量子論において相関関数やグリーン関数と呼ばれるものは場の演算子 (ハイゼンベルグ描像) の真空期待値を指します。その中で場の演算子 2 つの時間順序の指定によって作られるのが伝播関数です。伝播関数は場の量子論において中心的な役割を担い、摂動計算において活躍します。このことは「 S 行列」で分かります。

注意を 1 つ言っておきます。ここでは 3 つのグリーン関数を導入しますが、起源となる微分方程式 (クライン・ゴールドン方程式とか) は同じです。違うのはグリーン関数に現われる極をどのように避けるのか (境界条件の取り方) という違いだけです。

最初に「クライン・ゴールドン場～伝播関数～」で行った計算を複素スカラー場としてもう一度くりかえします。複素スカラー場として、場の演算子はハイゼンベルグ描像で

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{ipx}) = \phi_{(-)}(x) + \phi_{(+)}(x)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p^\dagger e^{ipx} + b_p e^{-ipx}) = \phi_{(-)}^\dagger(x) + \phi_{(+)}^\dagger(x)$$

$$(px = p_0x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}, E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$$

生成、消滅演算子の交換関係は

$$[a_p, a_q^\dagger] = [b_p, b_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

面倒だったので、「規格化について」で示した規格化を使っていません。

単純に場の演算子を $\phi(x)\phi^\dagger(y)$ の真空期待値を計算すると

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi^\dagger(y) \rangle &= \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \\ &= \langle 0|(\phi_{(-)}(x) + \phi_{(+)}(x))(\phi_{(-)}^\dagger(y) + \phi_{(+)}^\dagger(y))|0\rangle \\ &= \langle 0|(\phi_{(-)}(x)\phi_{(-)}^\dagger(y) + \phi_{(+)}(x)\phi_{(+)}^\dagger(y) + \phi_{(+)}(x)\phi_{(-)}^\dagger(y) + \phi_{(-)}(x)\phi_{(+)}^\dagger(y))|0\rangle \\ &= \langle 0|\phi_{(-)}(x)\phi_{(-)}^\dagger(y)|0\rangle \\ &= \langle \phi_{(-)}(x)\phi_{(-)}^\dagger(y) \rangle \end{aligned}$$

$\phi_{(+)}^\dagger(y)$ は消滅演算子を含んでいるので、

$$\phi_{(+)}^\dagger(y)|0\rangle = 0$$

$\phi_{(+)}(x)$ は $\langle 0|$ に対して消滅演算子として作用するので

$$\langle 0|\phi_{(+)}(x) = 0$$

となることを使っています。さらに計算していくと

$$\begin{aligned} \langle \phi_{(-)}(x)\phi_{(-)}^{\dagger}(y) \rangle &= \langle 0| \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} a_p a_q^{\dagger} e^{-ipx} e^{iqy} |0\rangle \\ &= \langle 0| \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} [a_p, a_q^{\dagger}] e^{-ipx} e^{iqy} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{-ipx} e^{iqy} \langle 0|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ipx} e^{ipy} \quad (p_0 = q_0 = E_p) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \end{aligned} \quad (1)$$

場の演算子を逆に並べた場合は、 $|0\rangle$ には $\phi_{(-)}$ 、 $\langle 0|$ には $\phi_{(-)}^{\dagger}$ が消滅演算子として作用するので

$$\begin{aligned} \langle \phi^{\dagger}(y)\phi(x) \rangle &= \langle 0|(\phi_{(-)}^{\dagger}(y)\phi_{(-)}(x) + \phi_{(+)}^{\dagger}(y)\phi_{(+)}(x) + \phi_{(+)}^{\dagger}(y)\phi_{(-)}(x) + \phi_{(-)}^{\dagger}(y)\phi_{(+)}(x))|0\rangle \\ &= \langle 0|\phi_{(+)}^{\dagger}(y)\phi_{(+)}(x)|0\rangle \\ &= \langle 0| \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} b_q b_p^{\dagger} e^{-iqy} e^{ipx} |0\rangle \\ &= \langle 0| \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} [b_q, b_p^{\dagger}] e^{-iqy} e^{ipx} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{-iqy} e^{ipx} \langle 0|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{+ip(x-y)} \end{aligned} \quad (2)$$

これらは場の演算子の真空期待値を計算しただけです。

場の量子論の計算で必要なのは、時間の順序を指定した場の演算子の真空期待値です。なので、時間の順序を指定するために、時間順序積 T によって

$$\Delta_F(x, y) = \langle 0|T(\phi(x)\phi^{\dagger}(y))|0\rangle = \theta(x_0 - y_0)\langle 0|\phi(x)\phi^{\dagger}(y)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0)\langle 0|\phi^{\dagger}(y)\phi(x)|0\rangle$$

としたものを定義します。 $\theta(x_0)$ は階段関数です。これが、複素スカラー場のファインマン伝播関数 (Feynman propagator) です。単に伝播関数と言った時は大体これを指します。伝播関数の特徴は粒子と反粒子の過程の両方が含まれている点です。このことを簡単に言葉で示します。

場 $\phi^\dagger(y)$ を真空 $|0\rangle$ に作用させれば生成演算子の項が生き残るので、時間 y_0 、座標 \mathbf{y} に 1 粒子状態が生成されます ($y_0 < x_0$ として)。逆に、場 $\phi(x)$ を $\langle 0|$ に作用すれば $(\langle \phi^\dagger(x)|0\rangle)^\dagger = \langle 0|\phi(x)$ 、消滅演算子によって、時間 x_0 、座標 \mathbf{x} に 1 粒子状態が生成します。つまり、伝播関数は $y_0 < x_0$ において、 y で生成された粒子が x で消滅することを表す 1 粒子の散乱振幅になります。今の過程によって作られる粒子の電荷をプラスとすれば、 y で電荷が $+1$ され、 x で -1 されるという過程に相当します。この過程を時間を逆向きに追うと、 x で電荷が -1 され、 y で電荷が $+1$ されたように見えます。つまり、反粒子による過程です (反粒子は負のエネルギーを持って時間を逆行する粒子として扱う。QED の「伝播関数」参照)。この反粒子による過程が $y_0 > x_0$ での散乱振幅です。なぜなら、この場合では、 $\phi(x)|0\rangle$ となって反粒子の生成演算子が作用し電荷が -1 、 $\langle 0|\phi^\dagger(y)$ では反粒子の消滅演算子が作用し電荷が $+1$ となるからです。というわけで、ファインマン伝播関数には同じ過程と見なせる粒子と反粒子による過程が含まれています。

$\Delta_F(x, y)$ はクライン・ゴールドン方程式のグリーン関数です。それを確かめておきます。 x による微分は

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \Delta_F(x, y) &= \delta_{\mu 0} \delta(x_0 - y_0) \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(x_0 - y_0) \partial_\mu \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \\
&\quad - \delta_{\mu 0} \delta(y_0 - x_0) \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0) \partial_\mu \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \\
&= \delta_{\mu 0} \delta(x_0 - y_0) (\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle - \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle) \\
&\quad + \theta(x_0 - y_0) \partial_\mu \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0) \partial_\mu \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \\
&= \delta_{\mu 0} \delta(x_0 - y_0) \langle 0|[\phi(x), \phi^\dagger(y)]|0\rangle \\
&\quad + \theta(x_0 - y_0) \partial_\mu \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0) \partial_\mu \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \\
&= \theta(x_0 - y_0) \partial_\mu \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0) \partial_\mu \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle
\end{aligned}$$

階段関数の微分

$$\frac{\partial \theta(x_0)}{\partial x_\mu} = \delta_{\mu 0} \delta(x_0)$$

と、複素スカラー場での $\phi(x), \phi^\dagger(y)$ による同時刻交換関係は消えることを使っています (共役量は $\pi = \dot{\phi}^\dagger$)。さらにもう 1 回微分すると

$$\begin{aligned}
\Box \Delta_F(x, y) &= \delta^{\mu 0} \delta(x_0 - y_0) \partial_\mu \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(x_0 - y_0) \Box \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \\
&\quad - \delta^{\mu 0} \delta(y_0 - x_0) \partial_\mu \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0) \Box \langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle
\end{aligned}$$

そうすると、クライン・ゴールドン方程式の演算子を $\Delta_F(x, y)$ に作用させると

$$\begin{aligned}
(\square + m^2)\Delta_F(x, y) &= \delta^{\mu 0}\delta(x_0 - y_0)\partial_\mu\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(x_0 - y_0)\square\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \\
&\quad - \delta^{\mu 0}\delta(y_0 - x_0)\partial_\mu\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0)\square\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \\
&\quad + m^2\theta(x_0 - y_0)\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + m^2\theta(y_0 - x_0)\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \\
&= \delta^{\mu 0}\delta(x_0 - y_0)\partial_\mu\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(x_0 - y_0)(\square + m^2)\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \\
&\quad - \delta^{\mu 0}\delta(y_0 - x_0)\partial_\mu\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0)(\square + m^2)\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0)\partial_0\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle - \delta(y_0 - x_0)\partial_0\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0)\langle 0|\dot{\phi}(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle - \delta(y_0 - x_0)\langle 0|\phi^\dagger(y)\dot{\phi}(x)|0\rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0)\langle 0|[\dot{\phi}(x), \phi^\dagger(y)]|0\rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0)\langle 0|[\pi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)]|0\rangle \\
&= -i\delta(x_0 - y_0)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -i\delta^4(x - y)
\end{aligned}$$

途中で、クライン・ゴールドン方程式と同時刻交換関係

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

を使っています。というわけで、 $\Delta_F(x, y)$ はクライン・ゴールドン方程式のグリーン関数です。

伝播関数 $\Delta_F(x, y)$ は (1) と (2) を使うことで

$$\Delta_F(x, y) = \theta(x_0 - y_0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} + \theta(y_0 - x_0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip(x-y)}$$

これに対して、「クライン・ゴールドン場～伝播関数～」と同じように、積分経路を選択して留数定理によって p_0 積分をくっつけば

$$\Delta_F(x, y) = \int_C \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{-1}{(p_0 + E_p)(p_0 - E_p)} e^{-ip_0(x_0 - y_0)}$$

となります。伝播関数に対する p_0 の複素平面における積分経路 C は、 $x_0 > y_0$ では下半円を通り経路の内側に E_p を含み、 $x_0 < y_0$ では上半円を通り経路の内側に $-E_p$ を含みます (QED の「伝播関数」参照)。

$\Delta_F(x, y)$ の運動量表示を求めます。QED の「伝播関数」や「クライン・ゴールドン場～伝播関数～」のように積分経路の選択によってグリーン関数に条件 (時間順序) を入れる方法で求められますが、別の方法を取ってみます。

ここでは階段関数が

$$\theta(x_0 - y_0) = -\frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(x_0 - y_0)}}{z + i\epsilon}$$

$$\theta(y_0 - x_0) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iz(y_0 - x_0)}}{z - i\epsilon}$$

と書けることを使って、伝播関数の定義から直接計算します ($\theta(y_0 - x_0)$ は $\theta(x_0 - y_0)$ の複素共役)。そうすると ($\epsilon \rightarrow 0$ の極限は省いていきます)

$$\begin{aligned}\Delta_F(x, y) &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z+i\epsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iz(y_0-x_0)}}{z-i\epsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \\ &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{e^{-i(z+p_0)(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)}}{z+i\epsilon} - \frac{e^{i(-z+p_0)(x_0-y_0)} e^{ip_i(x^i-y^i)}}{z-i\epsilon} \right)\end{aligned}$$

変数変換を第一項と第二項に対して

$$p'_0 = z + p_0, \quad p'_0 = z - p_0$$

として、第二項で $p \Rightarrow -p$ とすれば

$$\begin{aligned}\Delta_F(x, y) &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{e^{-ip'_0(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)}}{p'_0 - p_0 + i\epsilon} - \frac{e^{-ip'_0(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)}}{p'_0 + p_0 - i\epsilon} \right) \\ &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{e^{-ip'(x-y)}}{p'_0 - p_0 + i\epsilon} - \frac{e^{-ip'(x-y)}}{p'_0 + p_0 - i\epsilon} \right)\end{aligned}$$

ここの記号は

$$p_0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad p'x = p'_0 x_0 + p_i x^i = p'_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$

となっています。exp 内の 4 元運動量 p'_μ の 0 成分は p'_0 なので、 p_0 とは違い $E_{\mathbf{p}}$ と無関係になっていることに注意してください。計算を続けると

$$\begin{aligned}\Delta_F(x, y) &= i \int \frac{dp'_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{1}{p'_0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon} - \frac{1}{p'_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon} \right) e^{-ip(x-y)} \\ &= i \int \frac{dp'_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{p'_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon - p'_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon}{(p'_0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon)(p'_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon)} e^{-ip(x-y)} \\ &= i \int \frac{dp'_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0'^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon'} e^{-ip(x-y)} \\ &= i \int \frac{dp'_0 d^3p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0'^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon'} e^{-ip(x-y)}\end{aligned}$$

ϵ は極を避ける微小量なので、分子のものは消しています。分母の計算は

$$(p'_0 - E_{\mathbf{p}} + i\epsilon)(p'_0 + E_{\mathbf{p}} - i\epsilon) = p_0'^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + 2iE_{\mathbf{p}}\epsilon = p_0'^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + i\epsilon'$$

ϵ^2 は無視し、 $E_p > 0$ のために ϵ' とできます。見やすくするために、 p'_0, ϵ' を p_0, ϵ と書くことにすれば

$$\Delta_F(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$$

右辺は明らかにフーリエ変換の式なので

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

このように、時間順序があることによって $i\epsilon$ が入ってきます。これから、QED の「伝播関数」で選んだ積分経路が伝播関数の時間順序になっていることを確認できます。

次に伝播関数に関係する量を見ていきます。時間順序による制限を含まない

$$\Delta(x, y) = [\phi(x), \phi^\dagger(y)]$$

このことを考えます (真空期待値にしなくても特に問題がないので、真空中で挟まずに進めます)。これは

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= \left[\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{ipx}), \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (a_q^\dagger e^{iqy} + b_q e^{-iqy}) \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q}} \\ &\quad \times \left([a_p, a_q^\dagger] e^{-ipx} e^{iqy} + [a_p, b_q] e^{-ipx} e^{-iqy} + [b_p^\dagger, a_q^\dagger] e^{ipx} e^{iqy} + [b_p^\dagger, b_q] e^{ipx} e^{-iqy} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q}} \left((2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{-ipx} e^{iqy} - (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{ipx} e^{-iqy} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \\ &= \Delta^{(+)}(x, y) + \Delta^{(-)}(x, y) \end{aligned}$$

p_0 は $p_0 = E_p$ です。これを 4 次元積分の形にするには、「クライン・ゴールドン場～伝播関数～」で示したのと同じように

$$\int_C dp_0 \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p^2 - m^2} = -2\pi i \left(\frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \Big|_{p_0=E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{ip(x-y)} \Big|_{p_0=-E_p} \right) \quad (3)$$

とできることを使えばいいです。

このときの積分経路 C は $\pm E_p$ を両方含む経路で、図 1 です。経路をこのように取るとしているため、時間順序 $x_0 > y_0$ はいらぬです (半円を付ける操作がない)。そうすると

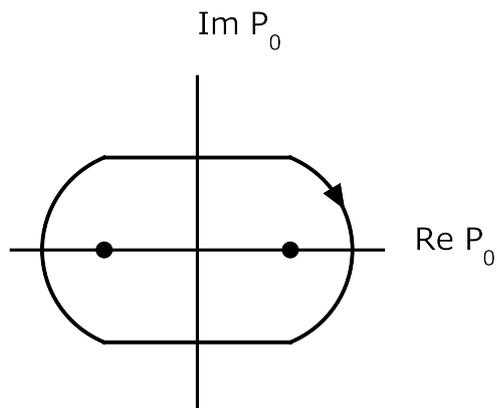


図 1

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)}) \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip_0(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)} - e^{ip_0(x_0-y_0)} e^{ip_i(x^i-y^i)}) \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip_0(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)} - e^{ip_0(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)}) \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip_0(x_0-y_0)} - e^{ip_0(x_0-y_0)}) e^{-ip_i(x^i-y^i)} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_C dp_0 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p^2 - m^2} e^{-ip_i(x^i-y^i)} \\
 &= i \int_C \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2}
 \end{aligned}$$

よって、 $\Delta(x, y)$ は

$$\Delta(x, y) = i \int_C \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2}$$

と書けます。

この計算を追っていくときに気が付くように (特に (3) から)、 $\Delta^{(+)}(x, y)$ と $\Delta^{(-)}(x, y)$ はそれぞれ正エネルギー、負エネルギーの状態に対応しています。また、 $\Delta(x, y)$ は $p_0 = E_{\mathbf{p}}$ であることを利用すると

$$\begin{aligned}
\Delta(x, y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \\
&= \int dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip_0(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)} \delta(p_0 - E_{\mathbf{p}}) - e^{-ip_0(x_0-y_0)} e^{ip_i(x^i-y^i)} \delta(p_0 + E_{\mathbf{p}})) \\
&= \int dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip_0(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)} \delta(p_0 - E_{\mathbf{p}}) - e^{-ip_0(x_0-y_0)} e^{-ip_i(x^i-y^i)} \delta(p_0 + E_{\mathbf{p}})) \\
&= \int dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (\delta(p_0 - E_{\mathbf{p}}) - \delta(p_0 + E_{\mathbf{p}})) e^{-ip(x-y)} \\
&= \Delta^{(+)}(x, y) + \Delta^{(-)}(x, y)
\end{aligned} \tag{4}$$

と変形できます。そして、デルタ関数の性質

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta(p_0^2 - E_{\mathbf{p}}^2) = \delta((p_0 - E_{\mathbf{p}})(p_0 + E_{\mathbf{p}})) = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [\delta(p_0 - E_{\mathbf{p}}) + \delta(p_0 + E_{\mathbf{p}})]$$

から、階段関数 $\theta(\pm p_0)$ をデルタ関数に合わせることで

$$\theta(\pm p_0) \delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \delta(p_0 \mp E_{\mathbf{p}})$$

となるのを使えば

$$\Delta^{(+)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)}$$

$$\Delta^{(-)}(x, y) = - \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \theta(-p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)}$$

このように表わせます。デルタ関数の存在のために、 $\Delta^{(\pm)}(x, y)$ は on-shell です (on-shell は $p^2 = m^2$ の関係を持つこと)。また、演算子を使えば

$$\Delta^{(+)}(x, y) = \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle, \quad \Delta^{(-)}(x, y) = -\langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

これらや (4) から分かるように

$$\Delta^{(+)}(x, y) = -\Delta^{(-)}(y, x)$$

という関係を持っています ($y = 0$ なら $\Delta^{(+)}(x) = -\Delta^{(-)}(-x)$)。もしくは複素共役によって

$$\Delta^{(\pm)}(x, y) = (\Delta^{(\mp)}(x, y))^*$$

という関係になっています。

ここで定義した $\Delta(x), \Delta^{(+)}(x), \Delta^{(-)}(x)$ はクライン・ゴールドン方程式そのものに従います。つまり

$$(\square + m^2)\Delta(x) = 0, (\square + m^2)\Delta^{(\pm)}(x) = 0$$

このことは $\Delta(x)$ が場の演算子の交換関係であることから分かります (場の演算子にクライン・ゴールドン方程式の演算子がかかっているため 0 になる)。

伝播関数は $\Delta^{(+)}$ と $\Delta^{(-)}$ を使って表わすことができます。 $\Delta^{(+)}$ と $\Delta^{(-)}$ が正負のエネルギーに対応していることや、 $\Delta(x, y)$ が交換関係によって作られていることから予想できるように

$$\Delta_F(x, y) = \theta(x_0 - y_0)\Delta^{(+)}(x, y) - \theta(y_0 - x_0)\Delta^{(-)}(x, y)$$

このようになっています。第二項をマイナスにしないために $\Delta^{(-)}(x, y)$ にマイナスを含めて定義するときもあります。ちなみに、 $\Delta^{(\pm)}(x, y)$ は on-shell と言いましたが、伝播関数 $\Delta_F(x, y)$ は $p^2 = m^2$ になっていないために on-shell でないです (on-shell でないことは off shell と言います)。物理量は on-shell の必要があるので、伝播関数は直接的な物理量ではないです。

分野次第では頻出する他の大事なグリーン関数を出しておきます。 $\Delta(x, y)$ に時間の階段関数をつけて

$$\Delta_R(x, y) = \theta(x_0 - y_0)\Delta(x, y)$$

$$\Delta_A(x, y) = -\theta(y_0 - x_0)\Delta(x, y)$$

$\Delta_R(x, y)$ は遅延 (retarded) グリーン関数、 $\Delta_A(x, y)$ は先進 (advanced) グリーン関数です。階段関数のつき方から分かるように、遅延は未来方向へ全ての情報を運び、先進は過去方向へ全ての情報を運びます。この場合の極は、 p_0 の複素平面上での実軸上にあり、積分経路は、これから示すように遅延グリーンは実軸の上側を、先進グリーンは下側を通るようにします。

運動量表示にすれば極の位置は直接見えるので、運動量表示に持っていきます。ファインマン伝播関数と同じ手順によって、遅延グリーン関数は

$$\begin{aligned} \Delta_R(x, y) &= \theta(x_0 - y_0)\Delta(x, y) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z+i\epsilon} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{e^{-i(z+E_{\mathbf{p}})(x_0-y_0)}}{z+i\epsilon} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \frac{e^{-i(z-E_{\mathbf{p}})(x_0-y_0)}}{z+i\epsilon} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z-E_{\mathbf{p}}+i\epsilon} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \frac{e^{-iz(x_0-y_0)}}{z+E_{\mathbf{p}}+i\epsilon} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0-E_{\mathbf{p}}+i\epsilon} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0+E_{\mathbf{p}}+i\epsilon} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0-E_{\mathbf{p}}+i\epsilon} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0+E_{\mathbf{p}}+i\epsilon} e^{+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left(\frac{1}{p_0-E_{\mathbf{p}}+i\epsilon} - \frac{1}{p_0+E_{\mathbf{p}}+i\epsilon} \right) e^{-ip(x-y)} \\ &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_0+i\epsilon)^2 - E_{\mathbf{p}}^2} e^{-ip(x-y)} \end{aligned}$$

というわけで、 $p_0 = \pm E_p - i\epsilon$ となっているので極は p_0 の複素平面の下半面に存在します。よって、遅延グリーン関数は上半面において極を持たない解析関数です。先進では逆になるだけです。このように時間順序 (積分経路) によって $i\epsilon$ 項が変更されます。

時間の大小に関する話も簡単にしておきます。複素積分を考えて上半円をくっつけて積分を実行しようとする、遅延グリーン関数では積分が 0 になります (経路の中に極を持たないため)。このときは、上半円が消える条件として $x_0 - y_0 < 0$ となっています。逆に先進グリーン関数では下半円で 0 になります。つまり、遅延グリーンでは $x_0 - y_0 > 0$ の情報は下半円をつけた正負のエネルギー両方の極を持った場合、先進グリーンでは $x_0 - y_0 < 0$ の情報は上半円をつけた正負のエネルギー両方の極を持った場合として出てきます。このことを式にして示します。

遅延グリーン関数として、ここで言っている積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \Delta_R(p) e^{-ip_0(x_0 - y_0)} + \int_C dp_0 \Delta_R(p) e^{-ip_0(x_0 - y_0)}$$

というものです (見やすくするために時間成分だけを出しています)。第一項が実軸上の経路の項で、第二項が半円の経路による項です。第二項の経路 C をどのようにとるかですが、上半円をつけたとき 0 となるのは

$$\int_C dp_0 \Delta_R(p) e^{-ip_0(x_0 - y_0)} = 0 \quad (x_0 - y_0 < 0)$$

下半円をつけたとき 0 となるのは

$$\int_C dp_0 \Delta_R(p) e^{-ip_0(x_0 - y_0)} = 0 \quad (x_0 - y_0 > 0)$$

このように時間の進み方に対して、半円の寄与の消え方が反対になります。この結果から、遅延グリーン関数では $x_0 - y_0 > 0$ での情報が出てくることになります。

$\Delta_F(x), \Delta_R(x), \Delta_A(x)$ は全てクライン・ゴールドン方程式のグリーン関数で、それぞれの違いは極の避け方によって生じています。なので、3 つとも $i\epsilon$ を上手こと分母につけることで極をズラした経路を設定できます。表記の話ですが、極の避け方を明確に記してあるなら (例えば積分経路を指定して)、 $i\epsilon$ をつける必要はないです。そして、 $i\epsilon$ は極を避けるためのものなので、全ての計算後に $\epsilon = 0$ とします。

ボソンであるスカラー場で見えてきますが、フェルミオンの場合の結果も載せておきます。ディラック場 ψ による伝播関数は (スピノールの成分は省いて書きます)

$$\begin{aligned} S_F(x, y) &= \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle \end{aligned}$$

真空期待値は、「ディラック場 ~ 伝播関数 ~」で計算したように

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (i\not{\partial} + m) e^{-ip(x-y)} \\ \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (i\not{\partial} + m) e^{+ip(x-y)} \end{aligned}$$

これらから分かるように、フェルミオンに対する伝播関数には、上で導入した $\Delta_F, \Delta, \Delta^{(\pm)}$ をそのまま流用できて

$$\begin{aligned}
S_F(x, y) &= (i\partial_\mu\gamma^\mu + m)\Delta_F(x, y) \\
&= (i\partial_\mu\gamma^\mu + m)(\theta(x_0 - y_0)\Delta^{(+)}(x, y) - \theta(y_0 - x_0)\Delta^{(-)}(x, y))
\end{aligned}$$

反交換関係も同様に

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = (i\partial_\mu\gamma^\mu + m)\Delta(x, y)$$

と書けます。\$S_F(x, y)\$ に、ディラック方程式の演算子 \$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\$ を作用させれば

$$\begin{aligned}
(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)S_F(x, y) &= (i\partial_\mu\gamma^\mu - m)(i\partial_\nu\gamma^\nu + m)\Delta_F(x, y) \\
&= -(\square + m^2)\Delta_F(x, y) \\
&= i\delta^4(x - y)
\end{aligned}$$

となっています。

運動量表示での伝播関数は

$$S_F(p) = (p_\mu\gamma^\mu + m)\Delta_F(p) = \frac{p_\mu\gamma^\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

遅延、先進グリーン関数は

$$S_R(x, y) = \theta(x_0 - y_0)\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}$$

$$S_A(x, y) = -\theta(y_0 - x_0)\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}$$

となります。

最後に、入門的な話や分野によってはあまり出てこないですが、出てくると説明なしで使われることが多い関係式を出しておきます。まず、積分として

$$\int_C dz \frac{F(z)}{z - \omega}$$

を考えます。積分経路 \$C\$ を、\$z = \omega\$ の極を避けるように図 2 のようにし、\$F(z)\$ は実軸上に極を持たないとします。この経路を分割して書き直すと

$$\int_C dz \frac{F(z)}{z - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} dz \frac{F(z)}{z - \omega} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} dz \frac{F(z)}{z - \omega} \right) + \int_{C_1} dz \frac{F(z)}{z - \omega} + \int_{C_2} dz \frac{F(z)}{z - \omega}$$

となります (\$C_1, C_2\$ は半円の弧部分)。\$\epsilon \to 0\$ は \$z = \omega\$ の極を避けて計算した後に \$\epsilon = 0\$ の極限に持っていくことを表します。ここで出てきた右辺第一項は記号 P をつけて

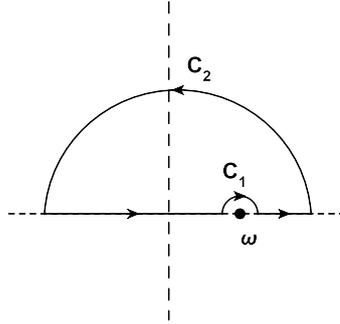


図 2

$$P \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{F(z)}{z - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} dz \frac{F(z)}{z - \omega} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} dz \frac{F(z)}{z - \omega} \right)$$

と定義され、コーシーの主値 (Cauchy principal value) とか主値積分と呼ばれます。第三項は C_1 の半円の半径を ϵ としたとき (ω を原点にする半円なので $z = \omega + \epsilon e^{i\theta}$)

$$\int_{C_1} dz \frac{F(z)}{z - \omega} = \int_{\pi}^0 \frac{F(\omega + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i \epsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_{\pi}^0 F(\omega + \epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

この $\epsilon \rightarrow 0$ をとると

$$\int_{C_1} dz \frac{F(z)}{z - \omega} = i \int_{\pi}^0 F(\omega) d\theta = -i\pi F(\omega)$$

C_2 の寄与は消えると仮定すれば

$$\int_C dz \frac{F(z)}{z - \omega} = P \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{F(z)}{z - \omega} - i\pi F(\omega)$$

これが主値を考えるときの基本的な形です。

この形から、 $1/(z - \omega)$ を実軸 $-\infty \sim \infty$ に沿って積分するときに、 $z = \omega$ の極を C_1 でよけた経路に書き直して実行したと思えば、主値の意味を持たせて

$$\frac{1}{z - \omega} = P \frac{1}{z - \omega} - i\pi \delta(z - \omega)$$

という関係になるのが分かります。特に左辺は $z = \omega$ の極を上半円 C_1 を経由することで避けているので、 ω を $\omega - i\epsilon$ にずらすことと同じ意味です。よって

$$\frac{1}{z - \omega + i\epsilon} = P \frac{1}{z - \omega} - i\pi \delta(z - \omega) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

となり、 C_1 を上半円でなく下半円とすれば $i\pi F(\omega)$ の符号が反転する (積分が π から 2π になるから) ので

$$\frac{1}{z - \omega - i\epsilon} = P \frac{1}{z - \omega} + i\pi \delta(z - \omega) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

となります。そして、 $F(z)$ に対しては実軸上に極がない、 C_2 の寄与を消せるという仮定のみなので、この関係は伝播関数でも使えて ($E > 0$)

$$\frac{1}{p_0^2 - E^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{p_0 - E + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + E - i\epsilon} \right), \quad \delta(p_0^2 - E^2) = \frac{1}{2E} (\delta(p_0 - E) + \delta(p_0 + E))$$

から

$$\frac{1}{p_0^2 - E^2 + i\epsilon} = \text{P} \frac{1}{p_0^2 - E^2} - i\pi\delta(p_0^2 - E^2)$$

とできます。

出てきたものをまとめておきます

- ボソンの交換関係

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \Delta(x, y) = \Delta^{(+)}(x, y) + \Delta^{(-)}(x, y)$$

$$\Delta(x, y) = i \int_C \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2}$$

$$\Delta^{(+)}(x, y) = \int dp_0 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2)$$

$$\Delta^{(-)}(x, y) = - \int dp_0 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta(-p_0) \delta(p^2 - m^2)$$

- フェルミオンの反交換関係

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = (i\partial_\mu \gamma^\mu + m)\Delta(x, y)$$

- ファインマンの伝播関数

– ボソン

$$\begin{aligned} \Delta_F(x, y) &= \langle 0 | T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) | 0 \rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(y) | 0 \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \phi^\dagger(y)\phi(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x - y) \Delta^{(+)}(x, y) - \theta(y - x) \Delta^{(-)}(x, y) \end{aligned}$$

運動量表示

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

– フェルミオン

$$\begin{aligned} S_F(x, y) &= \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle \\ &= (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) \Delta_F(x, y) \\ &= (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) (\theta(x_0 - y_0) \Delta^{(+)}(x, y) - \theta(y_0 - x_0) \Delta^{(-)}(x, y)) \end{aligned}$$

運動量表示

$$S_F(p) = (p_\mu \gamma^\mu + m) \Delta_F(p) = i \frac{p_\mu \gamma^\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

• 遅延、先進グリーン関数

– ボソン

$$\Delta_R(x, y) = \theta(x_0 - y_0) [\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \theta(x - y) \Delta(x, y)$$

$$\Delta_A(x, y) = -\theta(y_0 - x_0) [\phi(x), \phi^\dagger(y)] = -\theta(y - x) \Delta(x, y)$$

– フェルミオン

$$S_R(x, y) = \theta(x_0 - y_0) \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = \theta(x_0 - y_0) (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) \Delta(x, y)$$

$$S_A(x, y) = -\theta(y_0 - x_0) \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = -\theta(y_0 - x_0) (i\partial_\mu \gamma^\mu + m) \Delta(x, y)$$

• 補足

伝播関数の定義について触れておきます。なぜかという、本によって異なった定義が使われているからです。ここでの定義はグリーン関数の式

$$(\square + m^2) \Delta_F(x, y) = -i\delta^4(x - y)$$

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

に従っています。他の定義の仕方として i を外した

$$(\square + m^2)\Delta'_F(x, y) = -\delta^4(x - y)$$

$$\Delta'_F(x, y) = -i\Delta_F(x, y)$$

$$\Delta'_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

さらに右辺の符号を反転させた

$$(\square + m^2)\Delta''_F(x, y) = \delta^4(x - y)$$

$$\Delta''_F(x, y) = i\Delta_F(x, y)$$

$$\Delta''_F(p) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon}$$

このようなものが使われます。

グリーン関数は演算子の逆という定義を通すなら、 Δ''_F がまっとうなグリーン関数です。しかし、そんなものは、どの定義式を使っているのか把握していればたいした問題になりません。というわけで、どれを使うかは個人の趣味の問題です。例えば、ウィックの定理を使う時には $\Delta_F(x, y)$ を使うのが便利な気がしますが、経路積分ではどれを使っても差がないです。しかし、どの定義を使っているかで、符号が変わったり、 i が出てきたりするので気をつけたほうがいいです。

また、フェルミオンの伝播関数はボソン (スカラー場) のときと符号を反転させて定義しています。伝播関数を $\langle T(\phi(x)\phi(x)) \rangle$ とする定義をボソン、フェルミオンの両方で通すと、そのようになります。