

位置表示の伝播関数

伝播関数の積分を実行します。

スカラー場での位置表示の伝播関数は

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

この積分後の形を求めます。直接この積分を行わず、「伝播関数について」で出てきた

$$\begin{aligned}\Delta(x, y) &= [\phi(x), \phi^\dagger(y)] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)}) \\ &= \Delta^{(+)}(x, y) + \Delta^{(-)}(x, y) \quad (p_0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})\end{aligned}$$

での $\Delta^{(+)}(x, y)$ と $\Delta^{(-)}(x, y)$ を求めて

$$\Delta_F(x, y) = \Theta(x_0 - y_0) \Delta^{(+)}(x, y) - \Theta(y_0 - x_0) \Delta^{(-)}(x, y)$$

として、伝播関数を求めます。 Θ は階段関数です。

簡単にするために $y = 0$ として

$$\begin{aligned}\Delta^{(+)}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ipx} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{|\mathbf{p}|^2}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] \\ &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{|\mathbf{p}|^2}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}| \cos\theta] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{2E_{\mathbf{p}}} \int_1^{-1} dz \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|z] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{1}{i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|} (\exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] - \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|]) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} (\exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] - \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|])\end{aligned}$$

$E_{\mathbf{p}}$ は $(|\mathbf{p}|^2 + m^2)^{1/2}$ なので、 $|\mathbf{p}|$ の符号を反転させても変わらないことから

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] &= - \int_0^{-\infty} d|\mathbf{p}| \frac{-|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] \\
&= - \int_{-\infty}^0 d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|]
\end{aligned}$$

これを使うことで

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|]$$

$|\mathbf{x}|$ の微分によって

$$\begin{aligned}
\Delta^{(+)}(x) &= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{i}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] \\
&= - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[-iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] \\
&= - \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} f^*(x_0, |\mathbf{x}|)
\end{aligned}$$

という形にできます。同様に行っていけば、 $\Delta^{(-)}(x)$ は

$$\begin{aligned}
\Delta^{(-)}(x) &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ipx} \\
&= - \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{|\mathbf{p}|^2}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}| \cos \theta] \\
&= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} (\exp[iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] - \exp[iE_{\mathbf{p}}x_0 - i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|]) \\
&= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] + \int_{-\infty}^0 d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] \right) \\
&= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}} \exp[iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} \exp[iE_{\mathbf{p}}x_0 + i|\mathbf{p}||\mathbf{x}|] \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} f(x_0, |\mathbf{x}|)
\end{aligned}$$

というわけで、必要な積分は

$$\begin{aligned}
f(x_0, |\mathbf{x}|) &= \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} \exp[i(E_{\mathbf{p}}x_0 + |\mathbf{p}||\mathbf{x}|)] \\
f^*(x_0, |\mathbf{x}|) &= \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{p}| \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} \exp[-i(E_{\mathbf{p}}x_0 + |\mathbf{p}||\mathbf{x}|)]
\end{aligned}$$

実行するために

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = m \cosh \alpha, \quad |\mathbf{p}| = m \sinh \alpha$$

という置き換えをします。これは

$$E_p^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2 \cosh^2 \alpha - m^2 \sinh^2 \alpha = m^2$$

となっているので、 $E_p^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$ を満たしています。これを入れると

$$\begin{aligned} f(x_0, |\mathbf{x}|) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{m \cosh \alpha}{m \cosh \alpha} \exp[im(x_0 \cosh \alpha + |\mathbf{x}| \sinh \alpha)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[im(x_0 \cosh \alpha + |\mathbf{x}| \sinh \alpha)] \quad \left(\lim_{\alpha \rightarrow \pm\infty} \sinh \alpha = \pm\infty \right) \end{aligned}$$

ここで問題になるのが、 x_0 と $|\mathbf{x}|$ の大きさです。

大雑把には x^2 が空間的 $x^2 < 0$ なのか時間的 $x^2 > 0$ なのかです。取れるパターンとしては

$$x_0 > 0, \quad x_0 > |\mathbf{x}| \quad \cdots \quad (a)$$

$$x_0 > 0, \quad x_0 < |\mathbf{x}| \quad \cdots \quad (b)$$

$$x_0 < 0, \quad |x_0| > |\mathbf{x}| \quad \cdots \quad (c)$$

$$x_0 < 0, \quad |x_0| < |\mathbf{x}| \quad \cdots \quad (d)$$

この4つの場合が考えられます。これらを考えていきます。その前に、また記号を導入します。時間的な場合 (a), (c) では $x^2 > 0$ なので

$$(a) : x_0 = \sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2} \cosh \beta, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2} \sinh \beta$$

$$(c) : x_0 = -\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2} \cosh \beta, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2} \sinh \beta$$

と定義します。(c) での x_0 にマイナスがついているのは $x_0 < 0$ だからです。空間的な場合 (b), (d) では

$$(b) : x_0 = \sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)} \sinh \beta, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)} \cosh \beta$$

$$(d) : x_0 = -\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)} \sinh \beta, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)} \cosh \beta$$

$\sinh \beta$ と $\cosh \beta$ が時間的な場合からひっくり返っているのは

$$(\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)} \sinh \beta)^2 - (\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)} \cosh \beta)^2 = -(-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)) = x_0^2 - |\mathbf{x}|^2$$

となるからです。そうすると、各積分での $\exp$ 部分は、例えば

$$\begin{aligned} x_0 \cosh \alpha + |\boldsymbol{x}| \sinh \alpha &= \sqrt{x_0^2 - |\boldsymbol{x}|^2} (\cosh \beta \cosh \alpha + \sinh \beta \sinh \alpha) \\ &= \sqrt{x_0^2 - |\boldsymbol{x}|^2} \cosh(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

双曲線関数の加法定理

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha \pm \beta) &= \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta \\ \cosh(\alpha \pm \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta \end{aligned}$$

を使えば

$$\begin{aligned} (a) : f &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[im\sqrt{x_0^2 - |\boldsymbol{x}|^2} \cosh(\alpha + \beta)] \\ (b) : f &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[im\sqrt{-(x_0^2 - |\boldsymbol{x}|^2)} \sinh(\alpha + \beta)] \\ (c) : f &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[-im\sqrt{(x_0^2 - |\boldsymbol{x}|^2)} \cosh(\alpha - \beta)] \\ (d) : f &= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[-im\sqrt{-(x_0^2 - |\boldsymbol{x}|^2)} \sinh(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

これらの積分は、0 次でのハンケル (Hankel) 関数 (もしくは第三種ベッセル (bessel) 関数) $H_0^{(1),(2)}$ と変形ベッセル関数 (modified bessel function) K_0 の積分形

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp[iz \cosh \theta] = i\pi H_0^{(1)}(z) \quad (1a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp[-iz \cosh \theta] = -i\pi H_0^{(2)}(z) \quad (1b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp[-iz \sinh \theta] = i\pi H_0^{(1)}(iz) = -i\pi H_0^{(2)}(-iz) = 2K_0(z) \quad (1c)$$

を使えばいいです。 z は複素数でも成り立ちますが、変形ベッセル関数 $K_0(z)$ では z は実数です (このため純虚数を変数に持つハンケル関数とも呼ばれる)。ハンケル関数 H_a の積分形は

$$\begin{aligned} i\pi H_a^{(1)}(z) &= e^{-ia\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp[iz \cosh \theta - a\theta] \\ i\pi H_a^{(2)}(z) &= -e^{-ia\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp[-iz \cosh \theta - a\theta] \end{aligned}$$

このように与えられています。また、ハンケル関数は第一種ベッセル関数 $J_a(z)$ と第二種ベッセル関数 (ノイマン (Neumann) 関数) $N_a(z)$ の線形結合によって

$$H_a^{(1)}(z) = J_a(z) + iN_a(z)$$

$$H_a^{(2)}(z) = J_a(z) - iN_a(z)$$

と定義されます。第一種から第三種までのベッセル関数は漸化式

$$\left(\frac{d}{dz} - \frac{a}{z}\right)B_a(z) = -B_{a+1}(z) \quad (2)$$

を満たします。

というわけで、(a) から (d) の積分は (1a) から (1c) によって

$$(a) : f = i\pi H_0^{(1)}(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) = i\pi(J_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) + iN_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}))$$

$$(b) : f = 2K_0(m\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)})$$

$$(c) : f = -i\pi H_0^{(2)}(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) = -i\pi(J_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - iN_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}))$$

$$(d) : f = 2K_0(m\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)})$$

これらは x^2 が時間的な場合と空間的な場合とで

$$f(x_0, |\mathbf{x}|) = \begin{cases} \pi(\epsilon(x_0)iJ_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - N_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2})) & \cdots \quad x^2 > 0 \\ 2K_0(m\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)}) & \cdots \quad x^2 < 0 \end{cases}$$

となっています。 $\epsilon(x_0)$ は、 $\epsilon(x_0 > 0) = 1$, $\epsilon(x_0 < 0) = -1$ としています。

というわけで、時間的な場合での $\Delta^{(-)}(x_0, |\mathbf{x}|)$ は

$$\begin{aligned} \Delta^{(-)}(x^2 > 0) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} f(x_0, |\mathbf{x}|) \\ &= \frac{\pi m}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} \left(\epsilon(x_0)iJ_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - N_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \\ &= -\frac{\pi m}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{-2|\mathbf{x}|}{2} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(\epsilon(x_0)iJ_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \\ &= \frac{m}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(\epsilon(x_0)iJ_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \\ &= \frac{im}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(\epsilon(x_0)J_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) + iN_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \end{aligned}$$

ベッセル関数の微分は (2) を使っています。 $\Delta^{(+)}$ では $f(x_0, |\mathbf{x}|)$ の複素共役を使えばいいので

$$\begin{aligned}
\Delta^{(+)}(x^2 > 0) &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} f^*(x_0, |\mathbf{x}|) \\
&= -\frac{\pi}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} \left(-\epsilon(x_0) i J_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - N_0(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \\
&= \frac{\pi m}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{-2|\mathbf{x}|}{2} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(-\epsilon(x_0) i J_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \\
&= \frac{im}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(\epsilon(x_0) J_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - i N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right)
\end{aligned}$$

空間的では

$$\begin{aligned}
\Delta^{(-)}(x^2 < 0) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} f(x_0, |\mathbf{x}|) \\
&= \frac{2}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} K_0(m\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)}) \\
&= -\frac{2m}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{2|\mathbf{x}|}{2} (-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2))^{-1/2} K_1(m\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)}) \\
&= -\frac{2m}{8\pi^2} (-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2))^{-1/2} K_1(m\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)})
\end{aligned}$$

$\Delta^{(+)}$ も全く同じで

$$\begin{aligned}
\Delta^{(+)}(x^2 < 0) &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{x}|} f^*(x_0, |\mathbf{x}|) \\
&= \frac{2m}{8\pi^2} (-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2))^{-1/2} K_1(m\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)})
\end{aligned}$$

この結果を使うことで、時間的な場合での伝播関数は

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x^2 > 0) &= \Theta(x_0) \Delta^{(+)}(x) - \Theta(-x_0) \Delta^{(-)}(x) \\
&= \frac{im}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(\epsilon(x_0) J_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - i N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \Theta(x_0) \\
&\quad - \frac{im}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(\epsilon(x_0) J_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) + i N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \Theta(-x_0) \\
&= \frac{im}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(J_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - i N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \Theta(x_0) \\
&\quad - \frac{im}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(-J_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) + i N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \Theta(-x_0) \\
&= \frac{im}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} \left(J_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) - i N_1(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \right) \\
&= \frac{im}{8\pi} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} H_1^{(2)}(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2})
\end{aligned}$$

階段関数 Θ の制限によって $\epsilon(x_0)$ の符号が決まります。空間的では

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x^2 < 0) &= \Theta(x_0)\Delta^{(+)}(x) - \Theta(-x_0)\Delta^{(-)}(x) \\
&= \frac{2m}{8\pi^2}(-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2))^{-1/2}K_1(m\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)}) \\
&= \frac{\pi m}{8\pi^2}(-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2))^{-1/2}e^{-i\pi}H_1^{(2)}(-im\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)}) \\
&= -\frac{m}{8\pi}(-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2))^{-1/2}H_1^{(2)}(-im\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)})
\end{aligned}$$

$x^2 = 0$ で f は連続でないために、まだこれでは未完成です。これはベッセル関数の $z = 0$ 周りの展開が

$$\begin{aligned}
N_0(z) &= \frac{2}{\pi}(1 - (\frac{z}{2})^2)\log \frac{z}{2} + \frac{2}{\pi}\gamma + \dots \\
K_0(z) &= -(1 + (\frac{z}{2})^2)\log \frac{z}{2} - \gamma + \dots
\end{aligned}$$

となっていることから分かります。というわけで、デルタ関数を加えて

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x) &= -\frac{i}{4\pi}\delta(x^2) + \Theta(x^2)\frac{im}{8\pi}(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^{-1/2}H_1^{(2)}(m\sqrt{x_0^2 - |\mathbf{x}|^2}) \\
&\quad - \Theta(-x^2)\frac{m}{8\pi}(-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2))^{-1/2}H_1^{(2)}(-im\sqrt{-(x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)})
\end{aligned}$$

階段関数 Θ で時間的と空間的の両方を含めるようにしています。