

クォークモデル

ハドロンを複合粒子とするクォークモデルの話をしていきます。ここではスピンは考慮せずに $SU(3)$ だけを使います。

特殊相対性理論で出てくるようなテンソルについての単語は知っているとしています。

同じローマ文字の添え字は和を取ります。 $SU(2)$ と $SU(3)$ で同じ添え字を使っていますが、混乱はしないと思います。

ハドロンを分類するクォークモデル (quark model) は 1964 年にゲルマン (Gell-Mann)、ネーマン (Ne'eman)、ツワイ (Zweig) によって作られました (それぞれが独立に作った)。クォークモデルは名前の通り、ハドロンを複合粒子として、より基本的な粒子であるクォーク (quark) を仮定してハドロンを構成するものです。それによって、 $SU(3)$ の 8 次元表現とハドロンの対応を再現できるようになっていて、群論の言葉によってハドロンは分類されます。

クォークモデルは、テンソルを使うか、角運動量の合成の手順を使うかのどちらかで説明されます。ここでは、群論を表面的には気にしないで済むので、テンソルを使ってクォークモデルを作ります。

最初に行列のクロネッカー積から見ていきます。 $m \times m$ 行列 A と $n \times n$ 行列 B によるクロネッカー積「 $\otimes$ 」は

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

と定義され、 $m \times m$ 行列と $n \times n$ 行列のクロネッカー積は $mn \times mn$ 行列です。 a_{ij} は A の成分です。正方行列にしていますが、そうでなくても同じ定義です。

$SU(2)$ の基本表現 (2 次元表現) は 2×2 行列なので、それらによるクロネッカー積は 4×4 行列になります。そして、行列式が 1 の $n \times n$ ユニタリー行列 A, B のクロネッカー積は、クロネッカー積の性質 (2 番目での C は $m \times m$ 行列、 D は $n \times n$ 行列)

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

$$\det[A \otimes B] = (\det A)^n (\det B)^n$$

から

$$(A \otimes B)(A \otimes B)^\dagger = AA^\dagger \otimes BB^\dagger = 1$$

$$\det[A \otimes B] = (\det A)^n (\det B)^n = 1$$

なので、行列式が 1 の $n^2 \times n^2$ ユニタリー行列です。このため、 $SU(2)$ の基本表現の行列 U のクロネッカー積は 4×4 ユニタリー行列になり、 4×4 行列は 4 次元ベクトルに作用するので $SU(2)$ の 4 次元表現です。

4 次元表現 $U \otimes U$ が作れたとして、それが相似変換によって

$$U \otimes U \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

とできるとします。\$A_1, A_2\$ はブロック行列です。\$U \otimes U\$ が作用するのは 4 次元ベクトルなので、それも \$v_1, v_2\$ に分けると

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 v_1 \\ A_2 v_2 \end{pmatrix}$$

として、\$A_1 v_1, A_2 v_2\$ に分離します。このように、ブロック行列が対角的に入っていて残りは 0 になるとき (最初からそうになっているか、相似変換でそうなるとき)、\$U \otimes U\$ は完全可約 (completely reducible) と呼ばれます。

実際に、\$SU(2)\$ の基本表現によるクロネッカー積はこのように分解できることを示します。すでに結果が分かっているスピン \$1/2\$ 同士の合成を流用します (量子力学の「スピン \$1/2\$」参照)。スピン \$1/2\$ の合成で作られる状態は、それぞれのスピン \$\pm 1/2\$ に対応する 2 粒子状態

$$|+, +\rangle, |-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle$$

として 4 個作れて、4 次元ベクトル空間の基底になります。そして、別の基底をこれらから

$$|+, +\rangle, |-, -\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle) \quad (1)$$

と作れて、\$\pm\$ の入れ替えで対称な 3 個 (スピン 1)、反対称な 1 個 (スピン 0) による 4 次元ベクトルです。この結果を利用します。

\$SU(2)\$ の基本表現は

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (|a|^2 + |b|^2 = 1)$$

クロネッカー積は

$$U \otimes U = \begin{pmatrix} aa & ab & ba & bb \\ -ab^* & aa^* & -bb^* & ba^* \\ -b^*a & -b^*b & a^*a & a^*b \\ b^*b^* & -b^*a^* & -a^*b^* & a^*a^* \end{pmatrix}$$

これを対角的にブロック行列が入っている行列に相似変換します。そのために、対称な 3 個と反対称な 1 個が出てくることを利用します。つまり、4 次元ベクトル空間の基底ベクトル \$e = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})\$ から、新しい基底を (1) と同じ形になるように

$$\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_{11} \\ \alpha(e_{12} + e_{21}) \\ e_{22} \\ \alpha(e_{12} - e_{21}) \end{pmatrix} \quad (\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}})$$

と変換します。これはすぐ分かるように

$$\begin{pmatrix} e_{11} \\ \alpha(e_{12} + e_{21}) \\ e_{22} \\ \alpha(e_{12} - e_{21}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{21} \\ e_{22} \end{pmatrix}$$

この変換行列 S の逆行列は

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} & 0 & \frac{1}{2\alpha} \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} & 0 & -\frac{1}{2\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

基底の変換に対して行列 A は SAS^{-1} の変換を受けるので、 $U \otimes U$ は

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aa & ab & ab & bb \\ -ab^* & aa^* & -bb^* & a^*b \\ -ab^* & -bb^* & aa^* & a^*b \\ b^*b^* & -a^*b^* & -a^*b^* & a^*a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} & 0 & \frac{1}{2\alpha} \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} & 0 & -\frac{1}{2\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aa & \frac{1}{\alpha}ab & bb & 0 \\ -ab^* & \frac{1}{2\alpha}(aa^* - bb^*) & a^*b & \frac{1}{2\alpha}(aa^* + bb^*) \\ -ab^* & \frac{1}{2\alpha}(aa^* - bb^*) & a^*b & -\frac{1}{2\alpha}(aa^* + bb^*) \\ b^*b^* & -\frac{1}{\alpha}a^*b^* & a^*a^* & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa & \frac{1}{\alpha}ab & bb & 0 \\ -2\alpha ab^* & aa^* - bb^* & 2\alpha a^*b & 0 \\ b^*b^* & -\frac{1}{\alpha}a^*b^* & a^*a^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aa^* + bb^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このように、対角部分が 3×3 ユニタリー行列 (行列式 1) A_1 と 1×1 行列による形になるので $U \otimes U$ は完全可約で、 3×3 行列と 1×1 行列に分解できます。これを各ベクトル空間の次元を使って

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

と表記します。「 $\times$ 」「 $+$ 」を使っている場合もあります。通常の積と和と見たとき、左辺は 4 , 右辺は 4 となりベクトル空間の次元と一致します。 1×1 行列は当たり前ですが、ここから分解できません。そして、示しませんが A_1 もこれ以上分解できないです。分解できないとき既約 (irreducible) と呼ばれます。

ちなみに、「 $\otimes$ 」はテンソル積を表す記号で、クロネッカー積は行列でのテンソル積です。

今のように行列を対角的にするのは大変なので、もっと簡単に同じ結果を出せる方法を使います。 $U \otimes U$ は 4 次元ベクトルに作用しますが、 2×2 行列に作用すると見ます。つまり、 2×2 行列 T_{ij} に対して

$$T'_{ab} = U_{ai}U_{bj}T_{ij} \quad (2)$$

と作用するとします。実際に、

$$\begin{aligned} T'_{11} &= U_{1i}U_{1j}T_{ij} = U_{11}U_{1j}T_{1j} + U_{12}U_{1j}T_{2j} \\ &= U_{11}U_{11}T_{11} + U_{11}U_{12}T_{12} + U_{12}U_{11}T_{21} + U_{12}U_{12}T_{22} \\ &= a^2T_{11} + abT_{12} + abT_{21} + b^2T_{22} \\ T'_{12} &= U_{11}U_{21}T_{11} + U_{11}U_{22}T_{12} + U_{12}U_{21}T_{21} + U_{12}U_{22}T_{22} \\ &= -ab^*T_{11} + aa^*T_{12} - bb^*T_{21} + a^*bT_{22} \\ T'_{21} &= U_{21}U_{11}T_{11} + U_{21}U_{12}T_{12} + U_{22}U_{11}T_{21} + U_{22}U_{12}T_{22} \\ &= -ab^*T_{11} - bb^*T_{12} + aa^*T_{21} + a^*bT_{22} \\ T'_{22} &= U_{21}U_{21}T_{11} + U_{21}U_{22}T_{12} + U_{22}U_{21}T_{21} + U_{22}U_{22}T_{22} \\ &= b^*b^*T_{11} - a^*b^*T_{12} - a^*b^*T_{21} + a^*a^*T_{22} \end{aligned}$$

となり、これらは

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ -ab^* & aa^* & -bb^* & a^*b \\ -ab^* & -bb^* & aa^* & a^*b \\ b^*b^* & -a^*b^* & -a^*b^* & a^*a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{21} \\ T_{22} \end{pmatrix}$$

と一致します。(2) と変換される T_{ij} を $SU(2)$ での 2 階テンソルと呼びます。

4 次元ベクトルは対称な 3 個と反対称な 1 個になるので、テンソルでも同様に考えます。対称な形は

$$S_{ij} = T_{ij} + T_{ji}$$

として作れて

$$\begin{aligned} S'_{ab} &= T'_{ab} + T'_{ba} = U_{ai}U_{bj}T_{ij} + U_{bi}U_{aj}T_{ij} = U_{ai}U_{bj}T_{ij} + U_{bj}U_{ai}T_{ji} \\ &= U_{ai}U_{bj}(T_{ij} + T_{ji}) \\ &= U_{ai}U_{bj}S_{ij} \end{aligned}$$

と変換されるので、 S_{ij} は 2 階テンソルです。反対称な形は $A_{ij} = T_{ij} - T_{ji}$ として作れて、 S_{ij} と同様に 2 階テンソルです。なので、 T_{ij} は

$$T_{ij} = \frac{1}{2}S_{ij} + \frac{1}{2}A_{ij}$$

と書いて、 S_{ij}, A_{ij} は混ざることなしに $U \otimes U$ で変換されます。 T_{ij} は 4 次元ベクトルを 2×2 行列にしたものなので、 S_{ij} での独立な成分 3 個 ($S_{ij} = S_{ji}$) と A_{ij} での独立な成分 1 個 ($A_{ij} = -A_{ji}$) が、対称な 3 次元と反対称な 1 次元に対応します。というわけで、テンソルを対称なテンソル、反対称なテンソルに分けることは上での話と同じです。

このように、テンソルを使えば対称、反対称での独立な数を見ればいだけになり、具体的な行列が必要ないなら、どのように分解されるかが簡単に求まります。ただし、どんな群でも同様になるわけではないです。例えば、行列式が 1 の直交行列の集まりである $SO(3)$ では対称なテンソルをさらに分解できて、トレースが 0 の対称な 5 個、反対称な 3 個、スカラーの 1 個になり、 $3 \otimes 3 = 5 \oplus 3 \oplus 1$ です。

$SU(2)$ の $2 \otimes 2$ では $SO(3)$ のようにスカラーが出てこないことを示します。 S_{ij} のトレース S_{ii} (和を取る) の変換は

$$S' = S'_{aa} = U_{ai}U_{aj}S_{ij} = (U^T)_{ia}U_{aj}S_{ij}$$

「 T 」は転置です。もし、 $(U^T)_{ia}U_{aj} = \delta_{ij}$ なら $S' = S$ となり、トレース $S = S_{ii}$ は変換で不変です。この意味で、 S はスカラーです。 S_{ij} から S を分けて、

$$S_{ij} = (S_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}S) + \frac{1}{2}\delta_{ij}S$$

このように、対称行列はトレースが 0 の対称な項と、スカラーの項に分解できます (反対称では $A_{ii} = 0$)。 $SO(3)$ は直交行列なのでこれができます。しかし、 $SU(2)$ では $U^T U \neq 1$ なので、対称行列をさらに分解できません。

後で見るように、反粒子には基本表現の複素共役による表現が使われます。複素共役の表現を複素共役表現と言っていきます。 $SU(2)$ だけは特殊なので、それを先に見ておきます。

複素共役表現は、 $SU(2)$ の変換

$$v_a = U_{ab}v_b$$

に対して複素共役を取って

$$v_a^* = U_{ab}^*v_b^*$$

としたものです。「 $U(N)$ と $SU(N)$ 」で触れたように、 U^* はパウリ行列 σ_i ($i = 1, 2, 3$) から

$$U^* = (i\sigma_2)^{-1}U i\sigma_2 = -i\sigma_2 U i\sigma_2 \quad (i\sigma_2 i\sigma_2 = -\sigma_2^2 = -1)$$

$$(i\sigma_2)^{-1}\sigma_i(i\sigma_2) = -\sigma_i^*$$

$i\sigma_2$ はユニタリー行列 ($(i\sigma_2)^\dagger = -i\sigma_2 = (i\sigma_2)^{-1}$) なので、これはユニタリー変換です。そして、 U の変換と

$$\begin{aligned}
v' &= Uv \\
(i\sigma_2)^{-1}v' &= (i\sigma_2)^{-1}U(i\sigma_2)(i\sigma_2)^{-1}v \\
-i\sigma_2v' &= -i\sigma_2U(i\sigma_2)(-i\sigma_2)v \\
(-i\sigma_2v)' &= U^*(-i\sigma_2v) \\
v^{*'} &= U^*v^*
\end{aligned} \tag{3}$$

として関係しており、同じ変換を与えています。つまり、数学っぽく言えば、 U と U^* は同じベクトル空間でのユニタリー変換による基底の違いでしかなく、 $SU(2)$ での基本表現とその複素共役表現は区別する必要のない表現（ユニタリー同値）ということです。これが $SU(2)$ での特殊な性質で、 $SU(2)$ では基本表現と複素共役表現で同じ変換です。

一方で、 $SU(3)$ の生成子であるゲルマン行列 τ_a ($a = 1, 2, \dots, 8$) では

$$\tau'_a = -\tau_a^*$$

となるユニタリー変換は存在しません。なので、 $SU(3)$ での基本表現とその複素共役表現は別の表現になります。複素共役表現での変換は、 v_i^* を w_i として

$$w'_i = U_{ij}^* w_j = w_j (U^\dagger)_{ji}$$

この変換による 2 階テンソルは

$$C'_{ab} = U_{ai}^* U_{bj}^* C_{ij}$$

と定義されます。クロネッカーデルタは UU^* の変換で不変です。これは

$$\delta_{ab} = U_{ai} U_{bj}^* \delta_{ij} = U_{ai} (U^\dagger)_{jb} \delta_{ij} = U_{ai} (U^\dagger)_{ib} = \delta_{ab}$$

となるからです。

このように、 U と U^* の変換によるテンソルを作ると、 U, U^* の変換を受けるテンソルも作れるのが予想できます。そのために、表記を与えます。 w_i と基本表現のベクトル v_i とは

$$w'_i v'_i = w_j (U^\dagger)_{ji} U_{ik} v_k = w_j (U^\dagger U)_{jk} v_k = \delta_{jk} w_j v_k = w_i v_i$$

となっていて、 $w_i v_i$ は変換に対して不変です。これをミンコフスキー空間での 4 元ベクトルの内積 $x_\mu y^\mu$ と同じと見て、 $w_i v^i$ と添え字の上下を与えます ($v^{i*} = w_i$)。 U の添え字も

$$v'^a = U^a_i v^i, \quad w'_a = w_i (U^\dagger)^i_a, \quad (U^\dagger)^i_j U^j_k = \delta^i_k$$

クロネッカーデルタの意味は変わらないです。例えば、この表記ではクロネッカーデルタの不変性は

$$\delta_b^a = U_i^a (U^\dagger)^j_b \delta_{ij} = U_i^a (U^\dagger)^i_b = \delta_b^a$$

と書けます。

添え字を上下に分けたことで、 $U, U^\dagger$ の変換を受けるテンソルを

$$M_b^a = U_i^a (U^\dagger)^j_b M_j^i$$

と定義でき、混合テンソルとなります。

また、基本表現の変換を受ける 2 階テンソルは T^{ij} 、複素共役表現を受ける 2 階テンソルは T_{ij} として、添え字の上付き、下付きで区別できます。しかし、ここでは T_{ij} は使わないので、これらの関係には触れずに進めます。

$SU(3)$ の分解に移ります。 $SU(3)$ の基本表現による $3 \otimes 3$ の分解はすぐに分かります。2 階テンソル T^{ab} ($a, b = 1, 2, 3$) を対称と反対称に分解して

$$T^{ab} = \frac{1}{2} S^{ab} + \frac{1}{2} A^{ab}$$

3×3 行列なので、 S^{ab} は 6 個の独立な成分、 A^{ab} は 3 個の独立な成分を持ちます。 $SU(3)$ では S^{ab} をこれ以上分解できないので、これで分解は終わって、

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3$$

となります。

次に混合テンソル T_b^a を分解します。基本表現と複素共役表現の組み合わせなので、 $3 \otimes 3^*$ や $3 \otimes \bar{3}$ と書かれます。異なる 2 個の表現の組み合わせのために、添え字の入れ替えによる対称、反対称による分解ができません。なので、トレースによる分解だけが行われます。トレースはクロネッカーデルタによって $T = \text{tr} T_b^a = T_b^a \delta_a^b$ と与えられ

$$T_b^a = (T_b^a - T) + T = (T_b^a - \frac{1}{3} \delta_b^a T) + \frac{1}{3} \delta_b^a T$$

第 1 項はトレースが 0、第 2 項はスカラーと分解されます。独立な成分は、第 1 項はトレースが 0 なので 8 個、第 2 項はスカラーなので 1 個となり、

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

となります。

3 階テンソル T^{ijk} も考えます。これは

$$T'^{abc} = U_i^a U_j^b U_k^c T^{ijk}$$

として定義されます。なので、 $3 \otimes 3 \otimes 3$ に対する分解を行います。まず、レヴィ・チビタ記号 ϵ^{ijk} をテンソルとして導入するために基本表現の変換を受けるとして

$$\epsilon'^{abc} = U_i^a U_j^b U_k^c \epsilon^{ijk}$$

右辺は行列式の定義そのものなので (見づらければ添え字を全て上に揃えればいい)、例えば

$$U^1_i U^2_j U^3_k \epsilon^{ijk} = \det U$$

$$U^1_i U^1_j U^3_k \epsilon^{ijk} = -U^1_i U^1_j U^3_k \epsilon^{jik} = -U^1_j U^1_i U^3_k \epsilon^{ijk} = 0$$

$$U^2_i U^1_j U^3_k \epsilon^{ijk} = -U^2_i U^1_j U^3_k \epsilon^{jik} = -U^2_j U^1_i U^3_k \epsilon^{ijk} = -\det U$$

これらの符号と 0 はレヴィ・チビタ記号と一致します。よって

$$\epsilon'^{abc} = U^a_i U^b_j U^c_k \epsilon^{ijk} = \epsilon^{abc} \det U = \epsilon^{abc}$$

となり、 ϵ^{ijk} は U の変換で不変です。同様に、下付きのレヴィ・チビタ記号 ϵ_{ijk} を

$$\epsilon'_{abc} = (U^\dagger)^i_a (U^\dagger)^j_b (U^\dagger)^k_c \epsilon_{ijk}$$

と与えます。このときも、行列式の定義そのものです。そして、 $\det U = \det U^\dagger = 1$ なので

$$\epsilon'_{abc} = (U^\dagger)^i_a (U^\dagger)^j_b (U^\dagger)^k_c \epsilon_{ijk} = \epsilon_{abc} \det U^\dagger = \epsilon_{abc}$$

となり、 U^* の変換に対して不変です。しかし、

$$U^i_a U^j_b U^k_c \epsilon_{ijk}$$

としても、結局は同じです。このため、上付き、下付きでレヴィ・チビタ記号は同じで、 $\epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk}$ です。そして、 $\epsilon_{ijk} T^{ijk}$ は

$$\begin{aligned} (\epsilon_{sbc} T^{abc})' &= (U^\dagger)^i_s (U^\dagger)^j_b (U^\dagger)^k_c \epsilon_{ijk} U^a_l U^b_m U^c_n T^{lmn} \\ &= (U^\dagger)^i_s U^a_l \delta_m^j \delta_n^k \epsilon_{ijk} T^{lmn} \\ &= (U^\dagger)^i_s U^a_l \epsilon_{imn} T^{lmn} \\ T'^a_s &= (U^\dagger)^i_s U^a_l T^l_i \end{aligned}$$

として、混合テンソルとして変換されます。つまり、レヴィ・チビタ記号はテンソルの縮約を作ります。どの添え字で縮約を取っても混合テンソルになり、他にも例えば

$$\begin{aligned} (\epsilon_{abs} T^{abc})' &= (U^\dagger)^i_a (U^\dagger)^j_b (U^\dagger)^k_s \epsilon_{ijk} U^a_l U^b_m U^c_n T^{lmn} \\ &= (U^\dagger)^k_s U^c_n \epsilon_{lmk} T^{lmn} \\ T'^c_s &= (U^\dagger)^k_s U^c_n T^n_k \end{aligned}$$

となっています。

添え字の入れ替えで対称になるのは完全対称と呼ばれ、3 階テンソルでは

$$S^{ijk} = T^{ijk} + T^{ikj} + T^{jik} + T^{jki} + T^{kij} + T^{kji} \quad (4)$$

独立な成分は 10 個あり

$$S^{111}, S^{222}, S^{333}, S^{122}, S^{133}, S^{211}, S^{233}, S^{311}, S^{322}, S^{123}$$

同様に、添え字の入れ替えで反対称になるのは完全反対称と呼ばれ、

$$A^{ijk} = T^{ijk} + T^{kij} + T^{jki} - T^{ikj} - T^{kji} - T^{jik} \quad (5)$$

完全反対称では $i = j = k, i = j \neq k$ といったものは 0 になるので、独立な成分は 1 個だけです (レヴィ・チビタ記号と同じ)。

完全対称、完全反対称による分解だけでなく、3 階テンソルでは縮約によって混合テンソルが作れるので、そのトレースが 0 になるまで分解できます。縮約 $C_l^k = \epsilon_{bcl} T^{bck}$ のトレースは

$$\delta_k^l \epsilon_{bcl} T^{bck} = \delta_k^l C_l^k = C$$

T は 0 ではないので、トレースで 0 になるように

$$(C_l^k - \frac{1}{3} \delta_l^k C) + \frac{1}{3} \delta_l^k C = B_l^k + \frac{1}{3} \delta_l^k C$$

として、トレースで 0 になる B_l^k が作れます。 B_l^k の独立な成分はトレースが 0 のために 8 個です。後で分かりますが C の項は完全反対称の項になるので、独立成分にはなりません。

残りの縮約の取り方は

$$D_l^i = \epsilon_{bcl} T^{ibc}, \quad E_l^i = \epsilon_{bcl} T^{bic}$$

これらの和 M_l^i のトレースは

$$\delta_l^i M_l^i = \delta_l^i D_l^i + \delta_l^i E_l^i = \epsilon_{bcl} T^{lbc} + \epsilon_{bcl} T^{blc} = \epsilon_{lcb} T^{blc} + \epsilon_{bcl} T^{blc} = -\epsilon_{bcl} T^{blc} + \epsilon_{bcl} T^{blc} = 0$$

なので、 M_l^i はトレースが 0 になり、これ以上分解できません。トレースが 0 なので独立な成分は 8 個です。

これで縮約を取った分解も終わり、3 階テンソルは

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

と分解されます。これでクォークモデルがどのようなものが見れますが、ついでなので T^{ijk} の分解した形も求めます。

そのために、 B^i_l, M^i_l を 3 階テンソルにします。レヴィ・チビタ記号で混合テンソルにしたので、レヴィ・チビタ記号で戻します。例えば、反対称な 2 階テンソルは、レヴィ・チビタ記号の関係

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{lmk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (6)$$

から

$$A^{ij} = T^{ij} - T^{ji} = \epsilon^{ijk}\epsilon_{abk}T^{ab} = \epsilon^{ijk}A_k$$

と書けます。これから、縮約による 1 階テンソル A_k に ϵ^{ijk} をかければ、反対称な 2 階テンソルを作れるのが分かります。

B^k_l では

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijl}B^k_l &= \epsilon^{ijl}(C^k_l - \frac{1}{3}\delta^k_l C) = \epsilon^{ijl}C^k_l - \frac{1}{3}\epsilon^{ijk}C \\ &= \epsilon^{ijl}\epsilon_{bcl}T^{bck} - \frac{1}{3}\epsilon^{ijk}\delta^l_m\epsilon_{bcl}T^{bcm} \\ &= (\delta^i_b\delta^j_c - \delta^i_c\delta^j_b)T^{bck} - \frac{1}{3}\epsilon^{ijk}\epsilon_{bcl}T^{bcl} \\ &= T^{ijk} - T^{jik} - \frac{1}{3}\epsilon^{ijk}\epsilon_{bcl}T^{bcl} \end{aligned} \quad (7)$$

これは i, j の入れ替えで反対称な 3 階テンソルです。第 2 項に

$$\epsilon_{abc}\epsilon_{ijk} = \delta_{ai}\delta_{bj}\delta_{ck} + \delta_{aj}\delta_{bk}\delta_{ci} + \delta_{ak}\delta_{bi}\delta_{cj} - \delta_{ai}\delta_{bk}\delta_{cj} - \delta_{ak}\delta_{bj}\delta_{ci} - \delta_{aj}\delta_{bi}\delta_{ck}$$

を使えば

$$\epsilon^{ijk}C = \epsilon^{ijk}\epsilon_{abc}T^{abc} = T^{ijk} + T^{kij} + T^{jki} - T^{ikj} - T^{kji} - T^{jik} = A^{ijk} \quad (8)$$

となり、完全反対称 A^{ijk} になります。

M^i_l でも同様にします。 ϵ^{jkl} を使って、(6) から

$$\begin{aligned} \epsilon^{jkl}D^i_l &= \epsilon^{jkl}\epsilon_{bcl}T^{ibc} = (\delta^j_b\delta^k_c - \delta^j_c\delta^k_b)T^{ibc} = T^{ijk} - T^{ikj} \\ \epsilon^{jkl}E^i_l &= \epsilon^{jkl}\epsilon_{bcl}T^{bic} = T^{jik} - T^{kij} \end{aligned}$$

となるので

$$\epsilon^{jkl}M^i_l = \epsilon^{jkl}(D^i_l + E^i_l) = T^{ijk} + T^{jik} - (T^{ikj} + T^{kij}) \quad (9a)$$

これは i, j の入れ替えで対称になっています。 ϵ^{ikl} としても

$$\epsilon^{ikl} M_l^j = \epsilon^{ikl} (D_l^j + E_l^j) = T^{jik} + T^{ijk} - (T^{jki} + T^{kji}) \quad (9b)$$

となり、 i, j で対称です。しかし、 ϵ^{ijl} では

$$\epsilon^{ijl} M_l^k = T^{kij} + T^{ikj} - (T^{kji} + T^{jki})$$

これは反対称で、他の 2 つと合わせると

$$\begin{aligned} \epsilon^{jkl} M_l^i - \epsilon^{ikl} M_l^j + \epsilon^{ijl} M_l^k &= 0 \\ (\epsilon^{23l} M_l^1 - \epsilon^{13l} M_l^2 + \epsilon^{12l} M_l^3 &= M_1^1 + M_2^2 + M_3^3 = 0) \end{aligned}$$

となるので、必要ないです。対称な 2 個を合わせて

$$\epsilon^{ikl} M_l^j + \epsilon^{jkl} M_l^i = 2T^{ijk} + 2T^{jik} - (T^{ikj} + T^{jki} + T^{kij} + T^{kji}) \quad (10)$$

とします。

(4),(5),(7),(8),(10) を足すことで T^{ijk} は

$$T^{ijk} = \frac{1}{6} S^{ijk} + \frac{1}{6} (\epsilon^{ikl} M_l^j + \epsilon^{jkl} M_l^i) + \frac{1}{2} \epsilon^{ijl} B_l^k + \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} C$$

と書けます。第 2 項は i, j で対称、第 3 項は i, j で反対称になっていて、これらは混合対称 (mixed symmetry)、混合反対称 (mixed anti-symmetry) と呼ばれます。なので、分解は混合対称を 8_S 、混合反対称 8_A として

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8_S \oplus 8_A \oplus 1$$

と書けます。

ここで求めたことをクォークとハドロンに対応させます。八道説ではバリオンとメソンは $SU(3)$ の 8 次元表現 (随伴表現) に当てはめられました。そして、今の結果では、 $SU(3)$ の基本表現と複素共役表現から

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1, \quad 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8_S \oplus 8_A \oplus 1$$

として、8 次元表現が出てきています。このため、 $SU(3)$ の 3 重項を作る粒子の組み合わせからハドロンはできていると考えられます。その粒子がゲルマンによってクォークと名付けられ、アップ (up) クォーク、ダウン (down) クォーク、ストレンジ (strange) クォークの 3 個が 3 重項を組んでいるとされます。クォークを区別するアップ、ダウン、ストレンジはフレーバ (flavor) と呼ばれます。各クォークは省略して u, d, s と表記されます。反粒子では $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ と表記されますが、ディラック場の $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ を意味する場合と、粒子を表す記号の場合があるので注意してください。

クォークの電荷 Q 、アイソスピン I_3 、ストレンジネス S 、バリオン数 B は

	Q	I_3	S	B
u	$+2/3$	$+1/2$	0	$1/3$
d	$-1/3$	$-1/2$	0	$1/3$
s	$-1/3$	0	-1	$1/3$

反クォークでは全ての符号を反転させます。

反粒子は複素共役表現が対応します。これは、反粒子は荷電共役によって

$$\psi^C = i\gamma^2\gamma^0\psi^*$$

と与えられるからです。なので、 $3 \otimes 3^*$ はクォークと反クォークの組み合わせです。

ちなみに、 $SU(2)$ では基本表現と複素共役表現が同じになるために、粒子と反粒子で同じ変換を受けます。これは簡単に分かります。 $SU(2)$ の 2 重項 Ψ で荷電共役を取ると (ガンマ行列と $SU(2)$ の成分の区別に注意)

$$\Psi^C = i\gamma^2\gamma^0\Psi^*$$

$$U^*\Psi^C = i\gamma^2\gamma^0U^*\Psi^*$$

$$\Psi^{C'} = U^*\Psi^C$$

$$= -i\sigma_2 U i\sigma_2 \Psi^C$$

$$i\sigma_2 \Psi^{C'} = U i\sigma_2 \Psi^C$$

これを

$$(i\sigma_2 \Psi^C)' = U(i\sigma_2 \Psi^C)$$

という変換と見れば

$$i\sigma_2 \Psi^C = \begin{pmatrix} \psi_2^C \\ -\psi_1^C \end{pmatrix}$$

として荷電共役による 2 重項が Ψ と同じ U の変換を受けます。荷電共役は反粒子を記述するので、 $SU(2)$ の 2 重項を作る粒子に対応する反粒子は、このように同じ $SU(2)$ の変換を受けます。より同じにするなら、 Ψ^C を

$$\tilde{\Psi}^C = \begin{pmatrix} -\psi_2^C \\ \psi_1^C \end{pmatrix}$$

と作ることで

$$i\sigma_2 \tilde{\Psi}^C = \begin{pmatrix} \psi_1^C \\ \psi_2^C \end{pmatrix}$$

とできます。また、このようにすれば、2 重項の上側がアイソスピンの $+1$ 、下側がアイソスピンの -1 のままにできます (アイソスピン ± 1 の粒子の反粒子では ∓ 1)。

話を戻します。2 階テンソルの変換は $SU(3)$ の 3 重項 Ψ^i とその複素共役 $\Psi_i = \Psi^{*i}$ の変換

$$U_i^a U_j^b \Psi^i \Psi^j, U_i^a (U^\dagger)^j_b \Psi^i \Psi_j$$

と同じ形をしています。なので、形式的に、 $i = 1$ は u 、 $i = 2$ は d 、 $i = 3$ は s として、例えば

$$T^{123} \Rightarrow uds, T^1_2 \Rightarrow u\bar{d}$$

とします。

$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$ による組み合わせから見ます。テンソルで書くと

$$T^i_j = (T^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j T) + \frac{1}{3}\delta^i_j T$$

対称な 8 個はトレースが 0 の第 1 項で、 $i \neq j$ では

$$u\bar{d}, u\bar{s}, d\bar{s}, d\bar{u}, s\bar{u}, s\bar{d}$$

対角成分となる $i = j = 1, i = j = 2, i = j = 3$ では

$$\frac{1}{3}(2u\bar{u} - d\bar{d} - s\bar{s}), \frac{1}{3}(2d\bar{d} - u\bar{u} - s\bar{s}), \frac{1}{3}(2s\bar{s} - u\bar{u} - d\bar{d})$$

トレースが 0 なので 2 個の組み合わせだけを選んで、それらを

$$u\bar{u} - d\bar{d}, u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}$$

とします。これらをメソンの $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$ の電荷、アイソスピン、ストレンジネスに合うように対応させると

クォーク	メソン ($B = 0$)	Q	I_3	S
$d\bar{u}$	π^-	-1	-1	0
$u\bar{u} - d\bar{d}$	π^0	0	0	0
$u\bar{d}$	π^+	+1	+1	0
$s\bar{u}$	K^-	-1	-1/2	-1
$s\bar{d}$	$\bar{K}^0$	0	+1/2	-1
$d\bar{s}$	K^0	0	-1/2	+1
$u\bar{s}$	K^+	+1	+1/2	+1
$u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}$	η	0	0	0

これで、8 個のメソンがクォーク、反クォークで構成されます。そして、残りのスカラーは $u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}$ で、これには η' メソンを

$$\eta' : u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}$$

と対応させます。今はテンソルの成分として表記しているので、固有状態とするときはそれぞれの固有状態のテンソル積です。例えば、 ud は $|u\rangle \otimes |d\rangle$ で、さらに規格化による定数 (クレブシュ・ゴルダン係数) がつきます。

π^0 を見ると、クォークを反クォーク、反クォークをクォークにしても π^0 のままなのが分かります。なので、中性の π^0 の反粒子は π^0 です。一方で、 K^0 では $\bar{K}^0$ です。このように、 K^0 の反粒子が K^0 ではないようにクォークは組まれます。

バリオンでは、完全対称な 10 個にはスピン $3/2$ 、混合対称、反対称な 8 個にはスピン $1/2$ のバリオンが割り振られます。ただし、完全反対称に割り振られるバリオンはないです。これは今はクォークのスピンを考慮していないためにはっきりしないですが、3 個のスピンから完全反対称が作れないためです。

混合対称、反対称が「 $SU(3)$ とハドロンの」で出てきたバリオンに対応するのを示します。混合対称な項は (10) で

$$\epsilon^{ikl} M_l^j + \epsilon^{jkl} M_l^i = 2T^{ijk} + 2T^{jik} - (T^{ikj} + T^{jki} + T^{kij} + T^{kji})$$

$i = j = k$ は 0 です。添え字の 2 個が同じ場合では (i, j, k) の和は取らない)

$$i = j : \epsilon^{ikl} M_l^i + \epsilon^{ikl} M_l^i = 2\epsilon^{ikl} M_l^i = -2\epsilon^{kil} M_l^i$$

$$i = k : \epsilon^{jil} M_l^i$$

$$j = k : \epsilon^{ikl} M_l^k$$

となっているので、どれか 1 つを選べばいいだけで、 (ijk) として (9b) から

$$(112) : 4T^{112} - 2T^{121} - 2T^{211}$$

$$(113) : 4T^{113} - 2T^{131} - 2T^{311}$$

$$(122) : T^{122} + T^{212} - 2T^{221}$$

$$(133) : T^{133} + T^{313} - 2T^{331}$$

$$(223) : 4T^{223} - 2T^{232} - 2T^{322}$$

$$(233) : T^{233} + T^{323} - 2T^{332} \quad (11)$$

全ての添え字が異なっている場合は、 i, j で対称なので $(M_1^1 + M_2^2 + M_3^3 = 0)$

$$(123) : \epsilon^{13l} M_l^2 + \epsilon^{23l} M_l^1 = \epsilon^{132} M_2^2 + \epsilon^{231} M_1^1 = M_1^1 - M_2^2$$

$$(132) : \epsilon^{12l} M_l^3 + \epsilon^{32l} M_l^1 = \epsilon^{123} M_3^3 + \epsilon^{321} M_1^1 = -M_1^1 + M_3^3$$

$$(231) : \epsilon^{21l} M_l^3 + \epsilon^{31l} M_l^2 = \epsilon^{213} M_3^3 + \epsilon^{312} M_2^2 = M_2^2 - M_3^3$$

これらの独立な組み合わせは 2 個だけです。1 個を (123) から

$$M_1^1 - M_2^2 = 2T^{123} + 2T^{213} - T^{132} - T^{312} - T^{231} - T^{321} \quad (12)$$

もう1個は (132) – (231) から

$$-M_1^1 + M_3^3 - M_2^2 + M_3^3 = -M_1^1 - M_2^2 + 2(-M_1^1 - M_2^2) = -3(M_1^1 + M_2^2)$$

として

$$M_1^1 + M_2^2 = T^{231} + T^{321} - T^{132} - T^{312} \quad (13)$$

(132) と (231) は

$$(132) : 2T^{132} + 2T^{312} - (T^{123} + T^{321} + T^{213} + T^{231})$$

$$(231) : 2T^{231} + 2T^{321} - (T^{213} + T^{312} + T^{123} + T^{132})$$

となっています。

というわけで、(11) から (13) の8個を、1, 2, 3 を u, d, s にすれば

	クォーク	バリオン ($B = +1$)	Q	I_3	S
(112)	$2uud - (ud + du)u$	$p \ (uud)$	+1	+1/2	0
(122)	$(ud + du)d - 2ddu$	$n \ (udd)$	0	-1/2	0
(223)	$2dds - (ds + sd)d$	$\Sigma^- \ (dds)$	-1	-1	-1
(123) ₋	$2(ud + du)s - (us + su)d - (ds + sd)u$	$\Sigma^0 \ (uds)_-$	0	0	-1
(113)	$2uus - (us + su)u$	$\Sigma^+ \ (uus)$	+1	+1	-1
(233)	$(ds + sd)s - 2ssd$	$\Xi^- \ (dss)$	-1	-1/2	-2
(133)	$(us + su)s - 2ssu$	$\Xi^0 \ (uss)$	0	+1/2	-2
(123) ₊	$(ds + sd)u - (us + su)d$	$\Lambda^0 \ (uds)_+$	0	0	-1

対称な部分は括弧でまとめていて、(123) の $\pm$ は (12),(13) に合わせています。係数は省いています。

混合反対称では

$$\epsilon^{ijl} B_l^k = T^{ijk} - T^{jik} - \frac{1}{3} A^{ijk}$$

なので、 $i = j$ では0 になり

$$i = k : T^{iji} - T^{jii}$$

$$j = k : T^{ikk} - T^{kik}$$

から、どちらかを選べばいいので

$$(121) : T^{121} - T^{211}$$

$$(131) : T^{131} - T^{311}$$

$$(212) : T^{212} - T^{122}$$

$$(313) : T^{313} - T^{133}$$

$$(232) : T^{232} - T^{322}$$

$$(323) : T^{323} - T^{233}$$

(123) では、 i, j の入れ替えで反対称なので

$$(123) : \epsilon^{12l} B_l^3 = B_3^3 = T^{123} - T^{213} - \frac{1}{3} A^{123}$$

$$(132) : \epsilon^{13l} B_l^2 = -B_2^2 = T^{132} - T^{312} - \frac{1}{3} A^{132} = T^{132} - T^{312} + \frac{1}{3} A^{123}$$

$$(231) : \epsilon^{23l} B_l^1 = B_1^1 = T^{231} - T^{321} - \frac{1}{3} A^{231} = T^{231} - T^{321} - \frac{1}{3} A^{123}$$

B_l^i はトレースが 0 なので、2 個を

$$B_1^1 - B_2^2 = T^{231} - T^{321} + T^{132} - T^{312}$$

$$B_1^1 + B_2^2 = -B_3^3 = -T^{123} + T^{213} + \frac{1}{3} A^{123}$$

と選びます。 $B_1^1 + B_2^2$ は

$$-3(B_1^1 + B_2^2) = 3T^{123} - 3T^{213} - A^{123} = 2T^{123} - 2T^{213} - T^{231} + T^{321} + T^{132} - T^{312}$$

となっています。まとめると、混合対称では

	クォーク	バリオン
(121)	$(ud - du)u$	$p \ (uud)$
(122)	$(du - ud)d$	$n \ (udd)$
(223)	$(du - ud)d$	$\Sigma^- \ (dds)$
(123) ₋	$(ds - sd)u + (us - su)d$	$\Sigma^0 \ (uds)$
(113)	$(us - su)u$	$\Sigma^+ \ (uus)$
(233)	$(sd - ds)s$	$\Xi^- \ (dss)$
(133)	$(su - us)s$	$\Xi^0 \ (uss)$
(123) ₊	$2(ud - du)s + (sd - ds)u + (us - su)d$	$\Lambda^0 \ (uds)$

混合対称、混合反対称どちらでも同じバリオンを与えます。

このようにして、3 個のクォークを組み合わせさせてハドロンを作るのがクォークモデルです。しかし、問題があります。ここでは考慮してませんが、クォークモデルはクォークのスピン $1/2$ による $SU(2)$ も含めて作られるものです。このとき、フレーバとスピンに対して完全対称なバリオンが作れます。しかし、例えば、スピン $3/2$ のバリオン Δ^{++} はフレーバとスピンによる完全対称な uuu から作られますが、クォークはフェルミオンなので、入れ替えで符号が変わります。つまり、入れ替えで完全反対称となり、話が合わなくなります。このため、クォークにもう 1 つ $SU(3)$ の自由度を加えて完全反対称になるように修正します。その自由度をカラー (color) と呼び、赤、緑、青です。赤は r 、緑は g 、青は b とします。カラーは粒子の種類の区別ではないので、クォークの数は増えません。また、メソンはクォークと反クォークによる 2 個の組み合わせなので、カラーがなくても成立します。

ここで重要なのは観測されるハドロンは、カラーの $SU(3)$ の 1 重項のみという仮定です。バリオンは 3 個のクォークで作られるので、カラーの $SU(3)$ による $3 \otimes 3 \otimes 3$ になり、その 1 重項は完全反対称な

$$rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr$$

となっています。カラーに対して完全反対称でしかハドロンになれないために、 uuu は入れ替えで完全反対称になり、フェルミオンの性質を満たせます。メソンではカラーの $SU(3)$ は $3 \otimes 3^*$ で、これも 1 重項を持つので問題がないです。また、カラーの 1 重項でしか観測されないという仮定によって、3 個のクォークかクォークと反クォークからハドロンが作られるのは、それらが 1 重項を持つからと説明できます。そして、クォークを直接観測できない理由にもなっています。