くり込み理論

発散の次数と呼ばれるものを導入し、それによってくり込み理論がどのように分類されるのかみていきます。ちなみにここでの話は外線のあるファインマン図を想定しています。

- ϕ^4 理論

  例えば、経路積分のところで出てきたループ $\Delta_F(0)$

$$\Delta_F(0) = g\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2-m^2} \tag{1}$$

が現われていると、これは運動量保存のデルタ関数では積分は消えずに、その結果 2 次発散を起こします。このように起こる発散をファインマン図の構成 (内線の数や頂点の数等) から調べます。

　ファインマン図を構成するときに見たように、頂点では常にデルタ関数が出てき、これによって運動量保存が満たされます。つまり、各頂点でのデルタ関数で消えない積分がループとして残ってくるという流れです。そして図にループが出てくれば、対応する伝播関数から分母に q^2 が現われます。また、結合定数の展開による n 次のファインマン図というのは頂点が n 個ある図になっています。

　外線の数を E、内線 (伝播関数) の数を I、ループの数を L、次元を d として、見かけの発散の次数 (superficial degree of divergence)D

$$D = dL - 2I$$

を定義します。これは (分子の q の次数 − 分母の q の次数) です。第二項に 2 がついてるのは伝播関数の分母が q^2 だからです。この D が、$D>0, D<0, D=0$ に分類され、$D<0$ なら積分は発散しないはずです。この式を内線とループを使わずに、外線と頂点を使って表してやります。頂点に現れるデルタ関数の運動量保存は必ず 1 個は外線の運動量保存として使われるために、内線に対する運動量保存としては $n-1$ 個使うことができます。なので、$n-1$ 個のデルタ関数で内線の運動量積分の数が減らされ、残ったものがループ積分となるので

$$L = I - (n-1) = I - n + 1$$

　頂点の数は n 個であり、ϕ^4 理論の頂点には 4 つの足 (外線もしくは内線) がくっつくので、頂点にくっつく線の数は $4n$ です。これは外線と内線の和でかけば

$$4n = E + 2I$$

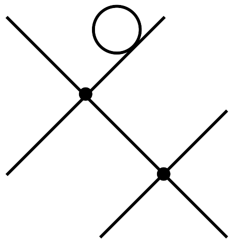
内線が $2I$ となっているのは内線は頂点を結ぶものとして出てくるために、2 回数えることになるからです。この二つを D に代入して

$$
\begin{aligned}
D &= d(2n - \frac{E}{2} - n + 1) - (4n - E) \\
&= d - \frac{d}{2}E + dn - 4n + E \\
&= d - (\frac{d}{2} - 1)E + n(d - 4)
\end{aligned}
$$

4 次元なら

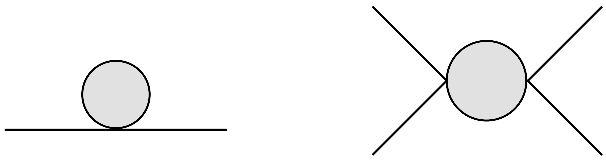
$$D = 4 - E$$

という簡単な形なり、外線の数だけで収束するかどうかわかります。ただ、見かけとつけたように、常に収束するわけではなくて、例えば外線の数が 6 本のとき、



このように (1) で示したループをくっ付けることができて、そのループによって発散してしまいます。この図が I 粒子既約になっていないから発散が起きているというわけでなく、I 粒子既約になっていても同様に発散はおきます。ただしこの全体の図として考えずに、subdiagram(n 点関数から外線を外したもの) と呼ばれる個別の図に分けたときに、その全ての subdiagram の見かけの発散次数が 0 より小さければ収束し、一つでもそうでなければ全体の図は発散するというように修正すればよくなっています。

今の場合、$D = 4 - E$ となっているために、発散の次数は頂点の数に依存していません。これはどんな高次の図に対しても発散が存在することを意味し、発散する図が無限個あるように考えられます。しかし、実際は ϕ^4 理論は頂点に対して 4 つの足が対応しなければいけなく、奇数個の足を持つ図というのは存在できないので、発散するグラフの数が有限になり



この 2 つです (真空泡の図も含まれますが寄与しないので無視します)。塗りつぶしている部分はそこに入ることが出来る任意の図を表しています。このようにあらゆるオーダで発散が生じるが、発散する図が有限個であるときくり込み可能理論 (renormalizable theory) と呼びます。なので、有限個の図に生じる発散をどうにかすることができれば、摂動論は成り立ちます。

また、ϕ^r 理論に拡張するには $rn = E + 2I$ にすればいいので

$$D = d(\frac{r}{2}n - \frac{E}{2} - n + 1) - (rn - E) = d - (\frac{d}{2} - 1)E + n(\frac{r}{2}(d-2) - d)$$

となります。

- QED

  次に QED ではどうなのか見ていきます。見かけの発散の次数は

$$D = dL - P_e - 2P_\gamma$$

$$d : 次元 \ \ . \ n : 頂点の数 \ \ , \ L : ループの数$$

$$P_e : 電子の伝播関数 \ \ , \ P_\gamma : 光子の伝播関数$$

$$N_e : 電子の外線 \ \ , \ N_\gamma : 光子の外線$$

これは、電子の伝播関数は運動量の次数が -1、光子は -2 であることから分かります。これをまた、外線と頂点で表してやります。ループの数は、ϕ^4 理論と同じ考え方で

$$L = P_e + P_\gamma - n + 1$$

頂点に関しては QED では、2 本の電子の足と、1 本の光子の足が出てくるので

$$n = 2P_\gamma + N_\gamma$$

$$2n = 2P_e + N_e$$

となります。これを代入して

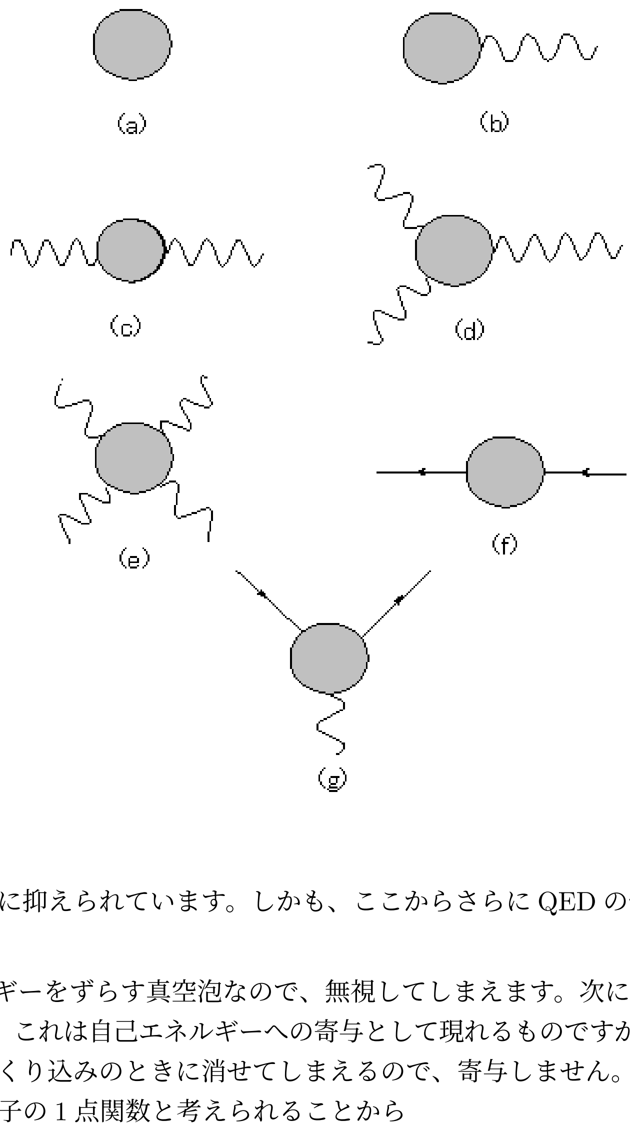
$$\begin{aligned} D &= d(P_e + P_\gamma - n + 1) - P_e - 2P_\gamma \\ &= d(\frac{1}{2}(2n - N_e) + \frac{1}{2}(n - N_\gamma) - n + 1) - \frac{1}{2}(2n - N_e) - (n - N_\gamma) \\ &= d + n(\frac{d}{2} - 2) - (\frac{d-1}{2})N_e - (\frac{d-2}{2})N_\gamma \end{aligned}$$

$d = 4$ なら

$$D = 4 - \frac{3}{2}N_e - N_\gamma$$

この場合も頂点 n に依存しなくなっているために、あらゆるオーダで発散を生じます。しかし、QED のところでくり込みをやったときに、真空偏極、自己エネルギー、頂点補正の 3 つしか扱わなかったように、実は QED ではこの 3 つの図しか出てきません。なので、QED もくり込み可能理論になっています。D が 0 以上の図というのは

$$
\begin{array}{llllllllllll}
(\mathrm{a}) & N_e=0 & N_\gamma=0 & \Rightarrow & D=4 & , & (b) & N_e=0 & N_\gamma=1 & \Rightarrow & D=3 \\
(\mathrm{c}) & N_e=0 & N_\gamma=2 & \Rightarrow & D=2 & , & (d) & N_e=0 & N_\gamma=3 & \Rightarrow & D=1 \\
(e) & N_e=0 & N_\gamma=4 & \Rightarrow & D=0 & , & (f) & N_e=2 & N_\gamma=0 & \Rightarrow & D=1 \\
(g) & N_e=2 & N_\gamma=1 & \Rightarrow & D=0 & & & & & &
\end{array}
$$



この 7 種類で、有限個に抑えられています。しかも、ここからさらに QED の性質によって数を落として行けます。

(a) は真空のエネルギーをずらす真空泡なので、無視してしまえます。次に (b) は光子の外線が 1 本だけくっついてるものです。これは自己エネルギーへの寄与として現れるものですが、外線の運動量に独立になって現れます。このためくり込みのときに消せてしまえるので、寄与しません。理論の構造的には、(b) は相互作用があるときの光子の 1 点関数と考えられることから

$$
-ie\int d^4xe^{-iqx}<\Omega|T(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)|\Omega>=-ie\int d^4xe^{-iqx}<\Omega|T(j^\mu)|\Omega>
$$

として現れるはずです (T は時間順序積)。QED は荷電共役をとることに対して不変になっていなければならないので、荷電共役の演算子を C として、真空が

$$C|\Omega>=|\Omega>$$

でなければいけません。j^μ に対しては電荷が反転するために符号が反転する ($Cj^\mu C^\dagger=-j^\mu$) ので

$$<\Omega|T(j^\mu)|\Omega>=<\Omega|C^\dagger C(T(j^\mu))C^\dagger C|\Omega>=-<\Omega|T(j^\mu)|\Omega>$$

なので、これは 0 です。このことは、(d) にも言えるので (b),(d) は QED の対称性の要求から消えます (奇数個 (3 個以上) の j^μ が出てくるものは振幅に寄与しないというのは、Furry の定理と呼ばれています)。残りの (e) はワード恒等式によって発散が除去できるので、これも無視して問題ないです。

なので、結局、真空偏極、自己エネルギー、頂点補正の 3 つの図だけが残り、この 3 つの図で起こる発散が処理できれば摂動論として成立させることができます。

ϕ^4 理論、QED とくり込み可能理論をみてきましたが、くり込み理論は他にも超くり込み可能理論 (super-renormalizable theory) とくり込み不可能理論 (non-renormalizable theory) に分類されます。これらがどんなものか見るために、QED での頂点の数を

$$a_\gamma n=2P_\gamma+N_\gamma$$

$$a_e n=2P_e+N_e$$

のように、頂点から a_γ 個の光子の線、a_e 個の電子の線が出ているように変えます。そうすると発散の次数は

$$\begin{aligned}
D &= d(P_e+P_\gamma-n+1)-P_e-2P_\gamma \\
&= d(\frac{1}{2}(a_en-N_e)+\frac{1}{2}(a_\gamma n-N_\gamma)-n+1)-\frac{1}{2}(a_en-N_e)-(a_\gamma n-N_\gamma) \\
&= d(\frac{1}{2}a_en-\frac{1}{2}N_e+\frac{1}{2}a_\gamma n-\frac{1}{2}N_\gamma-n+1)-\frac{1}{2}a_en+\frac{1}{2}N_e-a_\gamma n+N_\gamma \\
&= d+n(\frac{1}{2}a_ed+\frac{1}{2}a_\gamma d-\frac{1}{2}a_e-a_\gamma-d)-(\frac{d-1}{2})N_e-(\frac{d-2}{2})N_\gamma
\end{aligned}$$

$d=4$ で

$$D=4-\frac{3}{2}N_e-N_\gamma+(\frac{3}{2}a_e+a_\gamma-4)n$$

となり、頂点の数 n が消えずに残っています。このとき、n の係数に対して場合わけができます。係数が 0 のときはそのまま QED と一致するのでくり込み可能理論になります。

1. $(3a_e/2+a_\gamma-4)<0$

   この場合、n が負の符号を持つために、頂点の数が多いと $D<0$ となり発散しなくなります。つまり、高次において発散が存在しないことを意味することになります。このように、発散する図が有限個しかないものを超くり込み可能理論と呼びます。例としては、ϕ^3 理論や 3 次元での ϕ^4 理論です。

2. $(3a_e/2 + a_\gamma - 4) > 0$

   このとき、発散の条件 $D \geq 0$ より

$$\frac{3}{2}N_e + N_\gamma \leq 4 + (\frac{3}{2}a_e + a_\gamma - 4)n$$

   であり、n が増えればそれに伴って右辺はどこまでも大きくできるために、左辺での組み合わせは無限個作れるので、発散する図は無限個存在することになります。このように高次で無限個の図が存在するものをくり込み不可能理論と呼びます。これの例は $\phi^n (n > 4)$ 理論とか重力理論です。

他にもくり込み理論を分類するものとして次元解析を用いる方法があって、これについても見ていきます。

作用の次元は エネルギー$\times$時間 でしたが、これは自然単位系にいくと無次元量になります ([時間 = 長さ = (質量)$^{-1}$])。なので

$$S = \int d^d x \mathcal{L}$$

からラグランジアン密度は長さの次元 $[L]$ の $-d$ 乗、$[L^{-d}]$ の次元を持ちます (もしくは質量を使って $[M^d]$)。∂^μ は L^{-1} の次元を持ち、ラグランジアンの運動項

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$$

は当然ラグランジアンの次元 $[L^{-d}]$ と一致しなくてはならないので、ϕ は $[L^{1-d/2}]$ の次元を持ちます。同様にラグランジアンに出てくる相互作用項は、結合定数 g の次元が $[L^{-\delta}]$ だとして、ϕ^r 理論では

$$g\phi^r = [L^{-\delta} L^{r(1-d/2)}] = [L^{-d}]$$

なので、結合定数の次元は

$$\delta = d + r(1 - \frac{d}{2})$$

ということになります。これを ϕ^r 理論での発散の次数の式に代入すると

$$\begin{aligned} D &= d - (\frac{d}{2} - 1)E + n(\frac{r}{2}(d-2) - d) \\ &= d - (\frac{d}{2} - 1)E + n(\frac{(\delta - d)}{2 - d}(d-2) - d) \\ &= d - (\frac{d}{2} - 1)E - n\delta \end{aligned}$$

と書き換えられます。例えば ϕ^4 理論での結合定数の次元は

$$g = [L^{-(4-d)}] = [M^{4-d}]$$

これを次数の式にいれると

$$D = d - (\frac{d}{2} - 1)E - n(4 - d)$$

つまり、くり込み可能理論であるためには $\delta = 4 - d = 0$ であることになります。

このことから、くり込み理論は結合定数の次元によっても分類することができて

- 正の質量の次元なら超くり込み可能理論
- 無次元ならくり込み可能理論
- 負の質量の次元ならくり込み不可能理論

となっています (QED の結合定数 e は無次元なのでくり込み可能理論です)。

ついでに、スカラー場での n 点関数での次元も求めておきます。場 ϕ の次元は質量次元で $[\frac{d}{2} - 1]$ であることから、n 点相関関数 $G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n)$ の次元は質量次元で $[n(\frac{d}{2} - 1)]$ であることがすぐにわかります。運動量表示での $G^{(n)}(p_1, \cdots, p_n)$ ではフーリエ変換

$$\int d^dx_1 \cdots d^dx_n e^{i(p_1x_1+p_2x_2\cdots+p_nx_n)}G(x_1, \cdots, x_n) = (2\pi)^d\delta^d(p_1 + p_2 \cdots + p_n)G(p_1, \cdots, p_n)$$

より、左辺は $-nd + n(\frac{d}{2} - 1)$ であり、デルタ関数の質量次元は $-d$ なので $G(p_1, p_2, \cdots)$ は $[d - n(\frac{d}{2} + 1)]$ であることがわかります。また、運動量保存の関係上デルタ関数を差し込んで n 点相関関数のフーリエ変換は定義されるので、右辺にはデルタ関数があらわれています。分かりやすいものとして、2 点相関関数 (伝播関数) だと並進不変性 (位置の差にのみ依存) によってデルタ関数が出てきます。

通常のフーリエ変換の式をそのまま使うなら 2 点相関関数は

$$\int d^dx_1d^dx_2e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}G^{(2)}(x_1, x_2) = G^{(2)}(p_1, p_2)$$

なので $-2d + d - 2 = -d - 2$ となり、n 点なら $-n(\frac{d}{2} + 1)$ となります。ただし、これだと運動量保存がないためにデルタ関数を差し込んで運動量保存を成り立たせる必要があります ($p_1 = -p_2$)。「クライン・ゴルドン場〜伝播関数〜」とかで出てくる最低次の伝播関数のフーリエ変換 $D(p)$ や $S_F(p)$ は、運動量は保存されているということ (並進不変性) を暗黙に使っているために、そうなっています。例えば、実際に 2 点だとして伝播関数を代入してもデルタ関数がないとスカラー場の伝播関数 $D(p)$ にはなりません。こういった関係で n 点相関関数 $G^{(n)}$ は $d - n(\frac{d}{2} + 1)$ という次元になります (デルタ関数による運動量保存があるために、$G^{(n)}(p_1 \cdots, p_n) \Rightarrow G^{(n)}(p_1, \cdots, p_{n-1})$)。

頂点関数は、例えば 3 点では

$$i\frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(x')} = \int d^4zd^4z'd^4z''G_{con}(x, z)G_{con}(x', z')G_{con}(z'', x'')\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z'')\delta\phi(z')}$$

となっていて、W は無次元です（有効作用も無次元)。なので、$\Gamma^{(3)}(x_1,x_2,x_3)$ は 4 次元で $3+12-2\times 3=9$ です。これを d 次元での n 点頂点関数にするには単に d 次元にして、それぞれが n 個あると思えばいいだけなので、$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$ の次元は $n(\dfrac{d}{2}-1)+nd-n(d-2)=n(\dfrac{d}{2}+1)$ となります。そして、フーリエ変換

$$\int d^dx_1d^dx_2\cdots e^{i(p_1x_1-p_2x_2\cdots)}\Gamma^{(n)}(x_1,x_2\cdots)=(2\pi)^d\delta^d(p_1-p_2\cdots)\Gamma^{(n)}(p_1,p_2\cdots)$$

より、運動量表示では $-nd+n(\dfrac{d}{2}+1)+d=n(1-\dfrac{d}{2})+d$ 次元となります。2 点頂点関数と伝播関数の次元は 2 と -2 になっていることから、足せば 0(無次元) となって

$$\Gamma^{(2)}(p)G^{(2)-1}_{con}(p)=i$$

という関係の次元にも合っています。まとめると

	質量次元
$G^{(n)}(x_i)$	$n\big(\dfrac{d}{2}-1\big)$
$G^{(n)}(p_i)$	$d-n\big(\dfrac{d}{2}+1\big)$
$\Gamma^{(n)}(x_i)$	$n\big(\dfrac{d}{2}+1\big)$
$\Gamma^{(n)}(p_i)$	$d+n\big(1-\dfrac{d}{2}\big)$