くり込み〜ϕ^4 理論〜

ϕ^4 理論での次元正則化による正則化と発散項の除去について見ていきます。ここでは発散項を除去する方法を 2 つ示します。一つは QED のところでやった発散を物理量の中に入れてしまうというもの、もう一つはラグランジアンに相殺項と呼ばれるものを加えてしまうものです。この二つはやっていることがちょうど逆のようになっています。QED のところでの方法は、ラグランジアンにいるくり込まれていない物理量は無限大の値を持っており、それを最後に有限の物理量にくり込んで有限のくり込まれた物理量にするというものです。相殺項の方法ではラグランジアンに出てくる物理量は全て有限の値になっており、相殺項が無限大を含んでいます。そして最後にくり込まれていない裸の量が無限大の量になるように構成します。
2 点頂点関数のことを単に 2 点関数と書いていきます。

計算をして行く前に次元合わせを行います。4 次元での ϕ^4 理論のラグランジアンは

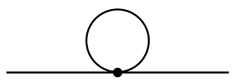
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

これを d 次元だとして考えると、結合定数は質量次元 M において $\lambda = [M^{4-d}]$ という次元を持つので、4 次元だと結合定数は無次元となりますが、d 次元では無次元になっていません。無次元にしてやるために適当な質量パラメータ μ を加えて

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\mu^{4-d}\lambda}{4!}\phi^4$$

こうすることで λ は d 次元でも無次元になり、第三項もラグランジアンの次元 d にもなっています $(4-d+0+2d-4 = d)$。このパラメータ μ はくり込み群で意味を持つもので、ここでは次元合わせ以外の意味合いはありません。

計算したいものは、2 点相関関数にループがくっついている



この図で自己エネルギーに対応するのはループ部分で、これはファインマン則によってすぐに式化することができます。今のラグランジアンでは λ に μ^{4-d} がくっついているので、

$$-i\Sigma = \frac{1}{2}(-i\lambda)\mu^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{i}{p^2-m^2}$$

となります (1/2 は対称因子)。自己エネルギー部分 Σ に $-i$ を掛けているのは自己エネルギーと頂点関数で Σ がどのように伝播関数に組み込まれているかを見れば分かると思います。

これは次元正則化のところで示した積分そのものの形なので

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lambda\mu^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2-m^2} &= -\frac{i}{2}\lambda\mu^{4-d}\int\frac{d^dp_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{p_E^2+m^2}\\
&= -\frac{i}{2}\lambda\mu^{4-d}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{1}{m^2}\Big)^{1-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(1)}\\
&= -\frac{i}{2}\lambda m^2\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{\mu^2}{m^2}\Big)^{2-\frac{d}{2}}\Gamma(1-\frac{d}{2})\\
&= -\frac{i}{2}\lambda m^2(4\pi)^{-2}\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big)^{2-\frac{d}{2}}\Gamma(1-\frac{d}{2})\\
&= -\frac{i}{2}\lambda m^2(4\pi)^{-2}\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big)^{\frac{\epsilon}{2}}\Gamma(\frac{\epsilon}{2}-1)\qquad(\epsilon=4-d)\\
&\simeq -\frac{i}{2}\lambda m^2(4\pi)^{-2}\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)\Big)(-\frac{2}{\epsilon}-1+\gamma)\\
&= -\frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\Big(-\frac{2}{\epsilon}-1+\gamma-\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)-\frac{\epsilon}{2}\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)+\frac{\epsilon}{2}\gamma\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)\Big)\\
&= \frac{i\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon}+\frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\Big(1-\gamma+\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)+\cdots\Big)\\
&= \frac{i\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon}+finite
\end{aligned}
$$

よって自己エネルギー Σ への一番低いオーダ (1 ループ) からの寄与として

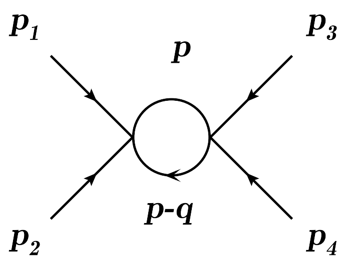
$$
\frac{\Sigma}{i}=\frac{i\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon}+finite
$$

これが伝播関数の分母に足されることになります。2 点頂点関数 $\Gamma^{(2)}$ は、2 点相関関数の逆から i をとったものと定義すれば

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)} &= p^2-m^2-\Sigma\\
&= p^2-m^2\Big(1-\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon}\Big)
\end{aligned}
$$

これで 2 点相関関数に対する 1 ループでの補正がわかったことになりますが、$\epsilon\to 0$ であきらかに発散しています。また、より高次からの寄与は全く加えてないので、1 ループまででの近似的な結果です (1 ループ近似)。

次に発散を起こすもう一つの図、2 次のオーダでの 4 点関数



これを計算します ($p_1+p_2=q$)。これのループ部分は

$$
i\Gamma=\frac{1}{2}\lambda^2(\mu^2)^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2-m^2}\frac{1}{(p-q)^2-m^2}
$$

これはまず、ファインマンパラメータ

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2}$$

を使って

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m^2)} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2} &= \int_0^1 dz \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{((p^2 - m^2)z + (1-z)((p-q)^2 - m^2))^2} \\
&= \int_0^1 dz \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{((p^2 - m^2)z + p^2 + q^2 - 2pq - m^2 - z(p^2 + q^2 - 2pq - m^2))^2} \\
&= \int_0^1 dz \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m^2 + q^2 - 2pq - z(q^2 - 2pq))^2} \\
&= \int_0^1 dz \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m^2 - 2pq(1-z) + q^2(1-z))^2}
\end{aligned}$$

これに対して $p' = p - q(1-z)$ とすることで

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dz \int \frac{d^dp'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p'^2 - m^2 + q^2(1-z) - q^2(1-z)^2)^2} \\
&= \int_0^1 dz \int \frac{d^dp'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p'^2 - m^2 + q^2 z(1-z))^2}
\end{aligned}$$

これで前に示した積分の形になったので積分を実行できて (p' を p と書き、二行目でユークリッド化しています)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lambda^2(\mu^2)^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m^2 + q^2 z(1-z))^2} \\
&= \frac{i}{2}\lambda^2(\mu^2)^{4-d} \int_0^1 dz \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + m^2 - q^2 z(1-z))^2} \\
&= \frac{i}{2}\lambda^2(\mu^2)^{2-\frac{d}{2}}(\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(4\pi)^{-2+d/2}}(4\pi)^{-2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dz \Big(\frac{1}{m^2 - q^2 z(1-z)}\Big)^{2-\frac{d}{2}} \\
&= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}(\mu^2)^{2-\frac{d}{2}}\Gamma(2-\frac{d}{2}) \int_0^1 dz \Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - q^2 z(1-z)}\Big)^{2-\frac{d}{2}} \\
&= \frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2}\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \int_0^1 dz \Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - q^2 z(1-z)}\Big)^{\frac{\epsilon}{2}}
\end{aligned}$$

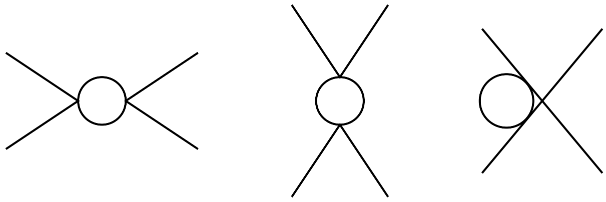
$\epsilon \to 0$ の極限をとって (μ^ϵ は 1 だとしてしまいます)

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2}(\frac{2}{\epsilon} - \gamma)\Big(1 + \frac{\epsilon}{2}\int_0^1 dz \log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - q^2 z(1-z)}\big)\Big) \\
&= \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \int_0^1 dz \log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - q^2 z(1-z)}\big)\Big) \\
&= \frac{i\lambda^2}{16\pi^2\epsilon} - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}(\gamma + F(q^2, m, \mu)) \\
&= \frac{i\lambda^2}{16\pi^2\epsilon} + finite
\end{aligned}$$

有限部分が全運動量 $(p_1+p_2)^2=q^2$ に依存していることからわかることがあって、マンデルスタム変数

$$s=(p_1+p_2)^2\ ,\ t=(p_1+p_3)^2\ ,\ u=(p_1+p_4)^2$$

によって有限部分の依存性を s で表すことができます。そして、今見ているオーダでは同じ過程を表すものとして



この 3 つがあり、これはそれぞれ s,t,u に対応しているものです。よって 2 次の補正を含めた頂点関数 $\Gamma^{(4)}$ は

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(4)}(p_i)&=-i\lambda+i\Gamma\\
&=-i\lambda+\frac{i\lambda^2}{16\pi^2\epsilon}-\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\big(\gamma+F(s,m,\mu)\big)\\
&\qquad+\frac{i\lambda^2}{16\pi^2\epsilon}-\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\big(\gamma+F(t,m,\mu)\big)+\frac{i\lambda^2}{16\pi^2\epsilon}-\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\big(\gamma+F(u,m,\mu)\big)\\
&=-i\lambda+\frac{3i\lambda^2}{16\pi^2\epsilon}-\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\big(3\gamma+F(s,m,\mu)+F(t,m,\mu)+F(u,m,\mu)\big)\\
&=-i\lambda+\frac{3i\lambda^2}{16\pi^2\epsilon}-\frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\Big(3\gamma+\int_0^1dz\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2-z(1-z)s}\big)\\
&\qquad\qquad+\int_0^1dz\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2-z(1-z)t}\big)+\int_0^1dz\log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2-z(1-z)u}\big)\Big)\\
&=-i\lambda+\frac{3i\lambda^2}{16\pi^2\epsilon}+finite
\end{aligned}$$

となります。こちらも $\epsilon\to 0$ で発散します。

これで、ϕ^4 理論の 1 ループで現われる発散積分を次元正則化によって計算し終わりました。次に、2 点相関関数と 4 点頂点関数に現れた $\epsilon\to 0$ で起こる発散を物理量にくり込みます。その方法としては二つあり、後で見る相殺項の方がよく用いられます。

また、頂点関数がループの数と関連して展開されるために、各オーダでのくり込みを成立させることができています。この頂点関数の展開については最後の補足を見てください。

最初に QED のとこでやった方法のようにそのまま物理量に入れてしまう方法をみていきます。2 点相関関数に対しては、2 点関数 $\Gamma^{(2)}(p)$ を使って書けば、発散項を

$$\Gamma^{(2)}(p)=p^2-m^2(1-\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon})\ \Rightarrow\ \Gamma^{(2)}(p)=p^2-m_1^2$$

として新しい質量 m_1 の中に入れてしまい、これによって今のオーダにおいて発散しない 2 点関数となります (2 ループのときにはまだ修正が必要です)。そして元の m は

$$m^2=m_1^2(1+\frac{\lambda}{16\pi^2\epsilon})$$

となっているので、無限大の量となります。$\Gamma^{(2)}(p^2=0)$ とすれば m_1 が取り出せて

$$\Gamma^{(2)}(0) = -m_1^2$$

これをくり込み条件 (renormalization condition) と言います。
　次に 4 点での場合で

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = -i\lambda + \frac{6i\lambda^2}{32\pi^2\epsilon} - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\big(3\gamma + F(s,m,\mu) + F(t,m,\mu) + F(u,m,\mu)\big) \tag{1}$$

p_i は運動量 p_1, p_2, p_3, p_4 です。今度は結合定数に対して

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\big(\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma - 3F(0,m,\mu)\big)$$

としてくり込まれた結合定数 λ_1 を定義します。これと (1) をみてわかるように、結合定数は $\Gamma^{(4)}(p_i=0)$ によって与えられて

$$\Gamma^{(4)}(p_i=0) = -i\lambda_1$$

この結合定数 λ_r と、質量 m_r によって (1) を書き換えることで、1 ループでの厳密な 4 点頂点関数は

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = -i\lambda_1 + \frac{i\lambda_1^2}{32\pi^2}(F(s,m_1,\mu) + F(t,m_1,\mu) + F(u,m_1,\mu) - 3F(0,m_1,\mu))$$

となって、発散を含まない形になります。今度は結合定数を決める式として

$$\Gamma^{(4)}(p_i=0) = -i\lambda_1$$

こんなのが出てきて、これが 4 点関数に対するくり込み条件となります。
　他にも、$\Gamma^{(2)}(p)$ に対して

$$\Gamma^{(2)}(p^2=m_1^2) = 0$$

そして、$\Gamma^{(4)}(p_i)$ では $3F(0,m,\mu)$ とせずに

$$s=4m^2\ ,\ t=0\ ,\ u=0$$

と選択することで

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = -i\lambda_1 \quad (s=4m^2\ ,\ t=0\ ,\ u=0)$$

とする条件もあります (質量殻上での条件)。この条件は、質量殻上の関係 $p^2=m^2$ が成立していることを要求しているので、m_r を物理的な質量とみなすことが出来ます。
　ここで出したくり込み条件をまとめると

$$\Gamma^{(4)}(p_i=0) = -i\lambda_1$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p)|_{p^2=0}=1$$

$$\Gamma^{(2)}(p^2=0)=-m_1^2$$

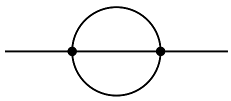
質量殻上だとして

$$\Gamma^{(4)}(p_i=m_1)=-i\lambda_1$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p)|_{p^2=m_1^2}=1$$

$$\Gamma^{(2)}(p^2=m_1^2)=0$$

次に問題になるのが、1 つのループでなく 2 つのループがあるときも同様にくり込みによって発散が消せるのかということです。結論を言えば、発散を除去しきれません。質量のくり込みを行おうとしたときに



この図による発散の寄与が質量のくり込みだけでは消せずに残ってしまいます。これを消す方法を形式的に見ておきます。

厳密な 2 点関数は

$$\Gamma^{(2)}(p)=p^2-m_0^2-\Sigma$$

であり (裸の質量を m_0 と書いています)、Σ が発散を握っています。このとき、$\Gamma^{(2)}(p)$ の物理的な質量 m^2 周りの展開 ($p^2\simeq m^2$ 周りの展開) は「Lehmann-Källen スペクトル表示」の最後に見たように、$G^{(2)}_{con}(p)$ の分母の展開から

$$\Gamma^{(2)}(p)=(p^2-m^2)-\frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}(p^2-m^2)+(p^2-m^2)^2\Sigma_1\quad\ (m^2=m_0^2+\Sigma)$$

Σ_1 には $(p^2-m^2)^2$ 以上の項を全て持たせます。これを見てみると、第二項以降が質量に取り込むだけでは処理できない部分になっています。変形させると

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(p)&=(p^2-m^2)-\frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}(p^2-m^2)+(p^2-m^2)^2\Sigma_1\\&=(p^2-m^2)(1-\frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}+(p^2-m^2)\Sigma_1)\end{aligned}$$

Σ の微分は場のくり込み定数 Z によって

$$Z^{-1}=1-\frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}$$

と書けます。そうすると厳密な 2 点相関関数 $G^{(2)}$ は

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}(p) &= \frac{i}{p^2-m^2}\frac{1}{1-\frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}+(p^2-m^2)\Sigma_1} \\
&= \frac{i}{p^2-m^2}\frac{1}{1-\frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}}\frac{1}{1+\frac{(p^2-m^2)\Sigma_1}{1-\frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}}} \\
&= \frac{i}{p^2-m^2}\frac{Z}{1+Z(p^2-m^2)\Sigma_1} \\
&= \frac{i}{p^2-m^2}\frac{Z}{1+(p^2-m^2)\Sigma_r}
\end{aligned}
$$

$Z\Sigma_1=\Sigma_r$ としていて、Z によって発散量 Σ_1 を有限な量 Σ_r にすることができます。場の繰り込み定数 Z については相殺項の方法で見たほうが分かりやすいので、そっちでもう一度触れます。

これ以降は場のくり込み定数を Z_ϕ と書きます。(2) を逆にたどって行けば、質量を m_1 にした 2 点相関関数 $G^{(2)}(p)$ に Z_ϕ^{-1} がかかることで発散がなくなっているように見えるので (もっと単純な見方を補足 1 でしています)

$$
G_r^{(2)}(p)=Z_\phi^{-1}(\lambda_1,m_1,\mu)G^{(2)}(p,m_1,\mu)
$$

$$
\Gamma_r^{(2)}=Z_\phi(\lambda_1,m_1,\mu)\Gamma^{(2)}(p,m_1,\mu)
$$

$\Gamma^{(2)}$ が質量のくり込みで処理できなかった発散を持ち、Z_ϕ をかけることでそれが除去できた $\Gamma_r^{(2)}$ となります。つまり、場のくり込み (波動関数のくり込み) によって 2 ループで生じる質量のくり込みでは消せない発散をなくすことが出来ます。そうすると、2 ループからの寄与によって 1 ループで導いた質量 m_1 は上の図での発散によって有限な量になっていなく、そのためくり込み条件と Z_ϕ によって

$$
-\Gamma_r^{(2)}(p=0)=m_r^2=-Z_\phi\Gamma^{(2)}(p=0)=Z_\phi m_1^2
$$

なので 2 ループでの寄与によって、また新しく質量 m_1' を作ってやらなくてはならなくて

$$
m_1'^2=Z_\phi m_1^2
$$

このように Z_ϕ を単純にかける形になり、m_1^2 に起こる発散を Z_ϕ によって打ち消させて有限の量にします。このことはそのまま結合定数にも言えて

$$
\Gamma_r^{(4)}=Z_\phi^2\Gamma^{(4)}(p,m_1,\mu)
$$

4 点関数では場の数が 2 個から 4 個になるので、Z_ϕ^2 をかけています。このときのくり込み条件の式は

$$
\Gamma_r^{(4)}(p_i=0)=-i\lambda_1'=Z_\phi^2\Gamma^{(4)}(p_i=0)=-iZ_\phi^2\lambda_1
$$

よって

$$
\lambda_1'=Z_\phi^2\lambda_1
$$

というわけで、2 ループでも上手に処理すれば有限にできます。2 ループから場のくり込みを入れたのは、1 ループに対しては場のくり込みは何の寄与も与えず必要のないものだったからです。というわけで結局 n 点関数に対するくり込みは、

$$\Gamma_r^{(n)}(p_i, m_1', \lambda_1', \mu) = Z_\phi^{n/2}(\lambda, \mu)\Gamma^{(n)}(p_i, m, \lambda)$$

この方法で発散をなくすのは 1 ループではそれほど面倒ではないんですが、もっと複雑な状況になると明らかに面倒になってきます。特に場のくり込みがどうなっているのかよく分からないのが厄介です。

次に相殺項 (counter term) による方法をみていきます。この相殺項による方法は上でみたやり方より多く用いられていますし、状況が把握しやすいです。最初に、有限な質量 m_r、結合定数 λ_r によって構成される 4 次元でのラグランジアン

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_r^2\phi^2 - \frac{\lambda_r}{4!}\phi^4$$

を作ります。これから、同じようにファインマン図の計算を行ったとします。そうしたら当然、発散項は出てきてしまいます。すでに有限な質量、結合定数にしているので、発散を取り込ませることは出来ません。なので、発散項を消すようにラグランジアンをいじります。

最初に計算した 1 ループでの伝播関数の発散項として

$$\frac{i\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon} + finite$$

というものが出てきましたが、今の場合でも当然出てきます (m_r, λ_r に置き換わって)。すでに、物理的な質量を使っているので質量にくり込むことはできません。なので、これを打ち消すためにラグランジアン自体に新しい項を相互作用項として付け加えてしまいます

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda m_r^2}{32\pi^2\epsilon}\phi^2 = -\frac{\delta m^2}{2}\phi^2$$

この項をラグランジアンに加えることで何が起きるのか計算してみます。行う計算の概観を簡単に示せば、Z_0 が相互作用なしの生成汎関数だとすることで (λ が 1 次のオーダまでだとして)

$$\begin{aligned} Z_{full}[J] &= (1 + \mathcal{L}_{int}[\delta/i\delta J])Z_0[J] \\ &= (1 + \mathcal{L}_0^{int}[\delta/i\delta J] + \delta\mathcal{L}_1[\delta/i\delta J] + \delta\mathcal{L}_2[\delta/i\delta J] + \cdots)Z_0[J] \\ &= Z[J] + Z_1[J] + Z_2[J] + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

ラグランジアン密度にかかっている積分は外して書いています。$\mathcal{L}_0^{int}$ が元のラグランジアンにいる相互作用項で、$\delta\mathcal{L}_1, \delta\mathcal{L}_2 \cdots$ が相殺項です。

$\delta\mathcal{L}_1$ を加えたラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_r^2\phi^2 - \frac{\lambda_r}{4!}\phi^4 - \frac{\delta m^2}{2}\phi^2$$

δm^2 の項は相互作用項として導入するので、相互作用のない生成汎関数に汎関数微分するように外に取り出します。なので、ϕ^4 理論の経路積分の途中計算で出てくる ϕ^2 で計算を止めてやればよくて、そうすると δm^2 の項だけをひっぱてくると

$$\exp\left[i\int d^4z \frac{-\delta m^2}{2}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2\right] = 1 - \frac{i\delta m^2}{2}\int d^4z \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2 + \cdots$$

第一項の 1 は相互作用のない生成汎関数 Z_0 を作るだけです。これを、相互作用のない生成汎関数 Z_0 の

$$\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]$$

に作用させたものは

$$-\frac{i\delta m^2}{2}\int d^4z(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J})^2\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]$$
$$=-\frac{i\delta m^2}{2}\left\{i\int d^4z\Delta_F(z-z)+\int d^4z\left(\int d^4x\Delta_F(z-x)J(x)\right)^2\right\}\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]$$

そして、分母は

$$\left(1-\frac{i\delta m^2}{2}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2\right)\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]\Big|_{J=0}$$

なので、分子で生き残るのは

$$-\frac{i\delta m^2}{2}i\int d^4z\Delta_F(z-z)$$

よって、この相殺項による生成汎関数 Z_1 は (ここでは Z_0 を作る 1 を含めています)

$$Z_1=\left\{1-\frac{i\delta m^2}{2}\int d^4z\left(\int d^4x\Delta_F(z-x)J(x)\right)^2\right\}\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]$$

２点関数を求めるには後はこれを 2 回汎関数微分すればいいので、$i\lambda m^2/32\pi^2\epsilon$ の項では ($i\lambda m^2/32\pi^2\epsilon$ を除いています)

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(\ )=-2\left(\int d^4x\Delta_F(z-x)J(x)\right)\Delta_F(z-x_1)\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]$$
$$-i\left\{\left(\int d^4x\Delta_F(z-x)J(x)\right)^2\right\}\int d^4xd^4y\ \delta(x-x_1)\Delta_F(x-y)J(y)$$
$$\times\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x_2)\delta J(x_1)}(\ )|_{J=0}=-2\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_1)$$

よって、

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z_1}{\delta J\delta J}=D(x_1,x_2)=i\Delta_F(x_1-x_2)+i\delta m^2\int d^4z\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_1)$$

ラグランジアンに加えた項によって、通常の ϕ^4 理論の 2 点関数に対してこれの第二項が付加されます。相互作用ありのクライン・ゴルドン場のところで触れた自己エネルギーの出し方と同じように、フーリエ変換を使い

$$
\begin{aligned}
D(x_1,x_2) &= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2}+i\delta m^2\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2-m_r^2)^2}\\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2}(1+\delta m^2\frac{1}{p^2-m_r^2})\\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2}(1-\delta m^2\frac{1}{p^2-m_r^2})^{-1}\\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2-\delta m^2}
\end{aligned}
$$

自己エネルギーも含めれば

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}(x_1,x_2) &= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2-\Sigma-\delta m^2}\\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2-\frac{i\lambda_r}{2}\Delta_F(z-z)-\delta m^2}\\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2-\frac{i\lambda_r}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-m_r^2}-\delta m^2}\\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2+\frac{\lambda_r m_r^2}{16\pi^2\epsilon}-\delta m^2}\\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2+\frac{\lambda_r m_r^2}{16\pi^2\epsilon}-\frac{\lambda_r m_r^2}{16\pi^2\epsilon}}\\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_r^2}
\end{aligned}
$$

有限項は無視しています。

よって、厳密な 2 点相関関数の形 (今は 1 ループ近似)

$$
G^{(2)}(p)=((G_0^{(2)})^{-1}-\frac{\Sigma}{i})^{-1}
$$

$$
(G_0^{(2)}=\frac{i}{p^2-m_r^2}\ ,\ \frac{\Sigma}{i}=\frac{i\lambda_r m_r^2}{16\pi^2\epsilon}+finite)
$$

に新しく δm^2 の効果が加わることが分かるので

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}(p) &= ((G_0^{(2)})^{-1}-\frac{\Sigma}{i}+\frac{i\lambda_r m_r^2}{16\pi^2\epsilon})^{-1}\\
&= \big[(G_0^{(2)})^{-1}-(\frac{i\lambda_r m_r^2}{16\pi^2\epsilon}+finite)+\frac{i\lambda m_r^2}{16\pi^2\epsilon}\big]^{-1}\\
&= \frac{i}{p^2-m_r^2}+finite
\end{aligned}
$$

このように付け加えられます (有限項は新しく加えた項に任意の発散しない定数を加えればどうとでもできます)。というわけで、相互作用のない伝播関数の形になります。ここで m_r^2 は最初から有限な質量としているのでどこにも変な項はありません。このように発散を除去するようにラグランジアンに加える項のことを相殺項 (counter term) と言います。この相殺項は、最初にまき戻ると、自己エネルギーの計算に対して

$$\frac{1}{2}(-i\lambda)\mu^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{i}{p^2-m^2}-\delta m^2$$

このように加わります。これを見れば相殺項による部分をファインマン図に加えることができることがわかると思いますが、2 ループで生じる場のくり込みの影響も一緒にしたいので、後でそれには触れます。

相互作用として相殺項を導入することで、自己エネルギーに直接寄与するようにできました。このようにつけ加えた項は、自己エネルギーにしか寄与しません。言い換えれば、ϕ^2 の項を加えることは質量を動かすように働くので、それ以外のところで害を起こさないということです。上での計算のさらに簡易版でこのことをもう一度見ておきます。スカラー場のラグランジアン

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2$$

で第二項が相互作用項だとして同じことをしてみれば (伝播関数 $i\Delta$ は質量を 0 にしたものになります)

$$G^{(2)}=i\Delta(x_1-x_2)+im^2\int d^4z\Delta(z-x_1)\Delta(z-x_2)+\cdots$$

これを運動量表示でみれば

$$\begin{aligned}G^{(2)}(p) &= \frac{i}{p^2}+\frac{1}{p^2}im^2\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2}im^2\frac{1}{p^2}im^2\frac{1}{p^2}+\cdots\\ &= \frac{i}{p^2-m^2}\end{aligned}$$

この結果から分かるように、相互作用として扱った ϕ^2 の項は、伝播関数において質量部分作っています。これは QED なんかでも同じなので、質量に対する相殺項 (場の二乗による項) の影響は自己エネルギー部分に直接いきます。

同じように結合定数に対しても相殺項を加えます。相殺項を入れる前での 4 点頂点関数は

$$\begin{aligned}\Gamma_0^{(4)} &= -i\lambda_r+\frac{3i\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon}-\frac{i\lambda_r^2}{32\pi^2}\big(3\gamma+F(s,m_r,\mu)+F(t,m_r,\mu)+F(u,m_r,\mu)\big)\\ &= -i\lambda_r+\frac{3i\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon}+finite\end{aligned}$$

今度も相互作用項として相殺項を加えます。そうすると

$$\delta\mathcal{L}_2=-\frac{1}{4!}\frac{3\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon}\phi^4$$

このような形を考えます。(2) からも分かるように、これは単純に通常の 4 点関数の係数が変わっているだけでしかないので、ϕ^4 理論での 4 点関数の式がそのまま使えて

$$-i\frac{3\lambda_r^2\mu^\epsilon}{16\pi^2\epsilon}\int d^4z\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(z-x_4)$$

よって、相殺項を加えたラグランジアンから導かれる $\Gamma^{(4)}$ は

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4)}(p_i) &= -i\lambda_r+\frac{3i\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon}+finite+(-i\frac{3\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon}+finite_2)\\ &= -i\lambda_r+finite\end{aligned}$$

となります。4 点関数では $finite$ 部分に外線運動量がいるためにくり込み条件に引っかかります。相殺項での $finite_2$ は、くり込み条件

$$\Gamma^{(4)}(0) = -i\lambda_r \quad (s = t = u = 0)$$

を満たさせるように決めます。つまり、相殺項を δ_λ とすれば

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(4)}(p_i) &= -i\lambda_r + \frac{3i\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon} - \frac{i\lambda_r^2}{32\pi^2}\big(3\gamma + F(s,m_r,\mu) + F(t,m_r,\mu) + F(u,m_r,\mu)\big) - \delta_\lambda \\
&= -i\lambda_r + \frac{3i\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon} - \frac{i\lambda_r^2}{32\pi^2}\big(3\gamma + F(s,m_r,\mu) + F(t,m_r,\mu) + F(u,m_r,\mu)\big) \\
&\qquad - \Big(\frac{3i\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon} - \frac{i\lambda_r^2}{32\pi^2}\big(3\gamma + F(0,m_r,\mu) + F(0,m_r,\mu) + F(0,m_r,\mu)\big)\Big) \\
&= -i\lambda_r - \frac{i\lambda_r^2}{32\pi^2}\big(F(s,m_r,\mu) + F(t,m_r,\mu) + F(u,m_r,\mu) - F(0,m_r,\mu) - F(0,m_r,\mu) - F(0,m_r,\mu)\big)
\end{aligned}$$

このようになっていなければならないので、相殺項の $finite_2$ は

$$\delta_\lambda = \frac{3i\lambda_r^2}{16\pi^2\epsilon} - \frac{i\lambda_r^2}{32\pi^2}(3\gamma + F(0,m_r,\mu) + F(0,m_r,\mu) + F(0,m_r,\mu))$$

となっていることがわかります。
　さらに、$\Gamma^{(2)}$ の 2 ループの発散に対しては場へのくり込みが必要だったことに対応して、

$$\delta\mathcal{L}_3 = \frac{A}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r \quad (1 + A = Z_\phi)$$

このような項を相殺項として加えて、相互作用のように扱います。これに伴ってラグランジアンの ϕ も ϕ_r と書き換えられているとします。A は

$$\Gamma^{(2)}(p) = (p^2 - m^2) - \frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}(p^2 - m^2) + (p^2 - m^2)^2\Sigma_1$$

において、場のくり込み定数 Z_ϕ が

$$Z_\phi - 1 = \frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}$$

であることから

$$\Gamma^{(2)}(p) = (p^2 - m^2) - (Z_\phi - 1)(p^2 - m^2) + (p^2 - m^2)^2\Sigma_1$$

になり、この Z_ϕ による項を消すように導入されます。次に出てくるくり込み定数を使ったラグランジアンの $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ と m^2 の項を見てみれば分かると思います。
　これで全ての相殺項が揃ったので、相殺項を含めたラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1+A}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{(m_r^2+\delta m^2)}{2}\phi_r^2 - \frac{(1+\delta_\lambda)\lambda_r}{4!}\phi_r^4 \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{1}{4!}\lambda_r\phi_r^4 + \frac{1}{2}A\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}\delta m^2\phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\lambda_r\phi_r^2 \\
&= \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_C
\end{aligned} \tag{3}
$$

後ろの 3 つの項が相殺項による部分で、ここで出てきている質量 m_r、結合定数 λ_r は全て有限な量で、元のラグランジアンと同じ格好です。これを生成汎関数のラグランジアン部分に入れて通常通りに源 J で汎関数微分して摂動展開していけば、発散が除去された 2 点関数が求まります (源の項は $J_r\phi_r$ と書いて、J_r で汎関数微分)。

しかし、相殺項を含めたラグランジアンが元の計算したいラグランジアンと全く無関係になっていると何を計算しているのか分からなくなってしまいます。なので、$\mathcal{L}$ は元のラグランジアン $\mathcal{L}_0$ と同じである必要があります。それをみやすくするために、$A, \delta m^2, \delta_\lambda$ を場、質量、結合定数のくり込み定数 Z_ϕ, Z_m, Z_λ として

$$
Z_\phi = 1 + A\ ,\ Z_m^2 = \frac{m_r^2 + \delta m^2}{m_r^2(1+A)}\ ,\ Z_\lambda = \frac{1+\delta_\lambda}{(1+A)^2} \tag{4}
$$

このように定義しなおします。これによって

$$
\mathcal{L} = \frac{Z_\phi}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - Z_\phi Z_m^2 m_r^2\phi_r^2 - \frac{Z_\lambda\lambda_r}{4!}Z_\phi^2\phi_r^4
$$

そして、

$$
\phi_B = \sqrt{Z_\phi}\phi_r\ ,\ m_B = Z_m m_r\ ,\ \lambda_B = Z_\lambda\lambda_r
$$

このような量を定義します。この式とくり込み定数は発散項を持っていることを踏まえれば、添え字に r がついた有限な量はくり込まれた量、添え字に B がついているのがくり込まれていない裸の量 (bare quantities) と言うことが出来ます。裸の量で $\mathcal{L}$ を書き直すと、ラグランジアンは

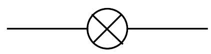
$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_B\partial^\mu\phi_B - m_B^2\phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!}\phi_B^4
$$

となり、相殺項を加えていない元のラグランジアンの形になります。今みてきたのは 2 次までのくり込みなんですが、この形のラグランジアンによって全てのオーダに対して有効になっています。このように相殺項を加えることで各オーダでの発散を全てなくす事ができるときくり込み可能理論となります。

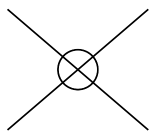
また、Z_ϕ, Z_m, Z_λ を使ったラグランジアンでもくり込まれた量で書き直された部分と相殺項のように分けるなら

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_B\partial^\mu\phi_B - \frac{1}{2}m_B^2\phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!}\phi_B^4 \\
&= \frac{1}{2}Z_\phi\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}Z_\phi Z_m^2 m_r^2\phi_r^2 - Z_\phi^2 Z_\lambda\frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4 \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4 \\
&\qquad + (-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r + \frac{1}{2}Z_\phi\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r) + (\frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{1}{2}Z_\phi Z_m^2 m_r^2\phi_r^2) + (\frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4 - Z_\phi^2 Z_\lambda\frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4 \\
&\qquad + (Z_\phi - 1)\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - (Z_\phi Z_m^2 - 1)\frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - (Z_\phi^2 Z_\lambda - 1)\frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4 \\
&= \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_C
\end{aligned}
$$

このようにと書くこともできます。
相殺項を含めたラグランジアンによってファインマン則に新しく



$= i(p^2A - \delta m^2)$



$= -i\delta_\lambda$

この二つが加わることになります。

・補足 1

2 点相関関数でのくり込みをもう少しみておきます。まず、くり込まれた 2 点相関関数 $G_r^{(2)}$ とくり込まれていない 2 点相関関数 $G^{(2)}$ の関係を調べます。場のくり込み定数を $\phi_B = \sqrt{Z_\phi}\phi_r$ と定義したのに対応して、裸の場の真空期待値として書いた 2 点関数

$$
G^{(2)}(p) = \int d^4x < \Omega|T(\phi_B(x)\phi_B(0))|\Omega > e^{ipx}
$$

はくり込まれた場によって

$$
G^{(2)}(p) = Z_\phi \int d^4x < \Omega|T(\phi_r(x)\phi_r(0))|\Omega > e^{ipx}
$$

と書きかえれます。真空期待値がどのように与えられるのか簡単に見るために、生成汎関数を持ってきます。裸の場による生成汎関数は

$$
Z[J_B; m_B, \lambda_B] = \int \mathcal{D}\phi_B \exp\left[i\int d^4x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_B\partial^\mu\phi_B - m_B^2\phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!}\phi_B^4 + J_B(x)\phi_B(x))\right]
$$

くり込まれた量では

$$Z_r[J_r;m_r,\lambda_r]=\int\mathcal{D}\phi_r\exp\left[i\int d^4x(\frac{1}{2}Z_\phi\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r-Z_\phi Z_m^2m_r^2\phi_r^2-\frac{Z_\lambda\lambda_r}{4!}Z_\phi^2\phi_r^4+J_r(x)\phi_r(x))\right]$$

このとき源 J は $J_B=Z_\phi^{-1/2}J_r$ となります。質量と結合定数がどうなっているのか明確にするために Z の変数の中に入れています。ラグランジアンがどちらも一緒なので

$$Z[J_B;m_B,\lambda_B]=Z_r[J_r;m_r,\lambda_r]$$

となっているはずで、違いは $Z_r[J_r;m_r,\lambda_r]$ が有限になるように式が変形されているだけです。そして、くり込まれた量で書かれた生成汎関数から求められるくり込まれた n 点関数は有限の量になっている必要があります。

生成汎関数から 2 点相関関数をとりだすとき、$Z[J_B;m_B,\lambda_B]$ では裸の量で書かれた通常通りのものが出てくるだけです。$Z_r[J_r;m_r,\lambda_r]$ ではラグランジアン部分を相殺項を分離した

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r-\frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2-\frac{1}{4!}\lambda_r\phi_r^4+\frac{1}{2}A\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r-\frac{1}{2}\delta m^2\phi_r^2-\frac{\delta_\lambda}{4!}\lambda_r\phi_r^2$$

を見ると分かりやすいです。第四項以降が相殺項です。最後の項は 2 点関数ではいらない相殺項なので無視します。第三項までは、通常通りの格好をしているので、単にくり込まれた量での自己エネルギーを含んだ 2 点相関関数の厳密な形を書けばいいだけです。相殺項は分母に入ってくるように作られているので、それを入れ込めばいいです。第四項は新しく出てきたものですが、第一項が 2 点相関関数での分母の p^2 を作っていることを踏まえれば、Ap^2 になるのがすぐに分かります。なので、$G_r^{(2)}(p)$ は

$$G_r^{(2)}(p)=\frac{i}{p^2-m_r^2-\Sigma(p)-\delta m^2+Ap^2+i\epsilon}$$

となります。$\Sigma(p)$ の発散部分を δm^2 と Ap^2 が除去するので

$$G_r^{(2)}(p)=\frac{i}{p^2-m_r^2-\Sigma_{finite}(p)+i\epsilon}$$

どこにも発散部分がないので、有限な量となっています。これを使えば、くり込まれていない 2 点関数をくり込まれた量によって書けて

$$G^{(2)}(p)=\frac{iZ_\phi}{p^2-m_r^2-\Sigma_{finite}(p)+i\epsilon}$$

これは質量殻上のくり込み条件 $\Gamma^{(2)}(p^2=m_r^2)=0$ を課すなら、(2) と同じ格好になります。

ついでに、2 点相関関数の構造から質量だけでなく、場のくり込み定数も必要になる理由も言っておきます。2 点相関関数の分母は $p^2-m^2-\Sigma(p)$ となっています。相殺項は $\Sigma(p)$ の発散を消すように導入し、それに伴って、くり込み定数が出てきます。この $\Sigma(p)$ のローレンツ不変性を壊さない一般的な形としては、$p^2f(p)+g(p)$ が考えられます (f,g はスカラーで発散を含んでいる)。この形から発散を取り除くには、$f(p)$ に対する相殺項として $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ の項が、$g(p)$ に対しては質量項が必要になることが分かります。実際に $f(p)\neq 0$ なのかどうかはファインマン図を計算していかなければいけませんが、一般的には場と質量のくり込み定数は自由度として導入されます。

・補足 2

頂点関数がループの数と関連して展開されることを示しておきます。$\hbar$ を 1 にしないで生成汎関数を書くと

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+\hbar J(x)\phi(x))\right] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,(\mathcal{L}+\hbar J(x)\phi(x))\right] \\
&= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}_{int}\right] Z_0[J] \\
Z_0 &= \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}\int d^4xd^4y\ J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]
\end{aligned}
$$

規格化定数は無視しています。実際に $\hbar$ を消していないラグランジアンから計算していけばこのようになっていることがわかります。経路積分で行ってきた計算を追っていくんですが、汎関数微分は

$$
(\frac{\hbar}{i})^n \frac{\delta}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}
$$

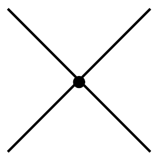
このように $\hbar$ が表われていることに注意します。そうすれば Z_0 の形から伝播関数は $\hbar$ に比例し、Z の形から頂点は $\hbar^{-1}$ に比例していることかがわかります。そうすると n 次の図において、頂点の数を n、内線の数を I、ループの数を L として、全体の図は $\hbar^{I-n}$ を持ちます。そして、くり込み理論のところで出てきたループとの関係から

$$
\hbar^{I-n} = \hbar^{L-1}
$$

さらに connected なものを取り出すには

$$
W[J] = -i\hbar \log Z[J]
$$

とするので、全体に $\hbar$ がかかることになり、$I-n+1=L$。これは $I=0$、$n=1$ の時に、$L=0$ に対応していることがわかります。もっと分かりやすくすれば、4 点関数の図である



この場合、頂点は 1 つなので $\hbar$ は出てこず、ループは 0 です。上での 1 ループの図では、頂点が 2 つ、内線が 2 つ、ループが 1 つで、図は $\hbar$ に比例します。つまり、図は $\hbar$ のループ数のベキで展開されていきます (ループ展開)。そして、古典論は $\hbar \to 0$ に対応するので、ループのない図 (tree diagram) が古典論に表われ、量子論的な効果はループの図によって表われていることを意味します。このように $\hbar$ によって展開されていくために、各オーダでのくり込みが可能になっています。