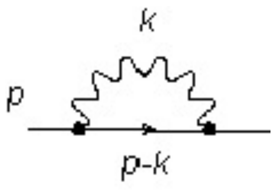
くり込み〜QED〜

QED の発散積分の正則化は Pauli-Villars の方法を QED のところで示しましたが、ここでは次元正則化の方法を使い、相殺項を加えて発散を除去します。相殺項の話は基本的に ϕ^4 理論のときと変わりません。また、QED でのファインマン則は相対論的量子力学〜QED のところにまとめてあるのでそっちを見てください。
補足として Pauli-Villars の正則化でのラグランジアンを載せています。

- 自己エネルギー $\Sigma(p)$



$$
\begin{aligned}
-i\Sigma(p) &= (-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_\mu\frac{i}{\not{p}-\not{k}-m}\gamma_\nu\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \\
&= (-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_\mu\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(\not{p}-\not{k}-m)(\not{p}-\not{k}+m)}\gamma_\nu\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \\
&= (-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma_\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_\nu}{(p-k)^2-m^2}\frac{g^{\mu\nu}}{k^2}
\end{aligned}
$$

これを d 次元にし、次元合わせのための質量パラメータ μ を加えると

$$
-i\Sigma(p) = -\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_\nu}{(p-k)^2-m^2}\frac{g^{\mu\nu}}{k^2}
$$

ファインマンパラメーター

$$
\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx\frac{1}{(xA+(1-x)B)^2}
$$

を使うことで

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma &= -\mu^{4-d}e^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma^\mu}{(p-k)^2-m^2}\frac{1}{k^2} \\
&= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma^\mu}{[((p-k)^2-m^2)x+k^2(1-x)]^2} \\
&= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma^\mu}{[(p^2+k^2-2p\cdot k-m^2)x+k^2(1-x)]^2} \\
&= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\mu(\not{p}-\not{k}+m)\gamma^\mu}{[(p^2-m^2)x+(k-px)^2-p^2x^2)]^2} \\
&= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\mu(\not{p}-\not{p}x-\not{k}'+m)\gamma^\mu}{[k'^2-m^2x+p^2x(1-x)]^2} \quad (k'=k-px)
\end{aligned}
$$

これは k' に対して奇関数になっているので、k' の項は積分すれば 0 になることから

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma(p) &= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\frac{\gamma_\mu(\not{p}-\not{p}x+m)\gamma^\mu}{[k'^2-m^2x+p^2x(1-x)]^2}\\
&= -\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\gamma_\mu(\not{p}-\not{p}x+m)\gamma^\mu\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k'^2-m^2x+p^2x(1-x)]^2}
\end{aligned}
$$

k' 積分は

$$
\int\frac{d^dl_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l_E^2+a)^n}=\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\big(\frac{1}{a}\big)^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}
$$

これを使えばいいです。なので、ウィック回転してユークリッド化し

$$
-i\Sigma(p)=-\mu^{4-d}e^2\int_0^1 dx\gamma_\mu(\not{p}-\not{p}x+m)\gamma^\mu\int\frac{id^dk'_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k'^2_E+m^2x-p^2x(1-x)]^2}
$$

ただし、分母は特異性を持っているので、それをなくすために $p^2<0$ を仮定します。もしくは $p_0=ip_4$ として p もユークリッド化されているとします。これに適用させることで

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma(p) &= \frac{-i\mu^{4-d}e^2\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)}\int_0^1 dx\gamma_\mu(\not{p}-\not{p}x+m)\gamma^\mu\big(\frac{1}{m^2x-p^2x(1-x)}\big)^{2-\frac{d}{2}}\\
&= \frac{-i\mu^{4-d}e^2\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 dx\gamma_\mu(\not{p}-\not{p}x+m)\gamma^\mu\big(-p^2x(1-x)+m^2x\big)^{-2+\frac{d}{2}}
\end{aligned}
$$

次元を 4 次元にすれば、これは明らかにガンマ関数の定義から極を持つことになります。$\epsilon=4-d$ とし、d 次元での γ_μ の関係

$$
\gamma^\mu\gamma_\mu=4-\epsilon\ ,\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu=-(2-\epsilon)\gamma^\nu
$$

から、$\gamma_\mu(\not{p}-\not{p}x+m)\gamma^\mu$ は

$$
\begin{aligned}
\gamma_\mu(p_\nu\gamma^\nu-p_\nu\gamma^\nu x+m)\gamma^\mu &= p_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu-p_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu x+m\gamma_\mu\gamma^\mu\\
&= -(2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu+(2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu x+m(4-\epsilon)
\end{aligned}
$$

これを入れてやって

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma(p) &= \frac{-ie^2(\mu^2)^{\epsilon/2}\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^{-\epsilon/2}(4\pi)^2}\int_0^1 dx(-(2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu+(2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu x+m(4-\epsilon))\big(-p^2x(1-x)+m^2x\big)^{-\frac{\epsilon}{2}}\\
&= \frac{ie^2\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx((2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu-(2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu x-m(4-\epsilon))\big(\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}\big)^{-\frac{\epsilon}{2}}
\end{aligned}
$$

$\Gamma(\frac{\epsilon}{2})$ の $\epsilon \to 0$ の極限をとったものは

$$\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = (\frac{2}{\epsilon} - \gamma \cdots)$$

なので

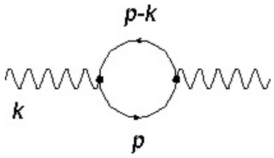
$$\begin{aligned}
&\frac{ie^2}{(4\pi)^2}\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\int_0^1 dx((2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu - (2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu x - m(4-\epsilon))\big(\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}\big)^{-\frac{\epsilon}{2}} \\
&\quad = \frac{ie^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\Big((2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu - (2-\epsilon)p_\nu\gamma^\nu x - m(4-\epsilon)\Big)\Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\Big)\Big(1 - \frac{\epsilon}{2}\log\big[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}\big]\Big) \\
&\quad = \frac{ie^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\Big[\Big\{(\frac{4}{\epsilon} - 2\gamma - 2 + \epsilon\gamma)p_\nu\gamma^\nu \\
&\qquad\qquad - (\frac{4}{\epsilon} - 2\gamma - 2 + \epsilon\gamma p_\nu\gamma^\nu x) - m(\frac{8}{\epsilon} - 4\gamma - 2 + \epsilon\gamma)\Big\}\Big(1 - \frac{\epsilon}{2}\log[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}]\Big)\Big]
\end{aligned}$$

明らかに $\epsilon \to 0$ で消える項は落としていって

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma(p) &= \frac{ie^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\Big[\Big\{(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu \\
&\qquad\qquad -(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu x - m(\frac{8}{\epsilon}-4\gamma-2)\Big\}\Big(1-\frac{\epsilon}{2}\log[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}]\Big)\Big] \\
&= \frac{ie^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\Big[\Big\{(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu-(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu x - m(\frac{8}{\epsilon}-4\gamma-2)\Big\} \\
&\qquad\qquad -\Big\{(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu-(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu x - m(\frac{8}{\epsilon}-4\gamma-2)\Big\}\frac{\epsilon}{2}\log[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}]\Big] \\
&= \frac{ie^2}{(4\pi)^2}\Big[\Big[(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu x-(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu\frac{1}{2}x^2 - m(\frac{8}{\epsilon}x-4\gamma x-2x)\Big]_0^1 \\
&\qquad -\int_0^1 dx\Big\{(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu-(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu x - m(\frac{8}{\epsilon}-4\gamma-2)\Big\}\frac{\epsilon}{2}\log[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}]\Big] \\
&= \frac{ie^2}{(4\pi)^2}\Big[\Big\{(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu-(\frac{4}{\epsilon}-2\gamma-2)p_\nu\gamma^\nu\frac{1}{2} - m(\frac{8}{\epsilon}-4\gamma-2)\Big\} \\
&\qquad -\int_0^1 dx(2p_\nu\gamma^\nu-2p_\nu\gamma^\nu x-4m)\log[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}]\Big] \\
&= \frac{ie^2}{(4\pi)^2}\Big[\Big\{\frac{2}{\epsilon}p_\nu\gamma^\nu-(\gamma+1)p_\nu\gamma^\nu - m(\frac{8}{\epsilon}-4\gamma-2)\Big\} \\
&\qquad -2\int_0^1 dx(p_\nu\gamma^\nu(1-x)-2m)\log[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}]\Big] \\
&= \frac{ie^2}{(4\pi)^2}\Big[\Big\{\frac{2}{\epsilon}(p_\nu\gamma^\nu-4m)-(\gamma+1)p_\nu\gamma^\nu +2m(2\gamma+1)\Big\} \\
&\qquad -2\int_0^1 dx(p_\nu\gamma^\nu(1-x)-2m)\log[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}]\Big] \\
&= \frac{ie^2}{8\pi^2\epsilon}(p_\nu\gamma^\nu-4m)-\frac{ie^2}{(4\pi)^2}\Big\{(\gamma+1)p_\nu\gamma^\nu-2m(2\gamma+1) \\
&\qquad +2\int_0^1 dx(p_\nu\gamma^\nu(1-x)-2m)\log[\frac{-p^2x(1-x)+m^2x}{4\pi\mu^2}]\Big\}
\end{aligned}
$$

見て分かるように極の項 (発散に対応する項) とそうでない項が分離して出てき、第二項が有限項となっています（$p^2<0$）。

- 真空偏極 $\Pi_{\mu\nu}(k)$



$$
\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}(k) &= -(-ie)^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\Big(\gamma_\mu\frac{i}{\not p-m}\gamma_\nu\frac{i}{\not p-\not k-m}\Big)\\
&= -e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\Big(\frac{\gamma_\mu(\not p+m)\gamma_\nu}{p^2-m^2}\frac{\not p-\not k+m}{(p-k)^2-m^2}\Big)\\
&= -e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{tr}[\gamma_\mu(\not p+m)\gamma_\nu(\not p-\not k+m)]}{(p^2-m^2)((p-k)^2-m^2)}
\end{aligned}
$$

４次元から d 次元にして、質量パラメータ μ をいれて

$$
i\Pi_{\mu\nu}(k) = -e^2\mu^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{tr}[\gamma_\mu(\not p+m)\gamma_\nu(\not p-\not k+m)]}{(p^2-m^2)((p-k)^2-m^2)}
$$

これに対してファインマンパラメータを使うと

$$
i\Pi_{\mu\nu}(k) = -e^2\int_0^1 dx\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{tr}[\gamma_\mu(\not p+m)\gamma_\nu(\not p-\not k+m)]}{\big(((p-k)^2-m^2)x+(p^2-m^2)(1-x)\big)^2}
$$

分母は

$$
\begin{aligned}
(p^2-m^2)(1-x)+((p-k)^2-m^2)x &= p^2-m^2-x(p^2-m^2)+((p-k)^2-m^2)x\\
&= p^2-m^2-x(p^2-m^2)+(p^2+k^2-2p\cdot k-m^2)x\\
&= p^2-m^2+(k^2-2p\cdot k)x\\
&= (p-kx)^2-k^2x^2+k^2x-m^2\\
&= (p-kx)^2-m^2+k^2x(1-x)
\end{aligned}
$$

電子の自己エネルギーと同じように $p'=p-kx$ とすれば

$$
i\Pi_{\mu\nu}(k) = -e^2\mu^{4-d}\int_0^1 dx\int\frac{d^dp'}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{tr}[\gamma_\mu(\not p'+\not kx+m)\gamma_\nu(\not p'-\not k(1-x)+m)]}{\big(p'^2-m^2+k^2x(1-x)\big)^2}
$$

分子のトレースは、ガンマ行列の奇数個は消えるということから (p についている $'$ は外します)

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\mu(\not p+\not kx+m)\gamma_\nu(\not p-\not k(1-x)+m)\\
&= \gamma_\mu\not p\gamma_\nu\not p-\gamma_\mu\not p\gamma_\nu\not k(1-x)+\gamma_\mu\not kx\gamma_\nu\not p-\gamma_\mu\not kx\gamma_\nu\not k(1-x)+m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\\
&= p^\alpha p^\beta(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta)-p^\alpha k^\beta(1-x)(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta)+k^\alpha p^\beta x(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta)-k^\alpha k^\beta x(1-x)(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta)+m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\\
&= (p^\alpha p^\beta-p^\alpha k^\beta(1-x)-k^\alpha k^\beta x(1-x))(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta)+m^2\gamma_\mu\gamma_\nu
\end{aligned}
$$

そして、自己エネルギーのところでもそうだったように、p^μ を１個だけ含む項は積分によって消えるので、分子は結局

$$(p^\alpha p^\beta - k^\alpha k^\beta x(1-x))\mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta] + m^2\mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu]$$

d 次元ガンマ行列のトレースは

$$\mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = f(d)g_{\mu\nu}\ ,\ \mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda] = f(d)(g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})$$

$f(d)$ は $f(4)=4$ となっているとします。これを使って

$$\begin{aligned}
&(p^\alpha p^\beta - k^\alpha k^\beta x(1-x))\mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta] + m^2\mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu] \\
&\quad = f(d)(p^\alpha p^\beta - k^\alpha k^\beta x(1-x))(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}) + f(d)m^2 g_{\mu\nu} \\
&\quad = f(d)((p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p\cdot p + p_\nu p_\mu) - (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k\cdot k + k_\nu k_\mu)x(1-x) + g_{\mu\nu}m^2) \\
&\quad = f(d)((2p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2) - (2k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)x(1-x) + g_{\mu\nu}m^2)
\end{aligned}$$

さらに、次で見やすくするために

$$\begin{aligned}
&f(d)(2p_\mu p_\nu - 2(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)x(1-x) - g_{\mu\nu}k^2 x(1-x) - g_{\mu\nu}p^2 + g_{\mu\nu}m^2) \\
&\quad = f(d)(2p_\mu p_\nu - 2(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)x(1-x) - g_{\mu\nu}(p^2 - m^2 + k^2 x(1-x)))
\end{aligned}$$

このように変形させれば、$i\Pi_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}(k) &= -e^2\mu^{4-d}f(d)\int_0^1 dx\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\Big(\frac{2p_\mu p_\nu}{(p^2-m^2+k^2x(1-x))^2} - \frac{2(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(p^2-m^2+k^2x(1-x))^2} - \frac{g_{\mu\nu}(p^2-m^2+k^2x(1-x))}{(p^2-m^2+k^2x(1-x))^2}\Big) \\
&= -e^2\mu^{4-d}f(d)\int_0^1 dx\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\Big(\frac{2p_\mu p_\nu}{(p^2-m^2+k^2x(1-x))^2} - \frac{2(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(p^2-m^2+k^2x(1-x))^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{p^2-m^2+k^2x(1-x)}\Big)
\end{aligned}$$

第一項は、次元正則化のところでの結果を使えば

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{2g_{\mu\nu}}{d}\frac{d}{2}(\frac{1}{a})^{2-\frac{d}{2}-1}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(2)} = \frac{g_{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}}(\frac{1}{a})^{1-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}$$

$$(p_\mu p_\nu = \frac{g_{\mu\nu}p^2}{d})$$

このような形になり、第三項は

$$\frac{g_{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}}(\frac{1}{a})^{1-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(1)}$$

$\Gamma(2)$ は $\Gamma(1)$ と同じ結果になるので、第一項と第三項は打ち消しあっていることが分かります。というわけで、第二項を見ていきます。

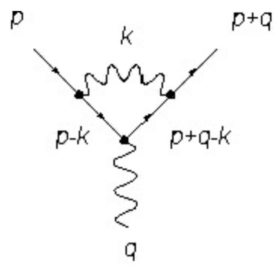
$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}(k) &= 2e^2\mu^{4-d}f(d)\int_0^1 dx\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(p^2-m^2+k^2x(1-x))^2}\\
&= 2ie^2\mu^{4-d}f(d)\int_0^1 dx\int\frac{d^dp_E}{(2\pi)^d}\frac{(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(p_E^2+m^2-k^2x(1-x))^2}\\
&= 2ie^2\mu^{4-d}f(d)\int_0^1 dx\frac{(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(4\pi)^{d/2}}\Big(\frac{1}{-k^2x(1-x)+m^2}\Big)^{2-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}
\end{aligned}$$

$\epsilon=4-d$ を使って、$\epsilon\to 0$ の極限をとれば

$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu} &= 2ie^2(\mu^2)^{\epsilon/2}f(d)\int_0^1 dx\frac{(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(4\pi)^{-\epsilon/2}(4\pi)^2}(\frac{1}{-k^2x(1-x)+m^2})^{\epsilon/2}\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\\
&= 2ie^2f(d)\int_0^1 dx\frac{(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(4\pi)^2}(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2x(1-x)+m^2})^{\epsilon/2}\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\\
&= 2ie^2f(4)\int_0^1 dx\frac{(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(4\pi)^2}(1-\frac{\epsilon}{2}\log[\frac{-k^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}])(\frac{2}{\epsilon}-\gamma\cdots)\\
&= 2ie^2f(4)\int_0^1 dx\frac{(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)}{(4\pi)^2}\Big(\frac{2}{\epsilon}-\gamma-\log[\frac{-k^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}]\Big)\\
&= \frac{2ie^2f(4)}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\Big(\frac{2}{\epsilon}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)-\gamma(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)\\
&\qquad -(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)\log[\frac{-k^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}]\Big)\\
&= \frac{2ie^2f(4)}{(4\pi)^2}\Big([\frac{2}{\epsilon}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)-\gamma(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)]_0^1\\
&\qquad -\int_0^1 dx(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)x(1-x)\log[\frac{-k^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}]\Big)\\
&= \frac{2ie^2f(4)}{(4\pi)^2}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\Big(\frac{1}{3\epsilon}-\frac{\gamma}{6}-\int_0^1 dx\ x(1-x)\log[\frac{-k^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}]\Big)\\
&= \frac{ie^2}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\Big(\frac{1}{3\epsilon}-\frac{\gamma}{6}-\int_0^1 dx\ x(1-x)\log[\frac{-k^2x(1-x)+m^2}{4\pi\mu^2}]\Big)
\end{aligned}$$

ここでも有限部分と極を持った項がちゃんと分離されて出てきています。

- 頂点補正 $\Gamma_\mu(p,q,p+q)$



$$
\begin{aligned}
-ie\Gamma_\mu(p,q,p+q) &= (-ie)^3\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_\alpha\frac{i}{\not p+\not q-\not k-m}\gamma_\mu\frac{i}{\not p-\not k-m}\gamma_\beta\frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2}\\
&= i(-ie)^3\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_\alpha\frac{\not p+\not q-\not k+m}{(p+q-k)^2-m^2}\gamma_\mu\frac{\not p-\not k+m}{(p-k)^2-m^2}\gamma_\beta\frac{g^{\alpha\beta}}{k^2}\\
&= -e^3\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{g^{\alpha\beta}\gamma_\alpha(\not p'-\not k+m)\gamma_\mu(\not p-\not k+m)\gamma_\beta}{k^2\big((p'-k)^2-m^2\big)\big((p-k)^2-m^2\big)}\qquad(p'=p+q)
\end{aligned}
$$

左辺の $-ie$ は最低次での頂点 $-ie\gamma_\mu$ に合わせるために付けています。d 次元にして質量パラメータを加え

$$
-ie\mu^{2-d/2}\Gamma_\mu(p,q,p')=-(e\mu^{2-d/2})^3\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{g^{\alpha\beta}\gamma_\alpha(\not p'-\not k+m)\gamma_\mu(\not p-\not k+m)\gamma_\beta}{k^2\big((p'-k)^2-m^2\big)\big((p-k)^2-m^2\big)}
$$

ここでは 3 つの場合でのファインマンパラメータ

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{A_1A_2A_3} &= \int_0^1 dx_1dx_2dx_3\delta\big(x_1+x_2+x_3-1\big)\frac{2!}{(x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3)^3}\\
&= \int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}dx_3\frac{2}{((1-x_2-x_3)A_1+x_2A_2+x_3A_3)^3}
\end{aligned}
$$

より、分母は

$$
k^2(1-x-y)+x(p'^2+k^2-2p'\cdot k-m^2)+y(p^2+k^2-2p\cdot k-m^2)
$$

$$
=k^2-k^2x-k^2y+p'^2x+k^2x-2p'\cdot kx+p^2y+k^2y-2p\cdot ky
$$

$$
=k^2-m^2(x+y)-2k\cdot(p'x+py)+p'^2x+p^2y
$$

$$
=(k-p'x-py)^2-p'^2x^2-p^2y^2-2p\cdot p'xy+p'^2x+p^2y-m^2(x+y)
$$

$$
=(k-p'x-py)^2+p'^2x(1-x)+p^2y(1-y)-2p\cdot p'xy-m^2(x+y)
$$

$k'=k-p'x-py$ として

$$-ie\mu^{2-d/2}\Gamma_\mu(p,q,p') = -(e\mu^{2-d/2})^3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}$$

$$\frac{2g^{\alpha\beta}\gamma_\alpha(\not{p}'(1-x)-\not{p}y-\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{p}(1-y)-\not{p}'y-\not{k}+m)\gamma_\beta}{\big(k'^2+p'^2x(1-x)+p^2y(1-y)-2p\cdot p'xy-m^2(x+y)\big)^3}$$

$$\Gamma_\mu(p,q,p') = -2i(e\mu^{2-d/2})^2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}$$

$$\frac{g^{\alpha\beta}\gamma_\alpha(\not{p}'(1-x)-\not{p}y-\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{p}(1-y)-\not{p}'y-\not{k}+m)\gamma_\beta}{\big(k'^2+p'^2x(1-x)+p^2y(1-y)-2p\cdot p'xy-m^2(x+y)\big)^3}$$

分子は

$$\begin{aligned}
&g^{\alpha\beta}\gamma_\alpha(\not{p}'(1-x)-\not{p}y-\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{p}(1-y)-\not{p}'y-\not{k}+m)\gamma_\beta\\
&\quad=\gamma^\alpha(\not{p}'(1-x)-\not{p}y-\not{k}'+m)\gamma_\mu(\not{p}(1-y)-\not{p}'y-\not{k}+m)\gamma_\alpha\\
&\quad=\gamma^\alpha\not{p}'(1-x)\gamma_\mu\not{p}(1-y)\gamma_\alpha-\gamma^\alpha\not{p}'(1-x)\gamma_\mu\not{p}'y\gamma_\alpha-\gamma^\alpha\not{p}'(1-x)\gamma_\mu\not{k}\gamma_\alpha\\
&\qquad\quad+\gamma^\alpha\not{p}'(1-x)\gamma_\mu\gamma_\alpha m-\gamma^\alpha\not{k}\gamma_\mu\not{p}(1-y)\gamma_\alpha+\gamma^\alpha\not{k}\gamma_\mu\not{p}'y\gamma_\alpha\\
&\qquad\quad+\gamma^\alpha\not{k}\gamma_\mu\not{k}\gamma_\alpha-\gamma^\alpha\not{k}\gamma_\mu\gamma_\alpha m+m\gamma^\alpha\gamma_\mu\not{p}(1-y)\gamma_\alpha\\
&\qquad\quad-m\gamma^\alpha\gamma_\mu\not{p}'y\gamma_\alpha-m\gamma^\alpha\gamma_\mu\not{k}\gamma_\alpha+m^2\gamma^\alpha\gamma_\mu\gamma_\alpha
\end{aligned}$$

この中で k_μ が単独でいる項は積分で落ちます。そうすると、$k_\mu k_\nu$ を持つ項と k_μ を含まない項の 2 つに分けられます。まず、$k_\mu k_\nu$ を含む項は

$$\gamma^\alpha\not{k}\gamma_\mu\not{k}\gamma_\alpha=\frac{k^2\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\alpha}{d}\qquad(k_\rho k_\lambda\Rightarrow\frac{g_{\rho\lambda}k^2}{d})$$

ガンマ行列 5 個での関係は

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu=(2-d)\gamma_\nu\ ,\ \{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2g_{\mu\nu}$$

から 4 個の場合が

$$\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu=-\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma^\mu+2g_{\rho\mu}\gamma_\nu\gamma^\mu=(2-d)\gamma_\rho\gamma_\nu$$

と求まり、そして 5 個の場合が

$$
\begin{aligned}
-\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma^\mu+2g_{\rho\mu}\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma^\mu &= \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma^\mu-2g_{\lambda\mu}\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma^\mu+2g_{\rho\mu}\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma^\mu=(2-d)\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu \\
\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma^\mu &= (2-d)\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu+2g_{\lambda\mu}\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma^\mu-2g_{\rho\mu}\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma^\mu \\
&= (2-d)\gamma_\lambda\gamma_\rho\gamma_\nu+2\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\lambda-2\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\rho
\end{aligned}
$$

と求まります。そうすると $\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\alpha$ は

$$
\begin{aligned}
\gamma_\alpha\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\alpha &= (2-d)\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu \\
&= (2-d)(2g_{\mu\nu}-\gamma_\mu\gamma_\nu)\gamma^\nu \\
&= (2-d)(2\gamma_\mu-d\gamma_\mu) \\
&= (2-d)^2\gamma_\mu
\end{aligned}
$$

そして、k^2 の項に対して k の積分を実行すると

$$
\begin{aligned}
&2(e\mu^{2-d/2})^2\frac{1}{d}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int\frac{d^dk_E}{(2\pi)^d}\frac{k_E^2(2-d)^2\gamma_\mu}{(k_E^2-p'^2x(1-x)-p^2y(1-y)+2p\cdot p'xy+m^2(x+y))^3} \\
&=(e\mu^{2-d/2})^2\frac{(2-d)^2\gamma_\mu}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\Big(\frac{1}{-p'^2x(1-x)-p^2y(1-y)+2p\cdot p'xy+m^2(x+y)}\Big)^{2-\frac{d}{2}} \\
&=e^2(\mu^2)^{\epsilon/2}\frac{(2-d)^2\gamma_\mu}{(4\pi)^{-\epsilon/2}(4\pi)^2}\frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(3)}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\Big(\frac{1}{-p'^2x(1-x)-p^2y(1-y)+2p\cdot p'xy+m^2(x+y)}\Big)^{\frac{\epsilon}{2}} \\
&=e^2d\frac{(2-d)^2\gamma_\mu}{(4\pi)^2\Gamma(3)}\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\Big(\frac{4\pi\mu^2}{-p'^2x(1-x)-p^2y(1-y)+2p\cdot p'xy+m^2(x+y)}\Big)^{\frac{\epsilon}{2}} \\
&=4e^2\frac{\gamma_\mu}{(4\pi)^2\Gamma(3)}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy(1-\frac{\epsilon}{2}\log[\frac{-p'^2x(1-x)-p^2y(1-y)+2p\cdot p'xy+m^2(x+y)}{4\pi\mu^2}])(\frac{2}{\epsilon}-\gamma\cdots) \\
&=4e^2\frac{\gamma_\mu}{(4\pi)^2\Gamma(3)}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\Big(\frac{2}{\epsilon}-\gamma-\log[\frac{-p'^2x(1-x)-p^2y(1-y)+2p\cdot p'xy+m^2(x+y)}{4\pi\mu^2}]\Big)
\end{aligned}
$$

というわけで、極を持っている項は

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{(pole)}(p,q,p') &= 4e^2\frac{\gamma_\mu}{(4\pi)^2\Gamma(3)}\frac{2}{\epsilon}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy \\
&= 4e^2\frac{\gamma_\mu}{(4\pi)^2\Gamma(3)}\frac{2}{\epsilon}\int_0^1dx(1-x) \\
&= e^2\frac{8\gamma_\mu}{(4\pi)^22}\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{2}\qquad(\Gamma(3)=2) \\
&= \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\gamma_\mu
\end{aligned}
$$

残りの k_μ を含んでいない項の積分は

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2+a)^3} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (\frac{1}{a})^{3-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)}$$

これを使えばよく、見て分かるように $d \to 4$ でそのまま極を持たない有限項となります。というわけで

$$\frac{-e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\gamma^\alpha(\not{p}'(1-x)-\not{p}y+m)\gamma_\mu(\not{p}(1-y)-\not{p}'y+m)\gamma_\alpha}{-p'^2x(1-x)-p^2y(1-y)+2p\cdot p'xy+m^2(x+y)}$$

このような形になります。これと $k_\mu k_\nu$ での極を含まない項を足したものが有限項となります。

これで QED での発散する 3 つの図を次元正則化によって計算し終わったことになります。次に相殺項によって発散項を除去します。除去するためにくり込み条件が必要になりますが、面倒なので有限項は無視して、発散項だけを消すようにします (MS スキーム。「くり込み群方程式」を見てください)。

求まった自己エネルギー、真空偏極、頂点補正は

$$\Sigma(p) = \frac{-e^2}{8\pi^2\epsilon}(\not{p}-4m) + finite$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2) + finite$$

$$\Gamma_\mu(p,q,p+q) = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\gamma_\mu + finite$$

ちなみに、自己エネルギー $\Sigma(p)$ と頂点関数 Γ_μ はワード・高橋恒等式のところで求めたようにワード恒等式として

$$\Gamma_\mu(p,0,p) = -\frac{\partial\Sigma}{\partial p^\mu}$$

という関係を持っていますが、ここで求めた発散項はこれを再現してくれています。一つ注意として、ここで求められた自己エネルギーと頂点関数はランダウゲージを取ることで変わります (「補足：ゲージパラメータを固定しない場合」参照)。

ここから場 ψ, A_μ、質量 m、結合定数 e はくり込まれた量、添え字として B がついたものは裸の寮だとします。

自己エネルギーから見ていきます。電子の今見てきた 1 次の寄与までを含めた伝播関数を $iS_F(p)$、最低次の伝播関数を iS_0 とすれば、「自己エネルギーと頂点関数」のところで見たように

$$\Gamma^{(2)}(p) = S_F^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - \Sigma(p)$$

このようになっています ($\Gamma^{(2)}(p)$ は 1 粒子既約の 2 点頂点関数です)。この $\Sigma(p)$ にいる発散項を消すようにラグランジアン密度に相殺項を加えます。ここで ϕ^4 と違って面倒なのは

$$\begin{aligned} S_F^{-1}(p) &= \not{p} - m + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(\not{p}-4m) \\ &= \not{p}(1+\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}) - m(1+\frac{e^2}{2\pi^2\epsilon}) \end{aligned}$$

となっているために、p と m に関する相殺項が別々に必要になっていることです (ローレンツ不変性を壊さない Σ の一般形は $f(p)\not{p} + g(p)$)。つまり、単純に新しく $\overline{\psi}\psi$ による質量項を加えるだけではダメです。なので、$\not{p}$ に対応するのは $\overline{\psi}\not{\partial}\psi$ の項であるので、これに関する項も加える、ようは場のくり込みを行うことになります。というわけで相殺項として

$$\mathcal{L}^{ele}_{counter} = iB\overline{\psi}\not{\partial}\psi - A\overline{\psi}\psi$$

こんなのを考えます。これを通常のラグランジアン密度に相互作用項として加えることで電子部分のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}^{ele} = i(1+B)\overline{\psi}\not{\partial}\psi - (m+A)\overline{\psi}\psi$$

となります。「くり込み〜ϕ^4 理論〜」の場合と同じように考えれば、単純に $\not{p}$ に $1+B$ がくっつくだけです。なので、相互作用項としての相殺項を最低次の 2 点関数にくっつけるなら、単に $\not{p}$ から $(1+B)\not{p}$ となって現れるだけです。そして質量項も同じようにして現れるはずです。よって

$$\begin{aligned}
S_F^{-1}(p) &= (1+B)\not{p} - (m+A) + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(\not{p} - 4m) \\
&= \not{p} - m + B\not{p} - A + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(\not{p} - 4m)
\end{aligned}$$

このときに

$$B\not{p} - A + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(\not{p} - 4m) = finite$$

となればいいので

$$A = -\frac{e^2 m}{2\pi^2\epsilon}\ ,\ B = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}$$

そして場のくり込み Z_2 と裸の場 ψ_B は

$$Z_2 = 1 + B = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}$$

$$\psi_B = \sqrt{Z_2}\psi$$

となります。電子の質量へのくり込みは、電子に対する裸のラグランジアン密度

$$\mathcal{L}^{ele}_B = i\overline{\psi}_B\not{\partial}\psi_B - m_B\overline{\psi}_B\psi_B$$

と、相殺項を加えたくり込まれたラグランジアン密度

$$\mathcal{L}^{ele} = i(1+B)\overline{\psi}\not{\partial}\psi - (m+A)\overline{\psi}\psi$$

は等しくしなければいけないので

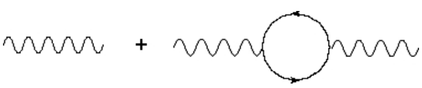
$$
\begin{aligned}
m_B &= Z_2^{-1}(m+A) \\
&= (1-\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon})^{-1}(m-\frac{e^2 m}{2\pi^2\epsilon}) \\
&= (1+\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon})(m-\frac{e^2 m}{2\pi^2\epsilon}) \\
&= m-\frac{e^2}{2\pi^2\epsilon}m+\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}m \\
&= m-\frac{3e^2}{8\pi^2\epsilon}m \\
&= m+\delta m
\end{aligned}
$$

このときに

$$
m+\delta m = Z_m m
$$

として質量のくり込み定数 Z_m を定義します。自己エネルギーの効果は、このように波動関数の再規格化と質量に補正が加わることになります。質量の補正を見ると δm が m に比例していることから、もし質量 0 のラグランジアンから始めたらそのまま質量 0 になることを示していることになります。なので、くり込みによっても、物理的な質量が 0 から有限の値に変わるということが起きません。そして、これは高次のオーダまで考えても 0 のままです。このように質量 0 から始めたら高次まで足していっても質量は 0 のままであるというのが摂動論での結論となっています。これは言い換えると、カイラル対称性 (スピン 1/2 粒子の右手系と左手系の回転に対する対称性) を持った理論は摂動論的に扱う限りカイラル対称性は破れないということを表わしています。そしてこのことは QCD でも同様に導かれます。しかし、現在のクォーク質量の問題や観測されているハドロンの質量スペクトルの問題から、カイラル対称性は自発的に破られていると考えられています。なので、QCD においてこの問題を考える時には摂動論は使えず、非摂動的な扱いを必要とします。その代表的なものは格子場の理論、くり込み群による方法、シュウィンガー・ダイソン方程式です。実際にこれらの方法は質量 0 の理論から出発しても、質量を粒子に持たせることができています。

次に真空偏極を見ていきます。光子の 1 次のオーダまでの 2 点関数 $iD_{\mu\nu}(k)$、最低次を $iD_{0\mu\nu}(k)$ とすれば真空偏極 $\Pi_{\mu\nu}(k)$ を使って



$$
\begin{aligned}
iD_{\mu\nu}(k) &= iD_{0\mu\nu}(k)+iD_{0\mu\alpha}(k)i\Pi^{\alpha\beta}(k)iD_{0\beta\nu}(k) \\
D_{\mu\nu}(k) &= D_{0\mu\nu}(k)-D_{0\mu\alpha}(k)\Pi^{\alpha\beta}(k)D_{0\beta\nu}(k) \\
&= -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}-\frac{g_{\mu\alpha}}{k^2}\Big(\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}(k^\alpha k^\beta-g^{\alpha\beta}k^2)\Big)\frac{g_{\beta\nu}}{k^2} \\
&= -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}-\frac{g_{\mu\alpha}}{k^2}\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}\Big(\frac{g_{\beta\nu}k^\alpha k^\beta}{k^2}-g^{\alpha\beta}g_{\beta\nu}\Big) \\
&= -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}-\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}\Big(\frac{1}{k^2}\frac{g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}k^\alpha k^\beta}{k^2}-g^{\alpha}{}_{\nu}\frac{g_{\mu\alpha}}{k^2}\Big) \\
&= -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}(1-\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon})-\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}\frac{1}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}
\end{aligned}
$$

これの ϵ を含んでいる項を消すように相殺項を入れます。面倒なのが第二項部分がいることです。第一項はファインマンゲージを取ったときの格好なので、それに対応する相殺項を入れればいいだけです。第二項はファインマンゲージを取ると最低次の 2 点関数では出てこない項になっているので、相殺項をひねって加えなければいけません。

ゲージ固定項 (ファインマンゲージでの) も含めた、電磁場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}^{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^{\mu}A_{\mu})^2 = \frac{1}{2}A^{\mu}g_{\mu\nu}\Box A^{\nu}$$

電磁場での伝播関数を求めるにはゲージ固定項を必要として、それがないと定義できませんでした。なので、単純に考えれば、真ん中の式の第一項と第二項に同じ係数をかけたものを相殺項とすればいいように思えます。しかし、上で言ったようにファインマンゲージでは現れない項にも発散部分がいるので、それぞれの係数が違うようにします。なので、相殺項は

$$\mathcal{L}^{EM}_{counter} = -\frac{C}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{E}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2$$

そして相殺項を含めたラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}^{EM} = -(\frac{1+C}{4})F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (\frac{1+E}{2})(\partial^{\mu}A_{\mu})^2$$

これから C と E を決定するために 2 点関数を求めます。やることは「経路積分〜電磁場〜」のところと同じです。このラグランジアンから方程式として

$$-g_{\mu\nu}k^2(1+C) + (C+1-\frac{E+1}{\alpha})k_{\mu}k_{\nu} = -g_{\mu\nu}k^2C_1 + (C_1 - \frac{E_1}{\alpha})k_{\mu}k_{\nu} \quad (C_1 = C+1, E_1 = E+1)$$

これから 2 点関数の形がローレンツ共変な $D_{\mu\nu}(k) = Ak^2g_{\mu\nu} + Bk_{\mu}k_{\nu}$ となるように決めます

$$\begin{aligned}
&(-g_{\mu\nu}k^2C_1 + (C_1 - \frac{E_1}{\alpha})k_{\mu}k_{\nu})(Ak^2g^{\nu\lambda} + Bk^{\nu}k^{\lambda}) \\
&\quad = -g_{\mu\nu}k^2C_1Ak^2g^{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}k^2C_1Bk^{\nu}k^{\lambda} + (C_1 - \frac{E_1}{\alpha})k_{\mu}k_{\nu}Ak^2g^{\nu\lambda} + (C_1 - \frac{E_1}{\alpha})k_{\mu}k_{\nu}Bk^{\nu}k^{\lambda} \\
&\quad = -\delta k^4C_1A - g_{\mu\nu}C_1k^2k^{\nu}k^{\lambda}B + (C_1 - \frac{E_1}{\alpha})k_{\mu}k_{\nu}k^2g^{\nu\lambda}A + (C_1 - \frac{E_1}{\alpha})k_{\mu}k^2k^{\lambda}B \\
&\quad = \delta^{\lambda}_{\mu}
\end{aligned}$$

なので A は

$$A = \frac{-1}{C_1k^4}$$

B は

$$
\begin{aligned}
-g_{\mu\nu}k^2C_1k^\nu k^\lambda B + (C_1-\frac{E_1}{\alpha})k_\mu k_\nu k^2 g^{\nu\lambda}A + (C_1-\frac{E_1}{\alpha})k_\mu k^2 k^\lambda B \\
&= -g_{\mu\nu}k^2C_1k^\nu k^\lambda B + (C_1-\frac{E_1}{\alpha})k_\mu k_\nu \frac{-1}{C_1k^4}k^2 g^{\nu\lambda} + (C_1-\frac{E_1}{\alpha})k_\mu k^2 k^\lambda B \\
&= k_\mu k^\lambda (B(-k^2C_1 + (C_1-\frac{E_1}{\alpha})k^2) + (C_1-\frac{E_1}{\alpha})\frac{-1}{C_1k^4}k^2) \\
B &= -(C_1-\frac{E_1}{\alpha})\frac{-1}{C_1k^2}\frac{1}{-\frac{E_1}{\alpha}k^2} \\
&= -(C_1-\frac{E_1}{\alpha})(\frac{\alpha}{E_1})\frac{1}{C_1k^4} \\
&= -(\frac{\alpha}{E_1}-\frac{1}{C_1})\frac{1}{k^4} = -(\frac{C_1\alpha}{E_1}-1)\frac{1}{C_1k^4}
\end{aligned}
$$

よって最低次での 2 点関数は

$$
D_{0\mu\nu}(k) = \frac{-1}{C_1k^2}\big(g_{\mu\nu} + (\frac{C_1\alpha}{E_1}-1)\frac{1}{k^2}k_\mu k_\nu\big)
$$

これを 1 次まででの 2 点関数 $D_{\mu\nu}$ に入れて

$$
\begin{aligned}
D_{\mu\nu} &= D_{0\mu\nu}(k) - D_{0\mu\alpha}(k)\Pi^{\alpha\beta}(k)D_{0\beta\nu}(k)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}\big(g_{\mu\nu} + (\frac{C_1\alpha}{E_1}-1)\frac{1}{k^2}k_\mu k_\nu\big)\\
&\qquad - \frac{1}{C_1^2k^4}\big(g_{\mu\nu} + (\frac{C_1\alpha}{E_1}-1)\frac{1}{k^2}k_\mu k_\nu\big)\Pi^{\alpha\beta}(k)\big(g_{\mu\nu} + (\frac{C_1\alpha}{E_1}-1)\frac{1}{k^2}k_\mu k_\nu\big)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}\big(g_{\mu\nu} + (\frac{C_1\alpha}{E_1}-1)\frac{1}{k^2}k_\mu k_\nu\big)\\
&\qquad - \frac{1}{C_1^2k^4}\big(g_{\mu\nu} + (\frac{C_1\alpha}{E_1}-1)\frac{1}{k^2}k_\mu k_\nu\big)\Pi^{\alpha\beta}(k)\big(g_{\mu\nu} + (\frac{C_1\alpha}{E_1}-1)\frac{1}{k^2}k_\mu k_\nu\big) \quad (\frac{C_1\alpha}{E_1}-1=X)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu) - \frac{1}{C_1^2k^4}(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu)\Pi^{\alpha\beta}(k)(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu) - \frac{1}{C_1^2k^4}(g_{\mu\alpha} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\alpha)(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta}k^2)\Pi(k^2)(g_{\beta\nu} + \frac{X}{k^2}k_\beta k_\nu) \quad (\Pi^{\alpha\beta} = (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta}k^2)\Pi)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu) - \frac{\Pi(k^2)}{C_1^2k^4}\big(g_{\mu\alpha} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\alpha\big)\big(k^\alpha k_\nu + \frac{X}{k^2}k^\alpha k^2 k_\nu - (g^\alpha_\nu k^2 + \frac{X}{k^2}k^\alpha k_\nu k^2)\big)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu) - \frac{\Pi(k^2)}{C_1^2k^4}\Big((k_\mu k_\nu + \frac{X}{k^2}k_\mu k^2 k_\nu) + (\frac{X}{k^2}k_\mu k^2 k_\nu + \frac{X}{k^2}\frac{X}{k^2}k^4 k_\nu k_\mu)\\
&\qquad\qquad - \big((g_{\mu\nu}k^2 + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu k^2) + (\frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu k^2 + \frac{X}{k^2}\frac{X}{k^2}k^4 k_\nu k_\mu)\big)\Big)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu) - \frac{\Pi(k^2)}{C_1^2k^4}\Big((k_\mu k_\nu + Xk_\mu k_\nu) + (Xk_\mu k_\nu + X^2k_\nu k_\mu)\\
&\qquad\qquad - \big((g_{\mu\nu}k^2 + Xk_\mu k_\nu) + (Xk_\mu k_\nu + X^2k_\nu k_\mu)\big)\Big)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu) - \frac{\Pi(k^2)}{C_1^2k^4}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} + \frac{X}{k^2}k_\mu k_\nu) - \frac{\Pi(k^2)}{C_1^2k^4}k_\mu k_\nu + \frac{\Pi(k^2)g_{\mu\nu}}{C_1^2k^2}\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} - \frac{\Pi(k^2)g_{\mu\nu}}{C_1}) + \Big(\frac{-X}{k^2} - \frac{\Pi(k^2)}{C_1k^2}\Big)\frac{k_\mu k_\nu}{C_1k^2}\\
&= \frac{-1}{C_1k^2}(g_{\mu\nu} - \frac{\Pi(k^2)g_{\mu\nu}}{C_1}) + \Big(\frac{-1}{k^2}(\frac{C_1\alpha}{E_1}-1) - \frac{\Pi(k^2)}{C_1k^2}\Big)\frac{k_\mu k_\nu}{C_1k^2}\\
&= \frac{-1}{k^2}(1-C)(g_{\mu\nu} - Yg_{\mu\nu}(1-C)) + \Big(\frac{-1}{k^2}(1-C)(\frac{(1+C)\alpha}{E_1}-1) - \frac{\Pi(k^2)}{k^2}(1-C)^2\Big)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\
&= \frac{-1}{k^2}(g_{\mu\nu}(1-C) - \Pi(k^2)g_{\mu\nu}(1-C)^2) + \frac{-1}{k^2}\Big((\frac{(1-C^2)\alpha}{E_1} - (1-C)) + \Pi(k^2)(1-C)^2\Big)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここから $\Pi(k^2)$ を消すように C を決めます。$\Pi(k^2)$ は今は e^2 のオーダなので、それを消す C も e^2 のオーダだと考えて C の２次は無視し、第一項は

$$g_{\mu\nu}(1-C) - \Pi(k^2)g_{\mu\nu}(1-C)^2 = g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}C - \Pi(k^2)(g_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}C)$$

これの第二項以降が 0 になればいいので

$$
\begin{aligned}
-C-\Pi(k^2)(1-2C) &= 0 \\
C &= \frac{-\Pi(k^2)}{1-2\Pi(k^2)} = -\Pi(k^2)
\end{aligned}
$$

(1) での第二項

$$
\frac{(1-C^2)\alpha}{E_1} - (1-C)) + \Pi(k^2)(1-C)^2
$$

これがファインマンゲージ $\alpha = 1$ で消えて欲しいので

$$
\frac{1}{E_1} - (1-C) + \Pi(k^2)(1-2C) = 1 - E_1(1-C) + \Pi(k^2)(1-2C)E_1 = 0
$$

これに $C = -\Pi(k^2)$ を入れれば

$$
1 - E_1(1-C) - C(1-2C)E_1 = 1 - E_1(1-C) - CE_1 = 1 - E_1 = 0
$$

なので、$E = 0$ です。つまり、ゲージ固定項に対する相殺項は必要ないことになります。このことはワード・高橋恒等式からも導かれるもので、後で導きます。この計算結果から電磁場へのくり込み定数 Z_3 は

$$
-(\frac{1+C}{4})F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
$$

なので

$$
Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}
$$

となります。電子の自己エネルギーでは質量に補正が入ってきましたが、光子は真空偏極による補正として質量を得るということは起きません。

　最後に頂点補正の相殺項を求めます。これは相互作用項に対して現れるものなので、加える相殺項の形としては

$$
\mathcal{L}^{int}_{counter} = -Ge\mu^{2-d/2}\overline{\psi}\not{A}\psi
$$

$$
\mathcal{L}^{int} = -(1+G)e\mu^{2-d/2}\overline{\psi}\not{A}\psi
$$

相殺項を加えたラグランジアンから頂点を求めるのは単に相殺項による新しい項が出てくるだけなので、頂点補正の発散項を消すには G が

$$
G = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}
$$

であればいいことが分かります。というわけで、ここで現れるくり込み定数 Z_1 は

$$\mathcal{L}^{int} = -Z_1 e\mu^{2-d/2}\overline{\psi}\not{A}\psi$$

$$Z_1 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}$$

これで全部の相殺項が求まったので、くり込み定数を用いて書かれる全ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = iZ_2\overline{\psi}\not{\partial}\psi - Z_2 Z_m m\overline{\psi}\psi - Z_1 e\mu^{2-d/2}\overline{\psi}\not{A}\psi - \frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Z_3(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{2}$$

そして、これは裸の量で書いたとき元のラグランジアンの形にならなければいけないので

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}_B\not{\partial}\psi_B - m_B\overline{\psi}_B\psi_B - e_B\overline{\psi}_B\not{A}_B\psi_B - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_{B\nu} - \partial_\nu A_{B\mu})(\partial^\mu A^\nu_B - \partial^\nu A^\mu_B) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_{B\mu})^2 \tag{3}$$

$$\psi_B = Z_2^{1/2}\psi\ ,\ m_B = Z_2^{-1}(m + A) = m + \delta m = Z_m m\ ,\ A^\mu_B = Z_3^{1/2}A^\mu$$

$$Z_1 = Z_2 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\ ,\ Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}\ ,\ A = -\frac{me^2}{2\pi^2\epsilon}$$

これから、結合定数に対するくり込みは

$$e_B = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}}\mu^{\epsilon/2}e = Z_3^{-1/2}\mu^{\epsilon/2}e$$

となっていることが分かります。ファインマンゲージを取らずにやれば、ゲージ固定項に α が付きます。くり込まれた量だけで書かれるラグランジアン $\mathcal{L}_r$ と相殺項 $\mathcal{L}_{counter}$ に分けるなら、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_{counter}$$

$$\mathcal{L}_r = i\overline{\psi}\not{\partial}\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 - e\mu^{\epsilon/2}\overline{\psi}\not{A}\psi$$

$$\mathcal{L}_{counter} = (Z_2 - 1)i\overline{\psi}\not{\partial}\psi - (Z_2 - 1)m\overline{\psi}\psi - Z_2(Z_m - 1)m\overline{\psi}\psi - (Z_3 - 1)\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (Z_1 - 1)e\mu^{\epsilon/2}\overline{\psi}\not{A}\psi$$

ファインマンゲージに固定しなければ $\mathcal{L}_r$ は

$$\mathcal{L}_r = i\overline{\psi}\not{\partial}\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 - e\mu^{\epsilon/2}\overline{\psi}\not{A}\psi$$

になり、相殺項にはゲージ固定項が出てきませんでしたが、いるとするなら

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{counter} =& (Z_2-1)i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi-(Z_2-1)m\overline{\psi}\psi-Z_2(Z_m-1)m\overline{\psi}\psi\\&-(Z_3-1)\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-(\frac{1}{Z_\alpha}-1)\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2-(Z_1-1)e\mu^{\epsilon/2}\overline{\psi}A\!\!\!/\psi\end{aligned}$$

と入ってくるはずです。このときくり込まれたゲージ固定項は

$$\frac{1}{2Z_\alpha\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2=\frac{1}{2\alpha_B}(\partial_\mu A_B^\mu)^2$$

とならなければいけないので

$$\alpha_B=Z_3Z_\alpha\alpha$$

1 ループの計算からは $Z_\alpha=1$ になっていましたが、これが全てのオーダで成立してなければいけないことを示します。

ゲージパラメータ α に対するくり込みとそのくり込み定数が 1 になることをワード・高橋恒等式から導きます。ワード・高橋恒等式の原型は

$$-\frac{1}{\alpha}\Box(\partial_\mu A^\mu(x))+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta A_\mu(x)}-ie\big(\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta\psi(x)}\psi(x)-\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(x)\big)=0$$

話の流れのために今度は添え字のついていないものを裸の量だとします。これを $A_\nu(y)$ で微分し、$\psi=\overline{\psi}=A_\mu=0$ とすれば

$$-\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\nu\delta^4(x-y)))+\partial^\mu\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta A^\nu(y)\delta A^\mu(x)}=0$$

これに今見てきたくり込みを適用させます。くり込まれた量に書き換えれば (添え字として r をつけます)

$$\begin{aligned}-\frac{1}{Z_3Z_\alpha\alpha_r}\Box(\partial^\nu\delta^4(x-y)))+\frac{1}{Z_3}\partial^\mu\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta A_r^\nu(y)\delta A_r^\mu(x)}&=0\\-\frac{1}{Z_\alpha\alpha_r}\Box(\partial^\nu\delta^4(x-y)))+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta A_\nu(y)\delta A_\mu(x)}&=0\end{aligned}\tag{4}$$

そして、有効作用 $\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]$ がくり込まれていない量で作られているので、裸の量で書かれたラグランジアン (3) から導かれるものです。それに対してくり込まれた量で作られる $\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]$ は相殺項を含めたくり込まれた量によるラグランジアン $\mathcal{L}_r+\mathcal{L}_{counter}$ から求められます。そして、(3) と $\mathcal{L}_r+\mathcal{L}_{counter}$ は等しくなるように作っています。なので、$\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]=\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]$ となります。というわけで、(4) は

$$-\frac{1}{Z_\alpha\alpha_r}\Box(\partial^\nu\delta^4(x-y)))+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta A^r_\nu(y)\delta A^r_\mu(x)}=0$$

これに対して、くり込まれた量による $\mathcal{L}_r$ での生成汎関数から始めれば、くり込まれた量に対する関係式としてのワード・高橋恒等式を導くことができます。この場合では単に添え字に r がつくだけなので、$A_r^\mu(y)$ で微分し、$\psi_r=\overline{\psi}_r=A_r^\mu=0$ とすれば

$$-\frac{1}{\alpha_r}\Box(\partial^\nu\delta^4(x-y))) + \partial_\mu\frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta A^r_\nu(y)\delta A^r_\mu(x)} = 0$$

よって、くり込まれた量においてこの関係式が成立しているので、$Z_\alpha = 1$ であることが言えます。

最後にワード・高橋恒等式から $Z_1 = Z_2$ を導いておきます。ゲージパラメータのくり込みと同じように

$$-\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\mu A_\mu(x)) + \partial_\mu\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta A_\mu(x)} - ie\big(\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta\psi(x)}\psi(x) - \frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(x)\big) = 0$$

ここから始めます。これを $\psi,\overline{\psi}$ で汎関数微分して $\psi = \overline{\psi} = A_\mu = 0$ とすることで

$$\partial_\mu\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(y)\delta A_\mu(x)} - ie\big(\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta\overline{\psi}(y)\delta\psi(x)}\delta^4(x-z) + \frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A]}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)}\delta^4(x-y)\big) = 0$$

これはくり込んだ量を使えば ($\epsilon = 0$ として)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_2Z_3^{1/2}}\partial^\mu\frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\psi_r(z)\delta\overline{\psi}_r(y)\delta A^\mu_r(x)} - iZ_1\frac{1}{Z_2^2Z_3^{1/2}}e_r\big(\frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\overline{\psi}_r(y)\delta\psi_r(x)}\delta^4(x-z) + \frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\psi_r(z)\delta\overline{\psi}_r(x)}\delta^4(x-y)\big) &= 0 \\
\partial^\mu\frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\psi_r(z)\delta\overline{\psi}_r(y)\delta A^\mu_r(x)} - iZ_1Z_2^{-1}e_r\big(\frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\overline{\psi}_r(y)\delta\psi_r(x)}\delta^4(x-z) + \frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\psi_r(z)\delta\overline{\psi}_r(x)}\delta^4(x-y)\big) &=
\end{aligned}$$

そして、$\mathcal{L}_r$ を使うことで求められるものは

$$\partial^\mu\frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\psi_r(z)\delta\overline{\psi}_r(y)\delta A^\mu_r(x)} - ie_r\big(\frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\overline{\psi}_r(y)\delta\psi_r(x)}\delta^4(x-z) + \frac{\delta\Gamma[\psi_r,\overline{\psi}_r,A_r]}{\delta\psi_r(z)\delta\overline{\psi}_r(x)}\delta^4(x-y)\big) = 0$$

なので

$$Z_1Z_2^{-1} = 1 \ \Rightarrow\ Z_1 = Z_2$$

となります。ワード・高橋恒等式は非摂動的な式であるために、全てのオーダで $Z_1 = Z_2$ は成り立っている必要があります。

ちなみに、$\mathcal{L}_{counter}$ がゲージ不変であることを要請すれば、$Z_\alpha = 1, Z_1 = Z_2$ でなければいけないことがラグランジアン上で分かります。

・補足

Pauli-Villars の正則化に対応するラグランジアンは

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{PV} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\frac{\partial_\alpha\partial^\alpha + M^2}{M^2})F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu A^\mu(\frac{\partial_\alpha\partial^\alpha + M^2}{M^2})\partial_\nu A^\nu \\
&+ \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - \gamma^\mu A_\mu)\psi + \sum_{i=1}^N\overline{\psi}_i(i\gamma^\mu\partial_\mu - M_i - \gamma^\mu A_\mu)\psi_i
\end{aligned}$$

となっています (ファインマンゲージ)。何をしているのかは、伝播関数を出してみると分かります。光子の伝播関数は質量 M がいるために、$A_\mu(x)$ を $e^{-ikx}A_\mu(k)$ と運動量表示に持っていくと、電磁場部分は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}(-ik_\mu A_\nu + ik_\nu A_\mu)\frac{-k^2+M^2}{M^2}(-ik^\mu A^\nu + ik^\nu A^\mu) - \frac{1}{2}(-ik_\mu A^\mu)\frac{-k^2+M^2}{M^2}(-ik_\nu A^\nu)\\
&= \frac{1}{2}\frac{-k^2+M^2}{M^2}(k^2 A_\mu A^\mu - k_\mu k_\nu A^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}\frac{-k^2+M^2}{M^2}k_\mu k_\nu A^\mu A^\nu\\
&= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{k^2}{M^2}(k^2 - M^2)A^\mu A^\nu
\end{aligned}
$$

このようにスカラー場の形になります。よって光子の伝播関数は

$$
D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\frac{i}{k^2}\frac{M^2}{k^2-M^2} = -ig_{\mu\nu}(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2-M^2})
$$

という形になって、$M^2 \to \infty$ で元の形に戻ります。電子の伝播関数は全く同じ形なので、m を M_i にし、スピノール ψ につけた i に対応する係数 C_i を加えて、和を取るようにするだけです。そうすると、QED での「真空偏極」や「自己エネルギー」で出てきた正則化の形になります (「自己エネルギー」では最初に光子の伝播関数に赤外の切断 μ^2 を加えて、それをここでの M^2 に置き換えて正則項にしている)。

$F_{\mu\nu}$ はゲージ不変で、電子の部分は共変微分で書かれているので、正則化されたラグランジアンはゲージ不変なままです。このため、QED では Pauli-Villars の正則化でゲージ不変になっています。これに対して非可換ゲージ場では $F^i_{\mu\nu}$ がゲージ不変ではないために Pauli-Vilars の正則化ではゲージ不変ではなくなります。