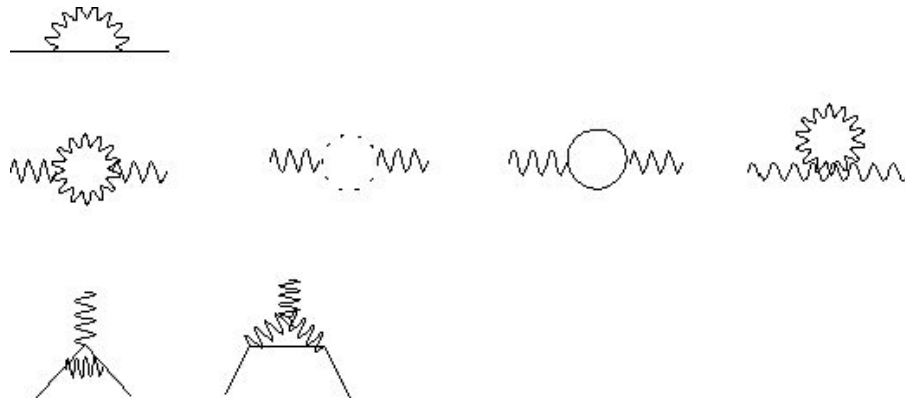


くり込み～非可換ゲージ～

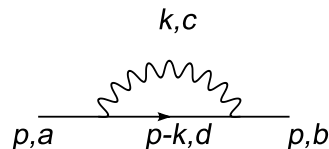
非可換ゲージ場での 1 ループの計算をしていきます。ここでは有限項は完全に無視してしまつて特異点のある項だけを計算します。また、途中で群論の知識が必要になる計算が出てきますが、結果だけを使うことにして導出は省きます。

非可換ゲージにおいて表れる 1 ループの図は



このようになっており、それぞれを計算していきます。一段目がフェルミオン伝播関数に対する自己エネルギー、二段目がボソンの伝播関数に対する真空偏極、三段目が頂点に対するものとなります。ただし、二段目の右端の図は積分が 0 になるので無視します。

非可換ゲージ場でのフェルミオンに対する自己エネルギーは、



$$\Sigma^{ab}(p) = -ig^2 \mu^{4-d} (t^c)_{ad} (t^c)_{db} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{q} - m} \frac{1}{k^2} (g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \gamma^\nu$$

となります。QED から何が変わったのかといえば単に頂点部分にいる $(t^c)_{ad} (t^c)_{db}$ という係数がついただけです。この $(t^c)_{ad} (t^c)_{db}$ の計算は群論側でのものなので、ここでは結果だけを使います。というわけで、 $SU(N)$ の場合において

$$(t^c)_{ad} (t^c)_{db} = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ab} = C_2(F) \delta_{ab}$$

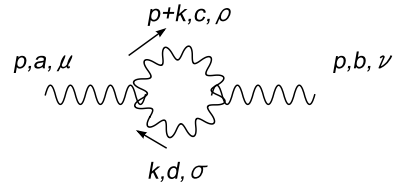
となっています。これによってファインマンゲージでは、QED での結果を使って

$$\Sigma^{ab}(p) = C_2(F) \frac{g^2}{8\pi^2 \epsilon} (-\not{p} + 4m) \delta_{ab}$$

これでフェルミオンの自己エネルギーは終わりです。

次にボソンの場合を見ます

最初にボソンがループしている図から計算していきます



$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(1) = -\frac{1}{2}g^2\mu^{4-d}f^{acd}f^{bdc}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{A_{\mu\nu}}{(p+k)^2k^2} \quad (1)$$

ここでの $1/2$ は対称因子で、 $A_{\mu\nu}$ は

$$A_{\mu\nu} = [g_{\mu\rho}(p + (p+k))_\sigma + g_{\rho\sigma}(-(p+k) - k)_\mu + g_{\sigma\mu}(k - p)_\rho] \\ \times [g_\nu^\sigma(-p+k)^\rho + g^{\sigma\rho}(-k - (p+k))_\nu + g_\nu^\rho(p+k+p)^\sigma]$$

これは計算していくと ($g_\mu^\mu = d$ を使って)

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu} &= g_{\mu\rho}g_{\nu}^{\sigma}(2p+k)_{\sigma}(-p+k)^{\rho} + g_{\mu\rho}g^{\sigma\rho}(2p+k)_{\sigma}(-2k-p)_{\nu} + g_{\mu\rho}g_{\nu}^{\rho}(2p+k)_{\sigma}(2p+k)^{\sigma} \\
&\quad + g_{\rho\sigma}g_{\nu}^{\sigma}(-p-2k)_{\mu}(-p+k)^{\rho} + g_{\rho\sigma}g^{\sigma\rho}(-p-2k)_{\mu}(-2k-p)_{\nu} + g_{\rho\sigma}g_{\nu}^{\rho}(-p-2k)_{\mu}(2p+k)^{\sigma} \\
&\quad + g_{\sigma\mu}g_{\nu}^{\sigma}(k-p)_{\rho}(-p+k)^{\rho} + g_{\sigma\mu}g^{\sigma\rho}(k-p)_{\rho}(-2k-p)_{\nu} + g_{\sigma\mu}g_{\nu}^{\rho}(k-p)_{\rho}(2p+k)^{\sigma} \\
&= (2p+k)_{\nu}(-p+k)_{\mu} + (2p+k)_{\mu}(-2k-p)_{\nu} + g_{\mu\nu}(2p+k) \cdot (2p+k) \\
&\quad + (-p-2k)_{\mu}(-p+k)_{\nu} + g_{\rho}^{\rho}(-p-2k)_{\mu}(-2k-p)_{\nu} + (-p-2k)_{\mu}(2p+k)_{\nu} \\
&\quad + g_{\mu\nu}(k-p) \cdot (-p+k) + (k-p)_{\mu}(-2k-p)_{\nu} + (k-p)_{\nu}(2p+k)_{\mu} \\
&= (2p+k)_{\nu}(k-p)_{\mu} - (2p+k)_{\mu}(2k+p)_{\nu} + g_{\mu\nu}(2p+k)^2 \\
&\quad - (p+2k)_{\mu}(k-p)_{\nu} + d(p+2k)_{\mu}(p+2k)_{\nu} - (p+2k)_{\mu}(2p+k)_{\nu} \\
&\quad + g_{\mu\nu}(k-p)^2 - (k-p)_{\mu}(2k+p)_{\nu} + (k-p)_{\nu}(2p+k)_{\mu} \\
&= [(2p+k)_{\nu} - (2k+p)_{\nu}](k-p)_{\mu} - [(k-p)_{\nu} + (2p+k)_{\nu}](p+2k)_{\mu} + d(p+2k)_{\mu}(p+2k)_{\nu} \\
&\quad + g_{\mu\nu}[(2p+k)^2 + (k-p)^2] + [(k-p)_{\nu} - (2k+p)_{\nu}](2p+k)_{\mu} \\
&= (p-k)_{\nu}(k-p)_{\mu} - (p+2k)_{\nu}(p+2k)_{\mu} + d(p+2k)_{\mu}(p+2k)_{\nu} \\
&\quad + g_{\mu\nu}[(2p+k)^2 + (k-p)^2] - (2p+k)_{\nu}(2p+k)_{\mu} \\
&= p_{\nu}k_{\mu} - p_{\mu}p_{\nu} - k_{\nu}k_{\mu} + k_{\nu}p_{\mu} + (d-1)(p_{\nu}p_{\mu} + 2p_{\nu}k_{\mu} + 2k_{\nu}p_{\mu} + 4k_{\nu}k_{\mu}) \\
&\quad + g_{\mu\nu}[(2p+k)^2 + (k-p)^2] - 4p_{\nu}p_{\mu} - 2p_{\nu}k_{\mu} - 2p_{\mu}k_{\nu} - k_{\nu}k_{\mu} \\
&= p_{\mu}p_{\nu}(d-2) - 4p_{\nu}p_{\mu} - k_{\nu}k_{\mu} + 4(d-1)k_{\nu}k_{\mu} - k_{\nu}k_{\mu} \\
&\quad + p_{\nu}k_{\mu} + k_{\nu}p_{\mu} + 2(d-1)k_{\nu}p_{\mu} - 2k_{\nu}p_{\mu} - 2p_{\nu}k_{\mu} + 2(d-1)p_{\nu}k_{\mu} \\
&\quad + g_{\mu\nu}[(2p+k)^2 + (k-p)^2] \\
&= p_{\mu}p_{\nu}(d-6) + (4d-6)k_{\nu}k_{\mu} + (2d-3)k_{\nu}p_{\mu} + (2d-3)p_{\nu}k_{\mu} + g_{\mu\nu}[(2p+k)^2 + (k-p)^2] \\
&= p_{\mu}p_{\nu}(d-6) + (4d-6)k_{\nu}k_{\mu} + (2d-3)k_{\nu}p_{\mu} + (2d-3)p_{\nu}k_{\mu} + g_{\mu\nu}[5p^2 + 2k^2 + 2p \cdot k]
\end{aligned}$$

ファインマンパラメータによって (1) は

$$\frac{1}{(p+k)^2k^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{((p+k)^2x + k^2(1-x))^2}$$

そして、分母は

$$\begin{aligned}
(p^2 + k^2 + 2pk)x + k^2(1-x) &= (p^2 + 2pk)x + k^2 \\
&= (k+px)^2 - p^2x^2 + p^2x \\
&= (k+px)^2 + p^2x(1-x)
\end{aligned}$$

となるので、 $k \Rightarrow k - px$ と置き換えることで積分は

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p+k)^2 k^2} \Rightarrow \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2}$$

で、求めたい

$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(1) = -\frac{1}{2}g^2\mu^{4-d}f^{acd}f^{bdc}\int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{A_{\mu\nu}}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} \quad (2)$$

において実際に積分しなくてはならない部分というのは

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2}, \quad \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} \\ & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2}, \quad \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} \end{aligned}$$

この4つです。そして、ファインマンパラメータによって書き換えられた(2)はQEDでの真空偏極において $m=0$ としたものに相当します。というわけで、 k_μ の項は積分で0になるので計算すべきものは

$$\begin{aligned} l &= \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} \\ & \quad \times [p_\mu p_\nu (d-6) + (4d-6)(k_\nu - p_\nu x)(k_\mu - p_\mu x) + (2d-3)(k_\nu - p_\nu x)p_\mu \\ & \quad + (2d-3)p_\nu(k_\mu - p_\mu x) + g_{\mu\nu}[5p^2 + 2(k-px)^2 + 2p \cdot (k-px)]] \\ &= \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} \\ & \quad \times [p_\mu p_\nu (d-6) + (4d-6)(k_\nu k_\mu + p_\nu p_\mu x^2) - 2(2d-3)p_\nu p_\mu x + g_{\mu\nu}[5p^2 + 2k^2 + 2p^2 x^2 - 2p^2 x]] \\ &= \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} \\ & \quad \times [p_\mu p_\nu (d-6) + (4d-6)(k_\nu k_\mu + p_\nu p_\mu x^2) - 2(2d-3)p_\nu p_\mu x + g_{\mu\nu}[5p^2 + 2k^2 - 2p^2 x(1-x)]] \end{aligned}$$

特異点を持つ項だけを引っ張り出して計算します。ユークリッド空間に接続し

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} \Rightarrow \int \frac{id^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 - p^2 x(1-x))^2}$$

積分を行うことで

- k を含まない項

$$i[p_\mu p_\nu(d-6) + (4d-6)p_\nu p_\mu x^2 - (4d-6)p_\nu p_\mu x + g_{\mu\nu}(5p^2 + 2p^2 x^2 - 2p^2 x)] \\ \times \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}$$

- $k_\mu k_\nu$ の項 ($k_\mu k_\nu = \frac{g_{\mu\nu} k^2}{d}$, $k^2 = -k_E^2$)

$$-i(4d-6) \frac{g_{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{1-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} = -(4d-6) \frac{g_{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{4}{2}-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}$$

- k^2 の項 ($k^2 = -k_E^2$)

$$-2ig_{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{1-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} = -2g_{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{4}{2}-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}$$

となります (a は積分の分母)。 k を含まない項に対して x 積分を実行すれば ($4-d=\epsilon, d \rightarrow 4$)

$$i(\mu^2)^{\epsilon/2} \int_0^1 [-2p_\mu p_\nu + 10p_\nu p_\mu x^2 - 10p_\nu p_\mu x + g_{\mu\nu}(5p^2 - 2p^2 x(1-x))] \\ \times \frac{1}{(4\pi)^{-\epsilon/2}(4\pi)^2} \left(\frac{1}{-p^2 x(1-x)}\right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 [-2p_\mu p_\nu + 10p_\nu p_\mu x^2 - 10p_\nu p_\mu x + g_{\mu\nu}(5p^2 + 2p^2 x^2 - 2p^2 x)] \frac{2}{\epsilon} \\ = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} [-2p_\mu p_\nu + \frac{10}{3} p_\nu p_\mu - 5p_\nu p_\mu + 5g_{\mu\nu} p^2 + \frac{2}{3} g_{\mu\nu} p^2 - g_{\mu\nu} p^2] \\ = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} [-\frac{11}{3} p_\nu p_\mu + \frac{14}{3} g_{\mu\nu} p^2]$$

同様に $k_\mu k_\nu$ の項では

$$\frac{i}{(4\pi)^2} (2d-3)(\mu^2)^{\epsilon/2} g_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{dx}{(4\pi)^{d/2}} p^2 x(1-x) \left(\frac{1}{-p^2 x(1-x)}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \\ = 5g_{\mu\nu} \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (p^2 x(1-x)) \left(-\frac{2}{\epsilon}\right) \\ = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} g_{\mu\nu} p^2 \frac{5}{6}$$

k^2 の項では

$$\begin{aligned}
& \frac{2ig_{\mu\nu}}{(4\pi)^2} \frac{d}{2} (\mu^2)^{\epsilon/2} \int_0^1 \frac{dx}{(4\pi)^{d/2}} p^2 x(1-x) \left(\frac{1}{-p^2 x(1-x)} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \\
&= \frac{4ig_{\mu\nu}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (p^2 x(1-x)) \left(-\frac{2}{\epsilon} \right) \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} g_{\mu\nu} p^2 \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

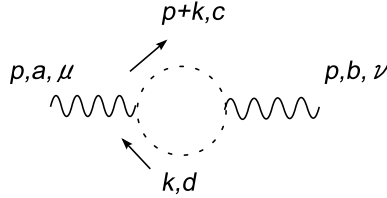
3つを合わせることで

$$\begin{aligned}
l &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \left[-\frac{11}{3} p_\nu p_\mu + \frac{14}{3} g_{\mu\nu} p^2 \right] - \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} g_{\mu\nu} p^2 \frac{5}{6} - \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} g_{\mu\nu} p^2 \frac{2}{3} \\
&= \frac{-2i}{(4\pi)^2 \epsilon} \left[\frac{11}{3} p_\nu p_\mu - \frac{19}{6} g_{\mu\nu} p^2 \right]
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(1) &= -\frac{1}{2} g^2 f^{acd} f^{bdc} l \\
\Pi_{\mu\nu}^{ab}(1) &= \frac{g^2}{(4\pi)^2 \epsilon} f^{acd} f^{bdc} \left[\frac{11}{3} p_\mu p_\nu - \frac{19}{6} g_{\mu\nu} p^2 \right]
\end{aligned}$$

次はゴーストによるループがある場合です



$$\begin{aligned}
i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(2) &= g^2 f^{acd} f^{bdc} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (p+k)_\mu k_\nu \frac{1}{(p+k)^2 k^2} \\
&= g^2 f^{acd} f^{bdc} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p_\mu (k-px)_\nu + (k-px)_\mu (k-px)_\nu}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} \\
&= g^2 f^{acd} f^{bdc} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-p_\mu p_\nu x + k_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu x^2}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2}
\end{aligned}$$

これは $\Pi(1)$ と分子が違うだけなので、積分を上の結果から引っ張ってきて、 $p_\mu p_\nu$ の項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{2}{\epsilon} [-p_\mu p_\nu x + p_\mu p_\nu x^2] &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} p_\mu p_\nu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{-1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} p_\mu p_\nu \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

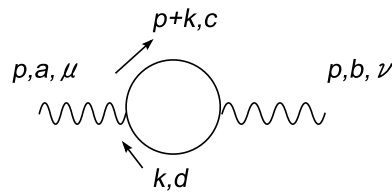
$k_\mu k_\nu$ は

$$\frac{g_{\mu\nu}}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx (p^2 x(1-x)) \left(-\frac{2}{\epsilon}\right) = \frac{-g_{\mu\nu}}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} p^2 \frac{1}{6}$$

よって

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(2) = -\frac{g^2 f^{acd} f^{bdc}}{(4\pi)^2 \epsilon} (p_\mu p_\nu \frac{1}{3} + g_{\mu\nu} p^2 \frac{1}{6})$$

残りの QED と同じ、フェルミオンのループがある場合を計算します。



$$i\Pi_{\mu\nu}^{ab}(3) = -g^2 \mu^{4-d} t^a t^b \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} - m} \right)$$

ここでの $t^a t^b$ は正確には $(t^a)_{dc} (t^b)_{cd} = \text{tr}(t^a t^b)$ であり、ローマ字の添え字に対する対角和となります。で、QED との違いはこの $\text{tr}(t^a t^b)$ があるだけなので

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(3) = \frac{g^2}{6\pi^2 \epsilon} \text{tr}(t^a t^b) (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2)$$

となります。この $\text{tr}(t^a t^b)$ は

$$\text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$$

そして、これはフェルミオンが一つの種類しかないならこのままで問題ないんですが、複数の種類があるならこれは変更されます。つまり、QCD で言えばクォークのフレーバの数 N_f が関与してきて、 N_f 個あるなら

$$\text{tr}(t^a t^b) = \frac{N_f}{2} \delta^{ab}$$

となります。さらに、 $f^{acd} f^{bdc}$ は

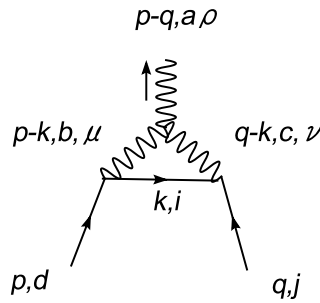
$$f^{acd} f^{bdc} = -N \delta^{ab} = -C_2(G) \delta^{ab} \quad (SU(N))$$

3 つの結果を合わせることで ($SU(3)$ として)

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{ab} &= \Pi_{\mu\nu}^{ab}(1) + \Pi_{\mu\nu}^{ab}(2) + \Pi_{\mu\nu}^{ab}(3) \\
&= \frac{g^2}{(4\pi)^2\epsilon} f^{acd} f^{bdc} \left[\frac{11}{3} p_\mu p_\nu - \frac{19}{6} g_{\mu\nu} p^2 \right] - \frac{g^2 f^{acd} f^{bdc}}{(4\pi)^2\epsilon} \left(p_\mu p_\nu \frac{1}{3} + g_{\mu\nu} p^2 \frac{1}{6} \right) + \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon} \text{tr}(t^a t^b) (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \\
&= \frac{-g^2}{(4\pi)^2\epsilon} 3\delta^{ab} \left[\frac{10}{3} p_\mu p_\nu - \frac{20}{6} g_{\mu\nu} p^2 \right] + \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon} \frac{N_f}{2} \delta^{ab} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \\
&= \frac{-g^2}{8\pi^2\epsilon} 3\delta^{ab} \frac{5}{3} [p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2] + \frac{g^2}{6\pi^2\epsilon} \frac{N_f}{2} \delta^{ab} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \\
&= \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(\frac{2N_f}{3} - 5 \right) \delta^{ab} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2)
\end{aligned}$$

最後に頂点を求めます

QED から新しく加わる図は



この時、この図でのボソンによる 3 点頂点部分は

$$\begin{aligned}
&gf_{abc}[g_{\rho\nu}((-p-q) + (q-k))_\mu + g_{\nu\mu}(-(q-k) - (p-k))_\rho + g_{\mu\rho}((p-k) + (p-q))_\nu] \\
&= gf_{abc}[g_{\rho\nu}(-p+2q-k)_\mu + g_{\nu\mu}(-q-p+2k)_\rho + g_{\mu\rho}(2p-k-q)_\nu] \\
&= gf_{abc}\Lambda^{(3)}
\end{aligned}$$

これに後はフェルミオンとボソンによる頂点 $ig\gamma_\mu(t^b)_{di}, ig\gamma_\nu(t^c)_{ij}$ と伝播関数をつなげて

$$\begin{aligned}
ig\mu^{2-d/2}\Gamma_\rho^a(1) &= g(ig)^2(\mu^{2-d/2})^3 f_{abc}(t^b)_{di}(t^c)_{ij} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{-i}{(k-p)^2} \Lambda^{(3)} \frac{-i}{(q-k)^2} \frac{i}{\not{k}-m} \gamma^\nu \\
&= ig^3(\mu^{2-d/2})^3 f_{abc}(t^b)_{di}(t^c)_{ij} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{1}{(k-p)^2} \Lambda^{(3)} \frac{1}{(q-k)^2} \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu
\end{aligned}$$

$$\Gamma_\rho^a(1) = g^2(\mu^{2-d/2})^2 f_{abc}(t^b)_{di}(t^c)_{ij} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu \frac{1}{(k-p)^2} \Lambda^{(3)} \frac{1}{(q-k)^2} \frac{1}{\not{k}-m} \gamma^\nu$$

このようになります。この中で積分部分だけを取り出せば

$$l_\Gamma = (\mu^{2-d/2})^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \Lambda^{(3)} \frac{\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma^\nu}{(k-p)^2(q-k)^2(k^2-m^2)}$$

分母はファインマンパラメータを使うことで

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)(k - p)^2(q - k)^2} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[(k^2 - m^2)(1 - x - y) + (k - p)^2x + (q - k)^2y]^3}$$

分母を変形すると

$$\begin{aligned} & (k^2 - m^2)(1 - x - y) + (k - p)^2x + (q - k)^2y \\ &= (k^2 - m^2)(1 - x - y) + (k^2 + p^2 - 2k \cdot p)x + (q^2 + k^2 - 2k \cdot q)y \\ &= (k^2 - m^2) - y(k^2 - m^2) - x(k^2 - m^2) + x(k^2 + p^2 - 2k \cdot p) + y(q^2 + k^2 - 2k \cdot q) \\ &= (k^2 - m^2) + ym^2 + xm^2 + x(p^2 - 2k \cdot p) + y(q^2 - 2k \cdot q) \\ &= k^2 + x(p^2 - 2k \cdot p) + y(q^2 - 2k \cdot q) - m^2(1 - y - x) \\ &= (k - xp - yq)^2 - x^2p^2 - y^2q^2 - 2xyp \cdot q + xp^2 + yq^2 - m^2(1 - y - x) \\ &= (k - xp - yq)^2 - (x^2p^2 + y^2q^2 + 2xyp \cdot q) + xp^2 + yq^2 - m^2(1 - y - x) \\ &= (k - xp - yq)^2 - (xp + yq)^2 + xp^2 + yq^2 - m^2(1 - y - x) \end{aligned}$$

ここで、 $k \rightarrow k + xp + yq$ と変数変換することで

$$2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^d k \Lambda^{(3)} \frac{\gamma^\mu ((\not{k} + x\not{p} + y\not{q}) + m)\gamma^\nu}{[k^2 - (xp + yq)^2 + xp^2 + yq^2 - m^2(1 - y - x)]^3}$$

$$\Lambda^{(3)} = [g_{\rho\nu}(2q - p - k - xp - yq)_\mu + g_{\nu\mu}(2(k + xp + yq) - q - p)_\rho + g_{\mu\rho}(2p - q - k - xp - yq)_\nu]$$

この積分をしていますが、相変わらず k のみを含む項は 0 になるので無視します。さらに今の場合分母が $(k^2 - a)^3$ となっているために、分子に k の 2 次以上がいなければ発散は起きません (次元正則化参照)。今は発散項だけを見ているので、そういった項も無視してしまいます。そうすると積分しなくてはいけない分子部分は

$$\begin{aligned} & \Lambda^{(3)} \gamma^\mu ((\not{k} + x\not{p} + y\not{q}) + m)\gamma^\nu \\ & \Rightarrow \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu [-g_{\rho\nu} k_\mu + 2g_{\nu\mu} k_\rho - g_{\mu\rho} k_\nu] \end{aligned}$$

だけでいいことになります。これは展開すると

$$\begin{aligned} -g_{\rho\nu} \gamma^\mu k_\mu \not{k} \gamma^\nu + 2g_{\nu\mu} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu k_\rho - g_{\mu\rho} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu k_\nu &= -\gamma_\rho k^2 + 2\gamma_\nu \gamma^\sigma k_\sigma \gamma^\nu k_\rho - \gamma_\rho k^2 \\ &= -2\gamma_\rho k^2 + 2\gamma_\nu (2g^{\sigma\nu} - \gamma^\nu \gamma^\sigma) k_\rho k_\sigma \\ &= -2\gamma_\rho k^2 + 4\gamma^\sigma k_\sigma k_\rho - 2d\gamma^\sigma k_\sigma k_\rho \\ &= -2\gamma_\rho k^2 + (4 - 2d)\not{k} k_\rho \end{aligned}$$

というわけで

$$l_{\Gamma} = 2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-2\gamma_{\rho} k^2 + (4-2d)\not{k}k_{\rho}}{[k^2 - (xp+yq)^2 + xp^2 + yq^2 - m^2(1-y-x)]^3}$$

この積分を行います。 k^2 の項では

$$\begin{aligned} & 2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-2\gamma_{\rho} k^2}{[k^2 - (xp+yq)^2 + xp^2 + yq^2 - m^2(1-y-x)]^3} \\ &= \frac{-4i\gamma_{\rho}\mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^d k_E \frac{k_E^2}{[k_E^2 + (xp+yq)^2 - xp^2 - yq^2 + m^2(1-y-x)]^3} \\ &= -4i\gamma_{\rho}\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \\ &= \frac{-4i\gamma_{\rho}\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{(xp+yq)^2 - xp^2 - yq^2 + m^2(1-y-x)}\right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &= \frac{-4i\gamma_{\rho}\mu^{\epsilon}}{(4\pi)^{-\epsilon/2}(4\pi)^2} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(3)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{1}{(xp+yq)^2 - xp^2 - yq^2 + m^2(1-y-x)}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \\ &= \frac{-4i\gamma_{\rho}}{(4\pi)^2} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(3)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{4\pi\mu^2}{(xp+yq)^2 - xp^2 - yq^2 + m^2(1-y-x)}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \\ &= \frac{-8i\gamma_{\rho}}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2}{\epsilon} \\ &= \frac{-8i\gamma_{\rho}}{(4\pi)^2\epsilon} \end{aligned}$$

$\not{k}k_{\rho}$ では

$$\begin{aligned} & 2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^d k \frac{(4-2d)\not{k}k_{\rho}}{[k^2 - (xp+yq)^2 + xp^2 + yq^2 - m^2(1-y-x)]^3} \\ &= 2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int d^d k \frac{(4-2d)\frac{k^2}{d}\gamma_{\rho}}{[k^2 - (xp+yq)^2 + xp^2 + yq^2 - m^2(1-y-x)]^3} \\ &= \frac{4-8}{4} \frac{-2i\gamma_{\rho}}{(4\pi)^2\epsilon} = \frac{2i\gamma_{\rho}}{(4\pi)^2\epsilon} \end{aligned}$$

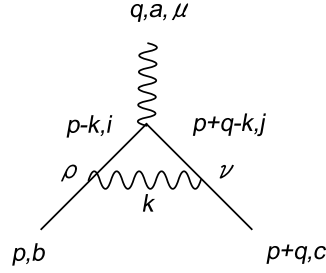
よって

$$l_{\Gamma} = \frac{-8i\gamma_{\rho}}{(4\pi)^2\epsilon} + \frac{2i\gamma_{\rho}}{(4\pi)^2\epsilon} = \frac{-6i\gamma_{\rho}}{(4\pi)^2\epsilon}$$

というわけで

$$\begin{aligned}
\Gamma_\rho^a(1) &= g^2 f_{abc} (t^b)_{di} (t^c)_{ij} \frac{-6i\gamma_\rho}{(4\pi)^2 \epsilon} \\
&= C_2(G) g^2 \frac{it_a}{2} \frac{-6i\gamma_\rho}{(4\pi)^2 \epsilon} \quad (f_{abc} t^b t^c = \frac{i}{2} C_2(G) t_a) \\
&= C_2(G) g^2 \frac{3\gamma_\rho}{(4\pi)^2 \epsilon} t_a
\end{aligned}$$

もう一つある頂点の図は QED と同じで



$$ig(\Gamma_\mu^a)_{cb}(2) = (ig\mu^{2-d/2})^3 (t^d)_{cj} (t^a)_{ji} (t^d)_{ib} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\nu \frac{i}{p+q-k-m} \gamma_\mu \frac{i}{p-k-m} \gamma_\rho \frac{-ig^{\nu\rho}}{k^2}$$

というわけで、 $t^d t^a t^d$ がついているだけの違いになります。この計算は

$$t^d t^a t^d = [-\frac{1}{2} C_2(G) + C_2(F)] t^a$$

となっています。そして、QED の結果より

$$\Gamma_\mu^a(2) = [-\frac{1}{2} C_2(G) + C_2(F)] \frac{g^2 \gamma_\mu t^a}{8\pi^2 \epsilon}$$

二つをあわせることで頂点は

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^a &= \Gamma_\mu^a(1) + \Gamma_\mu^a(2) = C_2(G) g^2 \frac{3\gamma_\mu}{(4\pi)^2 \epsilon} t^a + [-\frac{1}{2} C_2(G) + C_2(F)] \frac{g^2 \gamma_\mu t^a}{8\pi^2 \epsilon} \\
&= \frac{g^2 \gamma_\mu}{8\pi^2 \epsilon} t_a (C_2(G) + C_2(F))
\end{aligned}$$

まとめると、非可換ゲージ場の 1 ループ計算において特異点を持っている部分は

$$\Sigma(p) = C_2(F) \frac{g^2}{8\pi^2 \epsilon} (-\not{p} + 4m)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{g^2}{8\pi^2 \epsilon} (\frac{2}{3} N_f - \frac{5}{3} C_2(G)) (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2)$$

$$\Gamma_\mu^a = \frac{g^2 \gamma_\mu}{8\pi^2 \epsilon} t_a (C_2(G) + C_2(F))$$

$$C_2(F) = \frac{N^2 - 1}{2N} , \quad C_2(G) = N \quad (SU(N))$$

となっています。そして、くり込み定数は QED でのものをこの結果に置き換えれば済みます

$$Z_1 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} (C_2(G) + C_2(F))$$

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} C_2(F)$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} N_f \right)$$

非可換ゲージ場の理論である QCD においてはカラーが 3 なので $SU(3)$ となり、クォークのフレーバ数 N_f は標準的にはアップ、ダウン、ストレンジ、チャーム、トップ、ボトム の 6 個を考えます。