くり込み群方程式

ここでは、前半ではくり込まれた量には添え字なし、くり込んでいない裸の量には0をつけて書くことにします。一部ではくり込んだ量には r をつけているところもあります。
くり込み群方程式と呼ばれるものを求めることで、結合定数を無次元にするために導入した質量パラメータ μ が持っている意味を見ていきます。
面倒なので、n 点相関関数 $G^{(n)}$ と n 点頂点関数 $\Gamma^{(n)}$ を両方を n 点関数と書いてしまう場合もありますが混乱はしないと思います。

くり込みの手続きには2つの任意性があります。1つは発散を除去するときに一緒に有限な値も引くのかというものです。これはくり込み条件の任意性です。例えば、質量殻上の条件と質量殻上でない条件では明らかに引かれる有限の値も変わります。もう1つは次元合わせのために導入された質量パラメータ μ です。くり込み条件を質量殻上だとして物理的な質量を固定してしまわない限り、μ は任意パラメータです。μ は質量や運動量と関係して出てくるために、くり込みのスケールパラメータと呼ばれます。

このようにくり込みの手続きにおいては、くり込み条件と質量パラメータ μ という2つの任意性を持っています。ここでは質量パラメータ μ に関する部分を見ていきますが、最初にくり込み条件の任意性の話を少ししておきます。

よく言われるくり込み処方 (renormalization prescription) というのは、どんなくり込み条件を使っているのかに依存している言葉です。「くり込み～ϕ^4 理論～」では、ϕ^4 理論でのくり込み条件として

$$\Gamma^{(4)}(p_i = 0) = -i\lambda$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p)|_{p^2=0} = 1$$

$$\Gamma^{(2)}(p^2 = 0) = -m^2$$

これと質量殻上での

$$\Gamma^{(4)}(p_i = m) = -i\lambda$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p)|_{p^2=m^2} = 1$$

$$\Gamma^{(2)}(p^2 = m^2) = 0$$

という二つのくり込み条件を示しました。他にも、特殊でありながら一番使われている処方として MS スキーム (minimal subtraction scheme) と呼ばれるものがあります。名前の通り最小限のことしかしない処方で、発散項のみを取り除く方法です。ϕ^4 理論での自己エネルギーでの場合を示しておきます。1ループでの自己エネルギーは

$$\frac{\Sigma}{i} = \frac{i\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon} + \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\Big(1 - \gamma + \log\big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\big)\Big)$$

これで与えられていて、極を取り除くように作られた相殺項 δm^2 によって、2 点関数は、$\Gamma_0^{(2)}$ を最低次のものとして (m, λ はくり込まれた有限の質量として)

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(p) &= \Gamma_0^{(2)}(p) - \Sigma(p) - \delta m^2 \\ &= \Gamma_0^{(2)}(p) - (\frac{-\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon} + finite) - (\frac{\lambda m^2}{16\pi^2\epsilon} + finite_2)\end{aligned}$$

$$(\Gamma_0^{(2)}(p) = p^2 - m^2)$$

δm^2 の有限項 $finite_2$ は完全に任意です。このときくり込み条件として $\Gamma^{(2)}(p^2 = 0) = -m^2$ を課すなら、第二項と第三項は完全に打ち消しあう必要があるので、$finite_2$ は $finite$ と同じになります。このようなのに対して、ここまで強く制限をかけずに、単に $1/\epsilon$ の項だけを消すというのが MS スキームです。つまり、相殺項 δm^2 は $\lambda m^2/(16\pi^2\epsilon)$ のみになります。これが最小 (minimal) と呼ばれる理由です。また、発散部分だけでなく γ と $\ln 4\pi$ も一緒に除去するような処方を $\overline{\mathrm{MS}}$ スキーム (エムエスバーと読むようです) と呼びます。MS スキームを使うとくり込み条件 $\Gamma^{(2)}(p^2 = 0) = -m^2$ の場合と有限項が異なることから分かるように、一般的にはくり込み条件を変えると有限項の形が変わります。別の言い方をすれば、相殺項にはくり込み条件による任意性があるということです。

ここで気が付くのが、くり込みの処方によってくり込んだ量が変化することです。なぜなら、相殺項が変化すればくり込み定数が変化するために、$m^2 = Z_m^{-1} m_0^2$ から、くり込んだ量も変化するからです (上の例からも明らかにくり込まれた 2 点関数は異なった形になる)。しかし、物理の結果がくり込みの手続きに依存しているはずはないです。例えば、S 行列が、あるくり込みの手続きで得られたくり込まれた質量 m, 結合定数 g によって $S(g, m, \mu)$、別の手続きでは $S'(g', m', \mu')$ となっていたとすれば

$$S'(g', m', \mu') = S(g, m, \mu)$$

このようになっている必要があります (μ も変化するはずなので μ' としています)。これがくり込み条件に対する制限です。重要なのは、質量や結合定数といったパラメータや相関関数はくり込み条件に依存するが、それらから計算される S 行列のような散乱振幅はくり込み条件に独立でなければいけないという点です。

くり込み条件の話は終わりにして、本題のくり込みのスケールパラメータ μ についての話に移ります。話の構造自体はくり込み条件と似ています。くり込み条件によって質量や結合定数が変化するように、μ によって質量と結合定数がどう変化するのかという話です (狙ったところに固定しない限り μ は任意)。

まず、簡単な状況を見るために、μ を μ' に変化するような変換を考えます。μ の変化によって異なるくり込まれた量になるので、異なる μ と μ' での質量 m が

$$m^2(\mu') = a(\mu, \mu') m^2(\mu)$$

という変換でつながっているとします。それぞれのくり込みが

$$m^2(\mu) = Z_m^{-1}(\mu) m_0^2 \ , \ m^2(\mu') = Z_m'^{-1}(\mu) m_0^2$$

で与えられているとすれば、$m^2(\mu')$ と $m^2(\mu)$ の元となる m_0^2 は等しいので

$$m^2(\mu') = \frac{Z_m(\mu)}{Z_m(\mu')} m^2(\mu)$$

から

$$a(\mu, \mu') = \frac{Z_m(\mu)}{Z_m(\mu')}$$

これの分子、分母の発散部分は打ち消しあってくれるはずなので発散していないです。$a(\mu, \mu')$ を変換の因子だとすれば、この変換は

$$m^2(\mu') = a(\mu', \mu)m^2(\mu) \ \Rightarrow \ m^2(\mu'') = a(\mu'', \mu')a(\mu', \mu)m^2(\mu) \ \Rightarrow \ \cdots$$

のように連続的に続いていけます。つまり、群を構成していると捉えることが出来ます。この μ の変化によって作られる群がくり込み群です。

μ の変化が具体的にどのように影響するのかを 1 ループの結果を使って簡単に見ておきます。ラグランジアンとして ϕ^4 理論の

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 - \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4$$

を使います。添え字に 0 がついているのは裸の量だとします。場のくり込みだけを行ったとして $\phi_0 = \sqrt{Z_\phi}\phi_r$ とすれば (区別を明確にするためにくり込まれた量に r をつけます)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}Z_\phi\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}Z_\phi m_0^2\phi_r^2 - \frac{Z_\phi^2\lambda_0}{4!}\phi_r^4 \\
&= \frac{1}{2}Z_\phi\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_1^2\phi_r^2 - \frac{\lambda_1}{4!}\phi_r^4
\end{aligned}$$

相殺項を入れていないので、m_1, λ_1 はまだくり込まれた量ではないです (1 ループでは $Z_\phi = 1$ なので、裸の量と変わらない)。相殺項を入れれば

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4 \\
&+ (Z_\phi - 1)\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - (Z_\phi Z_m^2 - 1)\frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - (Z_\phi^2 Z_\lambda - 1)\frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4 \\
= &\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{\lambda_r}{4!}\phi_r^4 + \delta Z_\phi\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \delta m^2\frac{1}{2}\phi_r^2 - \delta\lambda\frac{1}{4!}\phi_r^4
\end{aligned}$$

これを d 次元だとして質量パラメータ μ を入れれば

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{\mu^{4-d}\lambda_r}{4!}\phi_r^4 + \delta Z_\phi\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \delta m^2\frac{1}{2}\phi_r^2 - \delta\lambda\frac{1}{4!}\phi_r^4$$

となります。知りたいのは μ を μ' に変えたときにどうなるのかです。なので、ラグランジアンの構造を変えずに μ を μ' に変えます。ラグランジアンを変えずに μ' にするには、単純な変形から

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{\mu'^{4-d}}{4!}\frac{\mu^{4-d}}{\mu'^{4-d}}\lambda_r\phi_r^4 + \delta Z'_\phi\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \delta m'^2\frac{1}{2}\phi_r^2 - \delta\lambda'\frac{1}{4!}\phi_r^4 \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2 - \frac{\mu'^{4-d}}{4!}\overline{\lambda}_r\phi_r^4 + \delta Z'_\phi\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \delta m'^2\frac{1}{2}\phi_r^2 - \delta\lambda'\frac{1}{4!}\phi_r^4
\end{aligned} \tag{1}
$$

このような μ' と $\overline{\lambda}_r$ に置き換えられたラグランジアンになります。μ を μ' に変えたとしても理論が変わらないなら、その変化分をどこかに吸収させる必要があるので、相殺項を変化させています。つまり、変化分を相殺項に入れてしまえると考えます。

μ の場合で相殺項を無視した自己エネルギーを計算すれば

$$
\frac{\Sigma}{i} = -\frac{i}{2}\lambda_r m^2(4\pi)^{-2}\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m_r^2}\Big)^{\frac{4-d}{2}}\Gamma(\frac{4-d}{2}-1)
$$

これは μ, λ_r を $\mu', \overline{\lambda}_r$ と置き換えたとき

$$
\begin{aligned}
\frac{\Sigma}{i} =& -\frac{i}{2}\overline{\lambda}_r m^2(4\pi)^{-2}\Big(\frac{4\pi\mu'^2}{m_r^2}\Big)^{\frac{4-d}{2}}\Gamma(\frac{4-d}{2}-1) \\
=& -\frac{i}{2}\frac{\mu^{4-d}}{\mu'^{4-d}}\lambda_r m^2(4\pi)^{-2}\frac{\mu'^{4-d}}{\mu^{4-d}}\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m_r^2}\Big)^{\frac{4-d}{2}}\Gamma(\frac{4-d}{2}-1) \\
=& -\frac{i}{2}\lambda_r m^2(4\pi)^{-2}\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m_r^2}\Big)^{\frac{4-d}{2}}\Gamma(\frac{4-d}{2}-1)
\end{aligned}
$$

となるので、置き換えに対して不変になっています。

$d=4$ における極を消すためには δm^2 に

$$
C = \frac{\lambda_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)}
$$

が必要になります。μ' による場合では、単に $\mu', \overline{\lambda}$ に変わるだけなので

$$
C' = \frac{\overline{\lambda}_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)} = \frac{-i\lambda_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)}(\frac{\mu}{\mu'})^{4-d}
$$

が $\delta m'^2$ に必要です。C と C' の違いのために δm^2 と $\delta m'^2$ にずれが出てきます。このずれは $C'-C$ に対応するので (C' と C の発散は打ち消しあってくれるはず)

$$
\begin{aligned}
\delta m'^2 &= \frac{\overline{\lambda}_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)} - (C'-C) \\
&= \frac{\overline{\lambda}_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)} - (\frac{\overline{\lambda}_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)} - \frac{\lambda_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)}) \\
&= \frac{\overline{\lambda}_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)} - \frac{\overline{\lambda}_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)}(1-(\frac{\mu'}{\mu})^{4-d})
\end{aligned}
$$

とすれば $\delta m'^2$ に吸収させることができます。第二項は $d \to 4$ で

$$\frac{1}{4-d}(1-(\frac{\mu'}{\mu})^{4-d}) \simeq \frac{1}{4-d}(1-1-(4-d)\log\frac{\mu'}{\mu}) = -\log\frac{\mu'}{\mu}$$

なので有限です。

ここでラグランジアンに戻ります。(1) を変形させると

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(1+\delta Z'_\phi)\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}(m_r^2+\delta m'^2)\phi_r^2 - \frac{1}{4!}(\mu'^{4-d}\overline{\lambda}_r+\delta\lambda')\phi_r^4 \tag{2}$$

そして、m_1, λ_1 でのラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z_\phi\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_1^2\phi_r^2 - \frac{\lambda_1}{4!}\phi_r^4$$

での Z_ϕ, m_1, λ_1 は、くり込みの計算から分かるようにくり込まれた m_r, λ_r と μ の関数です。なので、μ を μ' に変えれば Z_ϕ, m_1, λ_1 は μ' によって変化した m'_1, λ'_1 と μ' の関数になるはずです。つまり、μ' に変えたラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z'_\phi\partial_\mu\phi'_r\partial^\mu\phi'_r - \frac{1}{2}m_1'^2\phi_r'^2 - \frac{\lambda'_1}{4!}\phi_r'^4$$

$$Z'_\phi = Z_\phi(m'_r, \lambda'_r, \mu')$$

$$m_1'^2 = m_1^2(m'_r, \lambda'_r, \mu')$$

$$\lambda'_1 = \lambda_1(m'_r, \lambda'_r, \mu')$$

場も変化するはずなので ϕ'_r としています。ϕ'_r が $\phi'_r = \eta\phi_r$ となっているなら

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z'_\phi\eta^2\partial_\mu\phi_r\partial^\mu\phi_r - \frac{1}{2}m_1'^2\eta^2\phi'_r - \frac{\lambda'_1}{4!}\eta^4\phi'_r$$

これと (2) を比較すれば

$$m_1'^2\eta^2 = m_r^2 + \frac{\overline{\lambda}_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)} - \frac{\overline{\lambda}_r m_r^2}{16\pi^2(4-d)}(1-(\frac{\mu'}{\mu})^{4-d})$$

1 ループでは $Z_\phi = 1$ なので $\eta = 1$、そして右辺第二項を m'_1 に入れることで m'_r になるので

$$m_r'^2 = m_r^2(1-\frac{\lambda_r}{16\pi^2(4-d)})((\frac{\mu}{\mu'})^{4-d}-1)$$

$d = 4$ で

$$m_r'^2 = m_r^2(1+\frac{\lambda_r}{16\pi^2}\log\frac{\mu}{\mu'})$$

というわけで、ラグランジアンで μ を μ' に置き換えたとき、その変化分を相殺項 $\delta m'^2$ にいれると、$\delta m'^2$ と m_r を合わせたものが新しいくり込まれた質量 m'_r になって出てくるということです。

μ の変化によってくり込まれた量が変化することが具体的に分かったので、μ によってくり込まれた量がどう動くのかを調べます。そのために、μ による連続群の中で作られる方程式として、くり込み群方程式 (renormalization group equation) というのを作ります。これは漸近的な振る舞いを調べるのにかなり有用なものです。使うくり込み条件は MS スキームです。

ここから、くり込まれている量には何も添え字をつけずに、裸の量には 0 をつけて書いていきます。

くり込まれていない n 点相関関数は

$$\langle\Omega|T(\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\cdots\phi_0(x_n))|\Omega\rangle_{con}$$

で与えられます。質量と結合定数もくり込まれていない m_0,λ_0 です。くり込まれていない n 点相関関数は m_0,λ_0 を固定してしまえばパラメータ μ に依存していないはずです。また、裸の質量や結合定数も不変だと見なすのが自然なので

$$m_0(m',\lambda',\mu')=m_0(m,\lambda,\mu)\ ,\ \lambda_0(m',\lambda',\mu')=\lambda_0(m,\lambda,\mu)$$

として、μ で微分すれば 0 になるとします。

結合定数と場に対してくり込みを行うことで、くり込まれた n 点相関関数が求まるので、connected なものとして

$$G^{(n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\langle\Omega|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n))|\Omega\rangle_{con} \tag{3}$$

このときの質量と結合定数はくり込まれた m,λ です。これに対してパラメータ μ を変化させたときにどうなるのか見てみます。簡単にするために質量を 0 とした ϕ^4 理論だとします。

$G^{(n)}$ が μ と λ の関数だと思えば

$$dG^{(n)}=\frac{\partial G^{(n)}}{\partial\mu}\delta\mu+\frac{\partial G^{(n)}}{\partial\lambda}\delta\lambda \tag{4}$$

そして、μ が $\mu+d\mu$ と変化するなら、それに伴って λ と ϕ も変化するので

$$\begin{aligned}\mu &\Rightarrow \mu+\delta\mu\\ \lambda &\Rightarrow \lambda+\delta\lambda\\ \phi &\Rightarrow (1+\delta\eta)\phi\end{aligned}$$

となるとします。そうすると (3) の右辺に ϕ の変化を入れることで、$G^{(n)}$ は

$$(1+d\eta)^n\simeq 1+n\delta\eta$$

という変化を受けることになり

$$
\begin{aligned}
G^{(n)} &\Rightarrow (1+n\delta\eta)G^{(n)} \\
dG^{(n)} &= n\delta\eta G^{(n)}
\end{aligned}
$$

これを (4) に入れて $\mu/\delta\mu$ を両辺にかけると

$$
\begin{aligned}
\mu\frac{\partial G^{(n)}}{\partial\mu}+\mu\frac{\delta\lambda}{\delta\mu}\frac{\partial G^{(n)}}{\partial\lambda} &= n\mu\frac{d\eta}{\delta\mu}G^{(n)} \\
(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\delta\lambda}{\delta\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda}-n\mu\frac{d\eta}{\delta\mu})G^{(n)} &= 0 \\
(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma(\lambda))G^{(n)} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\beta(\lambda)=\mu\frac{\delta\lambda}{\delta\mu}\ \ ,\ \ \gamma(\lambda)=-\mu\frac{\delta\eta}{\delta\mu}
$$

このとき、β と γ が μ を含んでいると次元を合わせることが出来ないので、無次元量 λ にのみ依存することになります。$\gamma(\lambda)$ は異常次元 (anomalous dimension) と呼ばれます (その理由は後でわかります)。そして、β と γ が λ のみに依存するというのが MS スキームを選んだときの特徴になっています。β の依存性が変わる例として、くり込み条件を

$$
\Gamma^{(4)}(p_i=-\mu^2)=-i\lambda
$$

$$
\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}(p)|_{p^2=-\mu^2}=1
$$

$$
\Gamma^{(2)}(p^2=m^2)=0
$$

のように設定したときには β,γ は λ と m/μ に依存し、質量 m が固定されるので下で出てくる γ_m は出ないことになります ($p^2=-\mu^2$ と空間的にしているのは、こうしないと特異性を持ってしまうからです。質量なしの 4 点関数 $\Gamma^{(4)}(p_i)$ の 1 ループの計算結果を見てみるとわかりやすい)。また、今の場合とは状況が違うものとして、くり込み条件を質量殻上でのものを選んだ場合があります。この場合 μ が条件の中からいなくなり、質量 m による変化の式として求まります (このときの β,γ は λ にのみ依存する)。

このようにパラメータ μ の変化による方程式をくり込み群方程式 (renormalization group equation) と言います。質量殻上で選んだものは Callan-Symanzik 方程式と呼ばれ、μ による方程式とは特色が違ったものです。そして、ここで定義された β が結合定数の漸近的な振る舞いを調べるのに重要なものになっています。また、位置表示でやってきましたが、運動量表示でも全く同じ方程式が成り立ちます。

上で見てきた方法とは違う導出方法として、直接 μ で微分してくり込み群方程式は求めることもできます。ついでなので頂点関数 (有効作用) も一緒に行っておきます。くり込まれていない n 点関数 $G_0^{(n)},\Gamma_0^{(n)}$ は μ に依存していないことから

$$
\mu\frac{\partial}{\partial\mu}G_0^{(n)}=0
$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma_0^{(n)}=0$$

これに対して場へのくり込み定数 $Z(\phi_0=\sqrt{Z}\phi)$ を使って

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{n/2}G^{(n)})=0$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-n/2}\Gamma^{(n)})=0$$

を n 点関数が μ と λ の関数だとして微分を実行して (Z は μ に依存)、$G^{(n)}$ では $Z^{-n/2},\Gamma^{(n)}$ では $Z^{n/2}$ をかけて

$$\begin{aligned}
Z^{-n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{n/2}G^{(n)}) &= Z^{-n/2}(\mu\frac{\partial Z^{n/2}}{\partial\mu}+Z^{n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu})G^{(n)}\\
&= Z^{-n/2}(\frac{n}{2}\mu Z^{\frac{n}{2}-1}\frac{\partial Z}{\partial\mu}+Z^{n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+Z^{n/2}\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda})G^{(n)}\\
&= (\frac{n}{2}\mu Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda})G^{(n)}\\
&= (-n\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z^{-1/2}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda})G^{(n)}\\
Z^{n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-n/2}\Gamma^{(n)}) &= Z^{n/2}(-\frac{n}{2}\mu Z^{-\frac{n}{2}-1}\frac{\partial Z}{\partial\mu}+Z^{-n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+Z^{-n/2}\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda})\Gamma^{(n)}\\
&= (-\frac{n}{2}\mu Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda})\Gamma^{(n)}\\
&= (n\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z^{-1/2}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda})\Gamma^{(n)}
\end{aligned}$$

そして

$$\beta(\lambda)=\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\ \ ,\ \ \gamma(\lambda)=-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z^{-1/2}$$

として

$$(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+n\gamma(\lambda))G^{(n)}=0$$

$$(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}-n\gamma(\lambda))\Gamma^{(n)}=0$$

前の方法では μ を $\mu+\delta\mu$ に変化させたときに、くり込まれた場 ϕ が $(1+\delta\eta)\phi$ と変化するようにしてやりましたが、今度はくり込み定数 Z が変化するようにしたために $\gamma(\lambda)$ の方に Z が出てきています。これはくり込まれていない場 ϕ_0 は μ に依存してなく、Z が持つ μ によってくり込まれた場が μ 依存性を持つためです。つまり、

$$G^{(n)}=Z^{-n/2}G_0^{(n)}$$

として、

$$dG^{(n)} = \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \mu}\delta\mu + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda}\delta\lambda = G_0^{(n)}\frac{\partial Z^{-n/2}}{\partial \mu}\delta\mu$$

これから

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^{(n)}}{\partial \mu}\delta\mu + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial \lambda}\delta\lambda &= -\frac{n}{2}Z^{-\frac{n}{2}-1}G_0^{(n)}\frac{\partial Z}{\partial \mu}\delta\mu \\ &= -\frac{n}{2}G^{(n)}Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial \mu}\delta\mu \\ &= nG^{(n)}\frac{\partial}{\partial \mu}\log Z^{-1/2}\delta\mu\end{aligned}$$

後は $\mu/\delta\mu$ を両辺にかければ

$$(\mu\frac{\partial}{\partial \mu} + \mu\frac{\delta\lambda}{\delta\mu}\frac{\partial}{\partial \lambda} - n\mu\frac{\partial}{\partial \mu}\log Z^{-1/2})G^{(n)} = 0$$

このように同じ結果になります。

今度は質量がある場合で見ていきます。話は簡単で、$G^{(n)}$ がくり込まれた質量 m にも依存しているとすればいいだけなので、くり込み群方程式は

$$\begin{aligned}(\mu\frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu\frac{\partial m}{\partial \mu}\frac{\partial}{\partial m} - n\gamma(\lambda))\Gamma^{(n)} = 0 \\ (\mu\frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} + m\gamma_m(\lambda)\frac{\partial}{\partial m} - n\gamma(\lambda))\Gamma^{(n)} = 0 \qquad (5)\end{aligned}$$

$\gamma_m(\lambda)$ は

$$\gamma_m(\lambda) = \frac{\mu}{m}\frac{\partial m}{\partial \mu}$$

くり込み群方程式は変数の変化分を考えることで求められていので、運動量も変化する場合も考えます。そのために運動量に対してスケール変換を行います

$$\begin{aligned}p \quad &\Rightarrow \quad tp \\ \Gamma^{(n)}(p, m, \lambda, \mu) \quad &\Rightarrow \quad \Gamma^{(n)}(tp, m, \lambda, \mu)\end{aligned}$$

そして、$\Gamma^{(n)}$ の質量次元を D と書くことにして $([M^D])$、質量次元 $[M^{+1}]$ を持つのは他には運動量 p、質量 m、μ であることから、μ を $\Gamma^{(n)}(tp, m, \lambda, \mu)$ の外に出して

$$\Gamma^{(n)}(tp, m, \lambda, \mu) = \mu^D F(\lambda, \frac{tpm}{\mu^2})$$

と書き換えることができます (F は無次元の関数)。そうすると t, m, μ の微分はそれぞれ

$$t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(tp,m,\lambda,\mu)=t\mu^D\frac{pm}{\mu^2}$$

$$m\frac{\partial}{\partial m}\Gamma^{(n)}=m\mu^D\frac{tp}{\mu^2}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^{(n)}=\mu D\mu^{D-1}F-2\mu\mu^D\frac{tpm}{\mu^3}=D\mu^D F-2\mu^D\frac{tpm}{\mu^2}$$

となることから、全部を足して $D\mu^D F$ を引けば上手いこと 0 になるので

$$(t\frac{\partial}{\partial t}+m\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-D)\Gamma^{(n)}(tp,m,\lambda,\mu)=0$$

という関係になっていることがわかります。(5) からこれを引くことで

$$(-t\frac{\partial}{\partial t}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}+m(\gamma_m(\lambda)-1)\frac{\partial}{\partial m}+D-n\gamma(\lambda))\Gamma^{(n)}(tp,m,\lambda,\mu)=0 \tag{6}$$

という方程式が求められ、運動量のスケール変化によってどんな影響が起きるのかを表しています。運動量の変化によって何が起きるのか見ていきます。t の変化によって質量 m、結合定数 λ は変化するだろうことから、$m(t),\lambda(t)$ として

$$\Gamma^{(n)}(tp,m,\lambda,\mu)=f(t)\Gamma^{(n)}(p,m(t),\lambda(t),\mu)$$

であるようにします。これを t で微分します

$$\begin{aligned}
t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(tp,m,\lambda,\mu) &= t\frac{df(t)}{dt}\Gamma^{(n)}(p,m(t),\lambda(t),\mu)+tf(t)\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(p,m(t),\lambda(t),\mu)\\
&= t\frac{df(t)}{dt}\Gamma^{(n)}(p,m(t),\lambda(t),\mu)+tf(t)(\frac{\partial m(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m(t)}+\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\lambda(t)})\Gamma^{(n)}(p,m(t),\lambda(t),\mu)\\
&= t\frac{df(t)}{dt}\frac{1}{f(t)}\Gamma^{(n)}(tp,m,\lambda,\mu)+tf(t)(\frac{\partial m(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m(t)}+\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\lambda(t)})\frac{1}{f(t)}\Gamma^{(n)}(tp,m,\lambda,\mu)
\end{aligned}$$

なので両辺を移動させて

$$(-t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{t}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}+t\frac{\partial m(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m(t)}+t\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\lambda(t)})\Gamma^{(n)}(tp,m,\lambda,\mu)=0$$

これと (6) の結合定数の項を比べると

$$t\frac{\partial\lambda(t)}{\partial t}=\beta(\lambda) \tag{7}$$

となっていることがわかります。つまり、運動量のスケールによって結合定数が動くことを表しており、$\lambda(t)$ のことを running coupling constant と呼んでいます。日本語では有効結合定数や走る結合定数と言ったりもしますが、いまいち定着してなさそうなので英語のままにします。また、質量の項を比較すれば

$$t\frac{\partial m(t)}{\partial t} = m(\gamma_m(\lambda) - 1)$$

つまり、スケールの変化によって質量も変化します。残った項は

$$\frac{t}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = D - n\gamma(\lambda)$$

であり、これによって $f(t)$ は

$$\begin{aligned}
\frac{df}{f} &= \frac{D - n\gamma(\lambda)}{t}dt \\
\log f &= D\log t - \int_1^t \frac{n\gamma}{t}dt \\
\log\frac{f}{t^D} &= -\int_1^t \frac{n\gamma}{t}dt \\
\frac{f}{t^D} &= \exp[-\int_1^t \frac{n\gamma}{t}dt] \\
f &= t^D \exp[-\int_1^t \frac{n\gamma}{t}dt]
\end{aligned}$$

$\epsilon \to 0$ として

$$f = t^{4-n}\exp[-\int_1^t \frac{n\gamma}{t}dt]$$

これによって (4) の解として

$$\Gamma^{(n)}(tp, m, \lambda, \mu) = t^{4-n}\exp[-\int_1^t \frac{n\gamma(\lambda(t))}{t}dt]\Gamma^{(n)}(p, m(t), \lambda(t), \mu) \tag{8}$$

となります。

ここでは質量は無視して、t の増加による結合定数の振るまいについてみていくことにします。そして質量なしだとすれば、ラグランジアンはスケール不変になっているんですが、最後に見るように相関関数は不変になっていません。

まずは運動量スケールの変化によって結合定数がどうなるのか見ていきたいので、$\beta(\lambda)$ を求めます。考えるのは 1 ループまでにします。結合定数は相殺項で出てきた

$$\lambda_B = \mu^\epsilon Z_\lambda \lambda$$

$$Z_\lambda = \frac{1+B}{(1+A)^2}\ ,\ B = \frac{3\lambda}{16\pi^2\epsilon}$$

を使えばよくて、1 ループでは A は寄与しないので $Z_\lambda = 1 + B$ になり、λ_B は μ を含んでいないので、μ で微分すれば消えます。μ で微分すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \epsilon\mu^{\epsilon-1}Z_\lambda\lambda + \mu^\epsilon\frac{\partial Z_\lambda}{\partial\mu}\lambda + \mu^\epsilon Z_\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} \\
&= \epsilon\mu^{\epsilon-1}Z_\lambda\lambda + \mu^\epsilon\frac{3\lambda}{16\pi^2\epsilon}\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} + \mu^\epsilon Z_\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} \\
\mu^\epsilon(\frac{3\lambda}{16\pi^2\epsilon} + Z_\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} &= -\epsilon\mu^{\epsilon-1}Z_\lambda\lambda \\
\mu^\epsilon(1 + \frac{6\lambda}{16\pi^2\epsilon})\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} &= -\epsilon\mu^{\epsilon-1}Z_\lambda\lambda \\
\mu^\epsilon\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} &= -\epsilon\mu^{\epsilon-1}Z_\lambda\lambda(1 - \frac{6\lambda}{16\pi^2\epsilon}) \\
&= -\epsilon\mu^{\epsilon-1}\lambda Z_\lambda + \frac{6\lambda^2}{16\pi^2}\mu^{\epsilon-1}Z_\lambda \\
&= -\epsilon\mu^{\epsilon-1}\lambda(1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2\epsilon}) + \frac{6\lambda^2}{16\pi^2}\mu^{\epsilon-1}(1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2\epsilon}) \\
&= -\epsilon\mu^{\epsilon-1}\lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\mu^{\epsilon-1} + \frac{6\lambda^2}{16\pi^2}\mu^{\epsilon-1} + O(\lambda^3) \\
&= -\epsilon\mu^{\epsilon-1}\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\mu^{\epsilon-1} + O(\lambda^3) \\
\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} &= -\epsilon\mu^{-1}\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\mu^{-1} + O(\lambda^3)
\end{aligned}
$$

両辺に μ をかけて、$\epsilon \to 0$ とすれば

$$
\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3)
$$

そして β の定義である

$$
\beta(\lambda) = \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}
$$

これによって、β は

$$
\beta = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3)
$$

という結果になります。そうすると $\lambda(t)$ に対する方程式 (7) は、β に対する微分が偏微分でなく通常の微分でも本質的に変わらないので、

$$
\beta(\lambda) = t\frac{d\lambda(t)}{dt}
$$

よって、running coupling constant $\lambda(t)$ に対する方程式として

$$
t\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}
$$

t を $\log t = s$ と変数変換すれば

$$
t\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{d}{ds}
$$

なので

$$\frac{d\lambda(s)}{ds} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}$$

見て分かるように、右辺は正なので s の増加に伴って λ も増加することになり、これは運動量の増加に伴って結合定数が増えていくことを意味します。実際にこれを積分して $\lambda(s)$ を求めてみると

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{\lambda^2} &= \int \frac{3}{16\pi^2} ds \\ -\frac{1}{\lambda} &= \frac{3}{16\pi^2} s + C \end{aligned}$$

$s = s_0$ で λ' だとすれば

$$C = -\frac{3}{16\pi^2} s_0 - \frac{1}{\lambda'}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= -\frac{3}{16\pi^2} s + \frac{3}{16\pi^2} s_0 + \frac{1}{\lambda'} \\ \lambda(s) &= \frac{16\pi^2\lambda'}{-3\lambda(s - s_0) + 16\pi^2} \\ &= \frac{\lambda'}{1 - \frac{3}{16\pi^2}\lambda'(s - s_0)} \\ &= \frac{\lambda'}{1 - a\lambda'(s - s_0)} \quad (a = \frac{3}{16\pi^2}) \\ \lambda(t) &= \frac{\lambda'}{1 - a\lambda \log(t/t_0)} \end{aligned}$$

となります。パラメータ μ が t によって $\mu(t) = t\mu = e^s\mu$ のようにスケール変換されているなら

$$s = \log \frac{\mu(t)}{\mu}$$

ということから

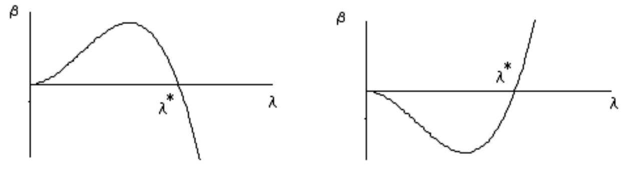
$$\lambda(t) = \frac{\lambda'}{1 - a\lambda \log(\mu(t)/\mu_0)}$$

$\lambda(t)$ は運動量を上げていけば、結合定数は増加していくという性質を持っていることが分かります。そして分母を見てわかるように

$$t = t_0 \exp[\frac{1}{a\lambda'}]$$

ここで発散します。発散すること自体はいいんですが、これは 1 ループまででの近似による結果なので running coupling constant を大きくしていくとこの近似ではダメになり、高次まで考えないといけなくなっています。高

次からの寄与はマイナスになっているので、β は λ の増加によってどこかで 0 になると考えることが出来ます。そのときの固定点を λ^* とします。これはグラフにすれば



(a) (b)

となっていることになります。この二つの図は β の符号が逆になっているだけです。β と $\lambda(t)$ の関係は

$$\beta = t\frac{d\lambda}{dt}$$

これより (a) で、$\lambda(t)$ が 0 と λ^* の間、つまり $\beta > 0$ では t の増加に対して λ も増加していき、$t \to \infty$ で λ^* に到達します。これは λ^* の付近の領域で

$$\frac{d\beta}{d\lambda} < 0$$

となっているためで、傾きが正の定数 B になっているとして

$$\frac{d\beta}{d\lambda} \simeq -B$$

これは

$$\beta = -B\lambda + C$$

$\lambda = \lambda^*$ で $\beta = 0$ になるので $C = B\lambda^*$

$$\beta = -B(\lambda - \lambda^*)$$

そうすると、$\beta = td\lambda/dt$ なので

$$\begin{aligned} t\frac{d\lambda}{dt} &= -B(\lambda - \lambda^*) \\ \log[\lambda - \lambda^*] &= -B\log t \\ \lambda &= \lambda^* + (\frac{1}{t})^B \end{aligned}$$

見て分かるように $t \to \infty$ で λ^* になっています。(b) の方では、$\beta < 0$ で t の増加に伴って λ は減少していくので $t = 0$ で λ^* に到達します。このため (a) での λ^* を紫外固定点 (ultraviolet stable fixed point)、(b) での λ^* を赤外固定点 (infrared stable fixed point) と呼びます。(b) の方ではエネルギースケールをあげていくことで結合定数は減少していき、$t \to \infty$ で漸近的に 0 に近づきます。このように大きいエネルギーで結合定数が 0 になることを漸近的自由 (asymptotic freedom) と言います。今みている ϕ^4 理論は (a) の方なので漸近的自由にはなっていませ

ん。他には電磁相互作用は (a) なので漸近的自由でなく、強い相互作用は (b) なので漸近的自由です。このことから、QED では結合定数が運動量の増加に伴って発散していくので、摂動論が使えないように思えるんですが QED での結合定数はかなり小さいものになっているために相当な高エネルギー領域に行かない限り摂動論は使えます。また、強い相互作用の理論である QCD では高エネルギー領域では摂動論が使え、低エネルギー領域で摂動論が使えないという面倒なことが起きます。QCD の摂動論が使えなくなるのは大体 500MeV から 1GeV あたりで (フレーバの数によってかなり変動し、これはフレーバー数が 6 の場合)、これ以下のエネルギー領域では摂動論は使えません。このため、この低エネルギー領域では QCD のラグランジアンを使わずに有効と思えるラグランジアンを仮定して新しい現象論的モデルを使って現象を説明するか、格子 QCD(lattice QCD) による数値シミュレーションを行って解析しているようです。

最後に $\gamma(\lambda)$ に触れておきます。(8 において、$\Gamma^{(2)}$ だとして $\lambda=\lambda^*$ の近くでは

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(tp,\lambda,\mu) &= t^2\exp[-\int_1^t\frac{2\gamma(\lambda^*)}{t}dt]\Gamma^{(n)}(p,\lambda(t),\mu)\\
&= \exp[\log t^2-\int_1^t\frac{2\gamma(\lambda^*)}{t}dt]\Gamma^{(n)}(p,m(t),\lambda(t),\mu)\\
&\simeq \exp[\log t^2-\int_1^t\frac{2\gamma(\lambda^*)}{t}dt]\Gamma^{(2)}(p,\lambda^*,\mu)\\
&= \exp[2(1-\gamma(\lambda^*)\log t]\Gamma^{(2)}(p,\lambda^*,\mu)\\
&\simeq (t^2)^{1-\gamma(\lambda^*)}C
\end{aligned}
$$

となります。これは簡単に言えば、t は運動量を動かすスケール因子なので、2 点関数での p^2 に作用するために次元解析から見れば単純に t^2 であるはずなんですが、そこに $-\gamma(\lambda^*)$ がくっついているためにズレが起きています。そのため $\gamma(\lambda^*)$ のことを異常次元 (anomalous dimension) と呼び、大抵は $\gamma(\lambda)$ でも異常次元と呼んでいます。