くり込み群方程式〜QED〜

QED でのくり込み群方程式の作り方は ϕ^4 理論と同じなので、最初から n 点関数でなく 2 点関数を使います。ただ、2 点関数としては電子のものと、光子のものがあるというのと、ゲージパラメータが出てきます。ここでは光子の 2 点関数 $\Gamma^{(2)}_{\mu\nu}$ を使い、簡単にするために $\Gamma_{\mu\nu}$ は光子の 2 点関数であるとします。
くり込まれていない 2 点関数を $\Gamma^{\mu\nu}_B$、くり込んだものを $\Gamma^{\mu\nu}$ と書けば (くり込まれていない量には添え字に B をつけます)、電磁場に対するくり込み定数 $Z_3(A_B=\sqrt{Z_3}A)$ を使って

$$\Gamma^{\mu\nu}(p,e,m,\alpha,\mu)=Z_3\Gamma^{\mu\nu}_0(p,e_B,m_B,\alpha_B)$$

e は電荷、m は質量、α はゲージパラメータです。で、$\Gamma^{\mu\nu}_B$ は μ 依存性がないので μ で微分すれば 0 です。というわけで、ϕ^4 理論と同じように

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_3^{-1}\Gamma^{\mu\nu})=0$$

なので (Z_3 は μ に依存する)

$$\begin{aligned}Z_3^{-1}\mu\frac{\partial\Gamma^{\mu\nu}}{\partial\mu}-Z_3^{-2}\mu\frac{\partial Z_3}{\partial\mu}\Gamma^{\mu\nu}&=0\\ \mu\frac{\partial\Gamma^{\mu\nu}}{\partial\mu}-Z_3^{-1}\mu\frac{\partial Z_3}{\partial\mu}\Gamma^{\mu\nu}&=\end{aligned}$$

そして $\Gamma^{\mu\nu}$ の変数である e,m,α も μ に依存する量なので $\Gamma^{\mu\nu}$ の微分は

$$\mu\frac{\partial\Gamma^{\mu\nu}}{\partial\mu}=\mu(\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{\partial e}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial e}+\frac{\partial m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m}+\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha})\Gamma^{\mu\nu}$$

よって

$$\mu(\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{\partial e}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial e}+\frac{\partial m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m}+\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha}-Z_3^{-1}\frac{\partial Z_3}{\partial\mu})\Gamma^{\mu\nu}=0$$

となり、記号として

$$\beta=\mu\frac{\partial e}{\partial\mu}\ ,\ \gamma_m=-\mu m^{-1}\frac{\partial m}{\partial\mu}\ ,\ \gamma_\alpha=\mu\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\ ,\ \gamma_Z=\frac{\mu}{2}Z_3^{-1}\frac{\partial Z_3}{\partial\mu}$$

このように定義すれば

$$(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial e}-m\gamma_m\frac{\partial}{\partial m}+\gamma_\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-2\gamma_Z)\Gamma^{\mu\nu}=0 \tag{1}$$

これが QED でのくり込み群方程式です。ϕ^4 理論とほとんど変わらない形をしているので、これ以降の話も全く ϕ^4 理論と同じになります。なので細かいことは飛ばしていきます。
次は運動量のスケール変換 $p\to tp$ を行います。そうすると

$$\Gamma^{\mu\nu}(tp,e,m,\alpha,\mu)=\mu^D F^{\mu\nu}(e,\alpha,\frac{tpm}{\mu^2})$$

($F^{\mu\nu}$ は無次元、D は $\Gamma^{\mu\nu}$ の次元で今の場合は 2)。そして t,m,μ でそれぞれ微分し

$$t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{\mu\nu}(tp,e,m,\alpha,\mu)=t\mu^D\frac{pm}{\mu^2}$$

$$m\frac{\partial}{\partial m}\Gamma^{\mu\nu}(tp,e,m,\alpha,\mu)=m\mu^D\frac{tp}{\mu^2}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^{(n)}=\mu D\mu^{D-1}F-2\mu\mu^D\frac{tpm}{\mu^3}=D\mu^D F-2\mu^D\frac{tpm}{\mu^2}$$

今は $D=2$ なので、この 3 つを足したものから 2 を引くことで

$$(t\frac{\partial}{\partial t}+m\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-2)\Gamma^{\mu\nu}(tp,e,m,\alpha,\mu)=0$$

(1) からこれを引けば

$$\big(-t\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial}{\partial e}-m(\gamma_m+1)\frac{\partial}{\partial m}+\gamma_\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-2(\gamma_Z-1)\big)\Gamma^{\mu\nu}(tp,e,m,\alpha,\mu)=0 \tag{2}$$

となります。
そして次に、質量 m と電荷 e とゲージパラメータ α がスケール変換の t に依存するとして、ϕ^4 理論と同じように

$$\Gamma^{\mu\nu}(tp,e,m,\alpha,\mu)=f(t)\Gamma^{\mu\nu}(p,e(t),m(t),\alpha(t),\mu)$$

このようになっているとします。で、t で微分すると

$$\big(-t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{t}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}+t\frac{\partial e(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial e(t)}+t\frac{\partial m(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m(t)}+t\frac{\partial\alpha(t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\alpha(t)}\big)\Gamma^{\mu\nu}(tp,m,\alpha,\mu)=0$$

そうすると、(2) との比較から

$$t\frac{\partial e(t)}{\partial t}=\beta \tag{3}$$

$$t\frac{\partial m(t)}{\partial t}=-m(\gamma_m(\lambda)+1)$$

$$t\frac{\partial\alpha(t)}{\partial t}=\gamma_\alpha$$

$$\frac{t}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}=-2(\gamma_Z-1)$$

で、結合定数の振る舞いが知りたいので β を見ていきます (ちなみに γ_Z は異常次元と関係します)。電荷のくり込みは

$$e_B = \mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1} e$$

であり、１ループの結果から求められた Z_3 を入れることで

$$e_B = \mu^{\epsilon/2} e(1 + \frac{e^2}{12\pi^2 \epsilon})$$

両辺を μ で微分すると、左辺は 0 なので

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\epsilon}{2}\mu^{\epsilon/2-1} e(1+\frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}) + \mu^{\epsilon/2}\frac{\partial e}{\partial \mu}(1+\frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}) + \mu^{\epsilon/2}\frac{2e^2}{12\pi^2\epsilon}\frac{\partial e}{\partial \mu} \\
-\mu^{\epsilon/2}\frac{\partial e}{\partial \mu}(1+\frac{3e^2}{12\pi^2\epsilon}) &= \frac{\epsilon}{2}\mu^{\epsilon/2-1} e(1+\frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}) \\
-\frac{\partial e}{\partial \mu}(1+\frac{3e^2}{12\pi^2\epsilon}) &= \frac{\epsilon}{2}\mu^{-1} e(1+\frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}) \\
-\frac{\partial e}{\partial \mu} &= \frac{\epsilon}{2}\mu^{-1} e(1+\frac{e^2}{12\pi^2\epsilon})(1-\frac{3e^2}{12\pi^2\epsilon}) \\
\frac{\partial e}{\partial \mu} &= -\frac{\epsilon}{2}\mu^{-1} e(1-\frac{2e^2}{12\pi^2\epsilon}-\frac{e^4}{48\pi^4\epsilon^2}) \\
\mu\frac{\partial e}{\partial \mu} &= -\frac{\epsilon}{2}e + \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{96\pi^4\epsilon}
\end{aligned}$$

これの右辺第三項を無視すれば、β は $\epsilon \to 0$ の極限で

$$\beta = \frac{e^3}{12\pi^2}$$

そうすると、β は ϕ^4 理論の λ と同じ格好をしていることから運動量の増加によって e は増加します。その形は

$$t\frac{de(t)}{dt} = \frac{e^3(t)}{12\pi^2}$$

を解けばよく、t を $\log t = s$ と変数変換して

$$\frac{de(s)}{ds} = \frac{e^3(s)}{12\pi^2}$$

これを計算すると

$$\begin{aligned}
\int \frac{de}{e^3} &= \int \frac{1}{12\pi^2} ds \\
-\frac{1}{2}e^{-2} &= \frac{s}{12\pi^2} + C
\end{aligned}$$

$s = s_0$ で e' になっているとして

$$C = -\frac{1}{12\pi^2}s_0 - \frac{1}{2e'^2}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}e^{-2} &= -\frac{1}{12\pi^2}s + \frac{1}{12\pi^2}s_0 + \frac{1}{2e'^2} \\
e^{-2} &= -\frac{2e'^2(s-s_0) - 12\pi^2}{12\pi^2 e'^2} \\
e^2 &= \frac{-6\pi^2 e'^2}{e'^2(s-s_0) - 6\pi^2} \\
&= \frac{e'^2}{1 - \frac{e'^2(s-s_0)}{6\pi^2}} \\
&= \frac{e'^2}{1 - \frac{e'^2}{6\pi^2}\log\frac{t}{t_0}}
\end{aligned}$$

これが QED での running coupling constant です。そして ϕ^4 理論の結果と係数が違っているだけのものになります。なので、同様に

$$t = t_0 \exp[\frac{6\pi^2}{e'^2}]$$

において特異点を持ち、ランダウ特異点とか名前がついています。
このように、QED では運動量を上げていくと、微細構造定数 $e^2/4\pi$ というのは増加していきます。そのため、高い運動量においては摂動論が破綻するんですが、そんな高い運動量領域で考えなければいいだろうとしています。