シュウィンガー・ダイソン方程式

古典的な解析力学において、変分を加えたときに作用の変分 δS が 0 になるようにすることで、オイラー・ラグランジュ方程式が出てき、そこから運動方程式は求まりました。このことを量子論的に扱い、量子論的な運動方程式と考えられている、相関関数 (グリーン関数) に対する方程式を求めます。それがシュウィンガー・ダイソン方程式です。発想は、解析力学での作用が位置 x の変分に対して変化しないということを場による経路積分上で使うというものです。
ついでに、保存則の関係も出します。

実数スカラー場だとして、経路積分での生成汎関数 Z は

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x\big(\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x)\big)\Big]$$

ラグランジアン $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$ は簡略化して $\mathcal{L}(\phi)$ と書きます。これ ϕ の微小な変分を考え

$$\phi'(x) = \phi(x) + \epsilon(x)$$

生成汎関数から始めても出てきますが、まずは相関関数を使っていきます。具体的に Z を 3 回汎関数微分して 3 点相関関数

$$\begin{aligned}\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3))|0\rangle &= (\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J})^3 Z[J]|_{J=0} \\ &= \frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}(\phi)\Big]\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\end{aligned}$$

から始めた場合を見ます (T は時間順序積)。相関関数が場の変分に対して不変であると考えれば、ϕ と ϕ' による相関関数は等しくなっているはずです。このことは作用が ϕ の変分に対して不変になるということ、言い換えれば ϕ' による生成汎関数と ϕ による生成汎関数が等しいとすることと同じです。ここの考え方は解析力学と変わっていません。というわけで、

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}(\phi)\Big]\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) = \int \mathcal{D}\phi' \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}(\phi')\Big]\phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3) \tag{1}$$

右辺を ϕ の式にして、ϵ が一次の項まで生き残らせます。$\mathcal{L}(\phi')$ を展開すると ϕ と $\partial_\mu\phi$ の二つがいて面倒なので、作用

$$S[\phi] = \int d^4x\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$$

の変化を見ます。こうすれば ϕ の汎関数微分 1 つですみます。というわけで、汎関数での展開によって

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi' \exp\big[iS[\phi']\big]\phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3) \\
&\quad = \int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi+\epsilon]\big]\big(\phi(x_1)+\epsilon(x_1))(\phi(x_2)+\epsilon(x_2))(\phi(x_3)+\epsilon(x_3)\big) \\
&\quad \simeq \int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]+i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\big] \\
&\qquad\qquad \times \big(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3)+\epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3)\big)
\end{aligned}
$$

これを (1) に入れれば

$$
\begin{aligned}
0 = &\int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]\big]\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&\quad - \int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]+i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\big] \\
&\qquad \times (\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3)+\epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3)) \\
= &\int \mathcal{D}\phi \Big(\exp\big[iS[\phi]\big]-\exp\big[iS[\phi]+i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\big]\Big)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&\quad - \int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]+i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\big](\phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3)+\epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3))
\end{aligned}
$$

$\exp[iS[\phi]+i\epsilon\delta S/\delta\phi]$ の部分は ϵ の 1 次までで展開すれば

$$
\exp\big[iS[\phi]+i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\big] = \exp\big[iS[\phi]\big]\Big(1+i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\Big)
$$

なので

$$
\begin{aligned}
0 = &\int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]\big]\Big(-i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\Big) \\
&- \int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]\big]\Big(1+i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x))(\phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3)+\epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3)\Big) \\
\simeq &\int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]\big]\Big(-i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\Big) \\
&- \int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]\big](\phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3)+\epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3)) \\
= &\int \mathcal{D}\phi \exp\big[iS[\phi]\big]\Big(-i\int d^4x \frac{\delta S}{\delta\phi}\epsilon(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&- (\phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3)+\epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3))\Big)
\end{aligned}
$$

これがラグランジアンを特定していないときの実数スカラー場の一般的な形で、場 ϕ の数もこの形のまま一般化できます。

具体的にラグランジアンが相互作用のない

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2$$

とすれば、汎関数微分の性質とラグランジアンの変数が $\phi,\partial_\mu\phi$ ということから、S の汎関数微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta\phi(y)} &= \frac{\delta}{\delta\phi(y)}\int d^4x\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)) \\
&= \int d^4x\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta^4(x-y)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\partial_\mu\delta^4(x-y)\Big) \\
&= \int d^4x\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta^4(x-y)-\delta^4(x-y)\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\Big) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(y)}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(y))} \\
&= -(\Box\phi+m^2\phi)
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
0=\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\Big(&i\int d^4x\epsilon(x)(\Box\phi(x)+m^2\phi(x))\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&-\big(\phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3)+\epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3)\big)\Big)
\end{aligned}$$

exp の中と外で同じ x 積分で書いていますが、積分間の関連はないです。これ以降も exp 内の積分と外の積分の変数を同じにして書いてしまいます。括弧内の第二項は積分

$$\int d^4x\epsilon(x)\delta^4(x-x_1)=\epsilon(x_1)$$

を使えば

$$\begin{aligned}
&\phi(x_1)\epsilon(x_2)\phi(x_3)+\epsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\epsilon(x_3) \\
&\quad=\int d^4x\big(\delta^4(x-x_2)\epsilon(x)\phi(x_1)\phi(x_3)+\delta^4(x-x_1)\epsilon(x)\phi(x_2)\phi(x_3)+\delta^4(x-x_3)\epsilon(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\big)
\end{aligned}$$

とできるので

$$\begin{aligned}
0=\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\int d^4x\epsilon(x)\big[&i(\Box\phi(x)+m^2\phi(x))\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&-\big(\delta^4(x-x_2)\phi(x_1)\phi(x_3)+\delta^4(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\delta^4(x-x_3)\phi(x_1)\phi(x_2)\big)\big]
\end{aligned}$$

というわけで、任意の ϵ に対してこの式が成り立つためには

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\big\{i(\Box+m^2)\phi(x)\big\}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&\quad= \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\delta^4(x-x_2)\phi(x_1)\phi(x_3)+\delta^4(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\delta^4(x-x_3)\phi(x_1)\phi(x_2)
\end{aligned} \tag{2}$$

このようになっていればいいです。左辺の $(\Box+m^2)$ は積分の外に出してしまえるので

$$\int \mathcal{D}\phi\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)=\langle 0|\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle$$

右辺も同様に書き換えることで

$$\begin{aligned}
&i(\Box+m^2)\langle 0|\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle \\
&\quad=\delta^4(x-x_1)\langle 0|\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle+\delta^4(x-x_2)\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_3)|0\rangle+\delta^4(x-x_3)\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle
\end{aligned}$$

というわけで、4 点相関関数に対する方程式が求まりました。このように、経路積分 (汎関数積分) による表現が微分方程式 (汎関数微分方程式) に変わっています。こうして導かれた相関関数に関する運動方程式がシュウィンガー・ダイソン方程式 (Schwinger-Dyson equation) と呼ばれます。この微分方程式が厳密に解けるなら、相関関数を摂動論に頼らずに求めることができます。

変分をとって律義に展開して計算しましたが、ようは ϕ で相関関数を汎関数微分して 0 になればいいというだけの話で、実際に

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\int \mathcal{D}\phi\exp[iS[\phi]]\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&=\int \mathcal{D}\phi\exp[iS[\phi]]\Big(i\int d^4x\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(y)}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&\qquad\qquad +\delta^4(x_1-y)\phi(x_2)\phi(x_3)+\delta^4(x_2-y)\phi(x_1)\phi(x_3)+\delta^4(x_3-y)\phi(x_1)\phi(x_2)\Big) \\
&=\int \mathcal{D}\phi\exp[iS[\phi]]\Big(i(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)})\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \\
&\qquad\qquad +\delta^4(x_1-y)\phi(x_2)\phi(x_3)+\delta^4(x_2-y)\phi(x_1)\phi(x_3)+\delta^4(x_3-y)\phi(x_1)\phi(x_2)\Big)
\end{aligned}$$

というわけで、同じ結果になります。ただ、今のやり方だと相関関数が connnected になっているものだけを取り出すようになっていなく、いろいろと使いづらいので、connected になるように $W=-i\log Z$ を使った形にします。

実数スカラー場として

$$Z[J]=\frac{1}{N}\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J\phi)\Big]$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

この生成汎関数 $Z[J]$ が ϕ の汎関数微分によって 0 になればいいので

$$\frac{\delta Z}{\delta \phi(y)} = 0 = i\int \mathcal{D}\phi \int d^4x\Big(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)} + J\delta^4(x-y)\Big)\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)\Big]$$

$\delta S/\delta\phi$ の変数が後ろの exp に掛かる微分演算子だと置き換えて

$$\begin{aligned} 0 &= i\int d^4x\Big(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}[\frac{\delta}{i\delta J}] + J\delta^4(x-y)\Big)\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)\Big] \\ &= i\int d^4x\Big(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}[\frac{\delta}{i\delta J}] + J\delta^4(x-y)\Big)Z[J] \end{aligned}$$

汎関数微分は上でやったように

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\int d^4x\mathcal{L} = \int d^4x\big((\partial_\mu\phi(x))\partial^\mu\delta^4(x-y) + \delta^4(x-y)m^2\phi(x)\big) = -\int d^4x\delta^4(x-y)(\Box_x + m^2)\phi(x)$$

なので

$$\begin{aligned} 0 &= i\big((-\Box_y - m^2)\frac{\delta}{i\delta J(y)} + J(y)\big)Z[J] \\ J(y)Z &= (\Box_y + m^2)\frac{\delta}{i\delta J(y)}Z[J] \\ J(y)Z &= (\Box_y + m^2)\frac{i\delta W}{i\delta J(y)}Z[J] \qquad (Z = \exp[iW]) \\ J(y) &= (\Box_y + m^2)\frac{\delta W}{\delta J(y)} \end{aligned}$$

W は connected な相関関数の生成汎関数です。これが生成汎関数から始めた時の最初に出てくる運動方程式で、これは 1 点相関関数に対するシュウィンガー・ダイソン方程式です。$J(y')$ でもう 1 回汎関数微分すれば

$$(\Box_y + m^2)\frac{\delta W}{\delta J(y')\delta J(y)} = (\Box_y + m^2)\langle 0|\phi(y')\phi(y)|0\rangle = -i\delta^4(y'-y)$$

$$\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta W}{\delta J(y')\delta J(y)} = \langle 0|\phi(y')\phi(y)|0\rangle\Big)$$

これは最初のやり方で $\langle 0|\phi|0\rangle$ という 1 点相関関数から始めた場合の結果と同じです。生成汎関数から始めたほうが便利なのは、途中で connnected な相関関数を取り出す W にできるからです。

　さらに相互作用がある場合を具体的に見るために、ϕ^4 理論

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}+J\phi)\Big]$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(y)} = \int d^4x \big(\delta^4(x-y)(-\Box_x - m^2)\phi(x) - \frac{\lambda}{6}\phi^3\delta^4(x-y)\big)$$

での厳密な伝播関数の方程式を求めます。これによる生成汎関数の ϕ 汎関数微分が 0 になるとして ($J(y)$ は J と書くことにします)

$$\begin{aligned}
0 &= i\int d^4x \big(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}[\frac{\delta}{i\delta J(x)}] + J(x)\delta^4(x-y)\big)Z \\
&= i\big[-(\Box + m^2)\frac{\delta}{i\delta J} + J - \frac{\lambda}{6}(\frac{\delta}{i\delta J})^3\big]Z \\
JZ &= \big[(\Box + m^2)\frac{\delta}{i\delta J} + \frac{\lambda}{6}(\frac{\delta}{i\delta J})^3\big]\exp[iW] \\
&= (\Box + m^2)\frac{\delta W}{\delta J}Z + \frac{\lambda}{6}(\frac{\delta}{i\delta J})^2\frac{\delta W}{\delta J}\exp[iW] \\
&= (\Box + m^2)\frac{\delta W}{\delta J}Z + \frac{\lambda}{6}(\frac{\delta}{i\delta J})(\frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}Z + \frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J}Z) \\
&= (\Box + m^2)\frac{\delta W}{\delta J}Z + \frac{\lambda}{6}\big(\frac{\delta^3 W}{i^2\delta J^3}Z + \frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}\frac{\delta W}{\delta J}Z + \frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}\frac{\delta W}{\delta J}Z + \frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}Z + \frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J}Z\big) \\
J &= (\Box + m^2)\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\lambda}{6}\big(\frac{\delta^3 W}{i^2\delta J^3} + \frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta^2 W}{i\delta J^2} + \frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J}\big) \\
&= (\Box + m^2)\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\lambda}{6}\big(\frac{\delta^3 W}{i^2\delta J^3} + 3\frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}\frac{\delta W}{\delta J} + \frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J}\big) \qquad (3)
\end{aligned}$$

この式をもっと分かりやすいものにするために、「自己エネルギーと頂点関数」で出てきた

$$\frac{\delta W}{\delta J} = \langle\phi\rangle_J = \phi_c \ \Rightarrow\ \frac{\delta W}{\delta J}|_{J=0} = \langle\phi\rangle_0 = \phi_0 \qquad (4)$$

を使います。ϕ_c は外場 J があるときの真空期待値で、$J=0$ での真空期待値が ϕ_0 です。また、厳密な connected な n 点相関関数は

$$G^{(n)}_{con} = \frac{1}{i^{n-1}}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}$$

$J=0$ として (4) とこれを (3) に入れれば

$$\begin{aligned}
0 &= (\Box + m^2)\phi_0 + \frac{\lambda}{6}(G^{(3)}_{con} + 3G^{(2)}_{con}\phi_0 + \phi_0^3) \\
&= m^2\phi_0 + \frac{\lambda}{6}\big(G^{(3)}_{con}(y,y,y) + 3G^{(2)}_{con}(y-y)\phi_0 + \phi_0^3\big)
\end{aligned}$$

ϕ_0 は真空期待値なので定数であることから $\phi_0 = 0$ でなくても微分は消えます。これがまず最初に出てくる ϕ^4 理論でのシュウィンガー・ダイソン方程式です。ただし、今の場合真空期待値 ϕ_0 は 0 になっているので、$G^{(3)}_{con}(y,y,y) = 0$ という式になります。

(3) を J で汎関数微分して $J=0$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\delta(x-y) = \Big[&(\Box+m^2)\frac{\delta W}{\delta J(x)\delta J(y)}\\
&+\frac{\lambda}{6}(\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta^3 W}{i^2\delta J^3}+3(\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta^2 W}{i\delta J^2})\frac{\delta W}{\delta J}+3\frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta W}{\delta J}+3(\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta W}{\delta J})\frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J})\Big]\Big|_{J=0}\\
=\Big[&i(\Box+m^2)\frac{\delta W}{i\delta J(x)\delta J(y)}\\
&+\frac{\lambda}{6}(i\frac{\delta^4 W}{i^3\delta J(x)\delta J^3}+3(i\frac{\delta^3 W}{i\delta J(x)i\delta J^2})\frac{\delta W}{\delta J}+3\frac{\delta^2 W}{i\delta J^2}i\frac{\delta^2 W}{i\delta J(x)\delta J}+3(i\frac{\delta^2 W}{i\delta J(x)\delta J})\frac{\delta W}{\delta J}\frac{\delta W}{\delta J})\Big]\Big|_{J=0}\\
=\ &i(\Box+m^2)G^{(2)}_{con}(x-y)+\frac{\lambda}{6}\big(iG^{(4)}_{con}(x-y,0)+3iG^{(3)}_{con}(x,0)\frac{\delta W}{\delta J}|_{J=0}\\
&\qquad\qquad+3iG^{(2)}_{con}(x-y)G^{(2)}_{con}(0)+3iG^{(2)}_{con}(x-y)\frac{\delta W}{\delta J}|_{J=0}\frac{\delta W}{\delta J}|_{J=0}\big)\\
=\ &i(\Box+m^2)G^{(2)}_{con}(x-y)\\
&+\frac{\lambda}{6}\big(iG^{(4)}_{con}(x-y,0)+3iG^{(3)}_{con}(x,0)\phi_0+3iG^{(2)}_{con}(x-y)G^{(2)}_{con}(0)+3iG^{(2)}_{con}(x-y)\phi_0^2\big)
\end{aligned}
$$

最後に行く時に (4) を使っています。$J=0$ で真空期待値 ϕ_0 が消えてくれるので

$$
\begin{aligned}
\delta(x-y) &= i(\Box+m^2)G^{(2)}_{con}(x-y)+\frac{\lambda}{6}\big(iG^{(4)}_{con}(x-y,0)+3iG^{(2)}_{con}(x-y)G^{(2)}_{con}(0)\big)\\
-i\delta(x-y) &= (\Box+m^2)G^{(2)}_{con}(x-y)+\frac{\lambda}{6}\big(G^{(4)}_{con}(x-y,0)+3G^{(2)}_{con}(x-y)G^{(2)}_{con}(0)\big)\\
&= \big(\Box+m^2+\frac{\lambda}{2}G^{(2)}_{con}(0)\big)G^{(2)}_{con}(x-y)+\frac{\lambda}{6}G^{(4)}_{con}(x-y,0)
\end{aligned}
$$

これが厳密な伝播関数 (2 点相関関数) に対するシュウィンガー・ダイソン方程式です。このようにして厳密な伝播関数を求めることができるので、この方程式から出発した結果は非摂動的なものになります。第一項の $G^{(2)}_{con}(0)$ は 1 ループの図に対応したものなので、摂動的に 1 ループまでしか考えなければ、第一項での質量のくり込みで話は済み、$\Box+m^2_{phy}$ の逆が $G^{(2)}_{con}(x-y)$ になります。このようにシュウィンガー・ダイソン方程式による結果は摂動論と一致します (していないといけない)。また、これ以降さらに J で微分したものもシュウィンガー・ダイソン方程式です。

ここで一つ注意することとして、最初に出てくるシュウィンガー・ダイソン方程式は ϕ_0 を $G^{(1)}_{con}$ だと思えば、$G^{(1)}_{con}, G^{(2)}_{con}, G^{(3)}_{con}$ に対する方程式であり、次に出てきたシュウィンガー・ダイソン方程式は $G^{(1)}_{con}, G^{(2)}_{con}, G^{(3)}_{con}, G^{(4)}_{con}$ に対する方程式です。そしてこの流れが続いていきます。つまり、一連のシュウィンガー・ダイソン方程式からは代数的に $G^{(n)}_{con}$ を求めることはできません。今の場合で言えば、J での微分をもう一度行ったとしてもその方程式には $G^{(5)}_{con}$ が表われて解けなくなります。たとえ、$\phi_0=0$ としても、$G^{(2)}_{con}, G^{(3)}_{con}, G^{(4)}_{con}$ に対して方程式は 2 つしかないので解くことは出来ません。なので、解くためには何かしらの制限を必要とします。

もう一つ簡単な注意ですが、シュウィンガー・ダイソン方程式は off-shell(質量殻上にはいない) の n 点相関関数場合を含んでいます。このことは運動量表示にするとはっきりします (「シュウィンガー・ダイソン方程式〜QED〜」参照)。そして、off-shell での相関関数は直接的には物理量となりません。

ここではこれ以上式変形を行わないので少し見づらいですが、「シュウィンガー・ダイソン方程式〜QED〜」ではもっと分かりやすい形まで変形しています。例えば自己エネルギー部分が摂動的な形に似たものとして出てきます。そのとき出てくる積分が厳密に解けるなら伝播関数は求められますが、厳密に解けない形になっています。そんなわけで、非摂動論的なシュウィンガー・ダイソン方程式なんですが、それを解くためには適切な近似を使わなければいけないというのが現状のようです。

シュウィンガー・ダイソン方程式についてはここで終わりにして、今度は同様の発想から保存則に対する関係を求めます。上ではオイラー・ラグランジュ方程式の類似により相関関数による運動方程式が求められたように、古典論でのネーターの定理の類似として、相関関数による保存則を出します。考え方は同じで、生成汎関数がある変換に対して不変になっていることを要求します。

簡単な例として自由複素スカラー場を扱うことにします。このとき生成汎関数とラグランジアンは

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L} + J^*\phi + J\phi^*)\right]$$

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$$

このとき、ラグランジアンは大局的変換 $e^{i\alpha}$ に対して不変になっており、古典的にはネーターの定理によって、この不変性に対する保存カレント

$$i[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)]$$

を導きます。しかし、このまま生成汎関数に対して大局的変換を行っても保存カレントの関係は出てこなく、局所的変換を行わなければ保存カレントは出てきません。このことは簡単に分かります。

相関関数でみると分かりやすくて、ここでの伝播関数は

$$\langle 0|T(\phi(x_1)^*\phi(x_2))|0\rangle = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right]\phi^*(x_1)\phi(x_2)$$

で求められますが、この左辺がある変換に対して不変になっているなら、右辺もそうなっているはずです。今の場合では左辺が大局的、局所的変換で不変になっているのだとします。しかし、それに対して、大局的変換の元で右辺は不変となりますが、局所的変換では不変になっていません。なので、大局的変換からはただの相関関数による恒等式が出てきます。そして、局所的変換ではあからさまに右辺はラグランジアンが余計な部分を持つので、その不変性を壊す余計な項が 0 になればいいという発想から、保存カレントの関係が出てきます。

というわけで、変換を $\alpha(x)$ が微小として

$$\phi(x)\ \Rightarrow\ \phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x) = (1 + i\alpha(x))\phi(x)$$

この変換に対して測度 $\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^*$ は不変です。この変換でラグランジアンが不変になってないですが、それでも生成汎関数は不変になるという要求をします。というわけで、この局所的変換に対して生成汎関数は不変になっていると思えば

$$\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}\phi + J^*\phi + J\phi^*)\right] = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* \exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}\phi' + J^*\phi' + J\phi^{*\prime})\right]$$

ϕ の変換によってラグランジアンは (α の一次までで)

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^* \ \Rightarrow\ &\partial_\mu(1+i\alpha(x))\phi(x)\partial^\mu(1-i\alpha(x))\phi^*(x) - m^2\phi\phi^*\\ &= \partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi^*(x) - m^2\phi\phi^* + i(\partial_\mu\alpha(x))\phi(x)\partial^\mu\phi^*(x) - i\partial_\mu\phi(x)(\partial^\mu\alpha(x))\phi^*(x)\\ &= \partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi^*(x) - m^2\phi\phi^* + i(\partial_\mu\alpha(x))\mathcal{J}^\mu(x)\\ &= \partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi^*(x) - m^2\phi\phi^* + i\partial_\mu(\alpha(x)\mathcal{J}^\mu(x)) - i\alpha(x)\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x)\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}^\mu(x) = (\phi(x)\partial^\mu\phi^*(x) - (\partial^\mu\alpha(x))\phi^*(x))$$

変換でカレントが現れます。第三項は表面積分で落ちる項です。残りの変換は

$$J^*\phi \ \Rightarrow\ J^*(1+i\alpha(x))\phi(x)$$

$$J\phi^* \ \Rightarrow\ J(1-i\alpha(x))\phi^*(x)$$

これらからラグランジアンの変化を

$$\delta\mathcal{L} = \alpha(x)(-i\partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x) + iJ^*\phi(x) - iJ\phi^*(x))$$

として

$$\begin{aligned}0 &= \int\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\right] - \int\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*+\delta\mathcal{L})\right]\\ &= \int\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\right] - \int\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\right]\left(1+i\int d^4x\delta\mathcal{L}\right)\\ &= -i\int\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\right]\int d^4x\delta\mathcal{L}\end{aligned}$$

というわけで、

$$0 = \int\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\right]\int d^4x\alpha(x)(J^*(x)\phi(x) - J(x)\phi^*(x) - \partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x))$$

$\alpha(x)$ は任意なので、係数部分を取り出して

$$0 = \int\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\right](J^*(x)\phi(x) - J(x)\phi^*(x) - \partial_\mu\mathcal{J}^\mu(x))$$

これが今の場合でも保存則に対する基本的な関係になります。ここから、伝播関数を取り出すようにしたければ、J, J^* で汎関数微分すればよくて (変数を書いてない J, J^*, ϕ, ϕ^* の変数は x です)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{i\delta J^*(x_1)}\frac{\delta}{i\delta J(x_2)}\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\Big]\,(J^*\phi-J\phi^*-\partial_\mu\mathcal{J}^\mu)\Big|_{J=J^*=0}\\
&=\frac{\delta}{i\delta J^*(x_1)}\Big(\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\phi^*(x)\delta^4(x-x_2)\exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\Big]\big(J^*\phi-J\phi^*-\partial_\mu\mathcal{J}^\mu\big)\\
&\qquad\qquad+\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\Big]\big(-\frac{1}{i}\delta^4(x-x_2)\phi^*(x)\big)\Big)\Big|_{J=J^*=0}\\
&=\Big(\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\phi^*(x)\delta^4(x-x_2)\int d^4x\phi(x)\delta^4(x-x_1)\exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\Big]\big(J^*\phi-J\phi^*-\partial_\mu\mathcal{J}^\mu\big)\\
&\qquad+\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\phi^*(x)\delta^4(x-x_2)\exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\Big]\big(\frac{1}{i}\delta^4(x-x_1)\phi(x)\big)\\
&\qquad+\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\phi(x)\delta^4(x-x_1)\exp\Big[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+J^*\phi+J\phi^*)\Big]\big(-\frac{1}{i}\delta^4(x-x_2)\phi^*(x)\big)\Big)\Big|_{J=J^*=0}\\
&=\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\phi^*(x)\delta^4(x-x_2)\int d^4x\phi\delta^4(x-x_1)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big](-\partial_\mu\mathcal{J}^\mu)\\
&\qquad+\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\phi^*(x)\delta^4(x-x_2)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\frac{1}{i}\delta^4(x-x_1)\phi(x)\\
&\qquad+\int\mathcal{D}\phi\int d^4x\phi(x)\delta^4(x-x_1)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\big(-\frac{1}{i}\delta^4(x-x_2)\phi^*(x)\big)\\
&=\int\mathcal{D}\phi\phi^*(x_2)\phi(x_1)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big](-\partial_\mu\mathcal{J}^\mu)\\
&\qquad+\int\mathcal{D}\phi\phi^*(x_2)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\frac{1}{i}\delta^4(x-x_1)\phi(x)\\
&\qquad+\int\mathcal{D}\phi\phi(x_1)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\big(-\frac{1}{i}\delta^4(x-x_2)\phi^*(x)\big)\\
&=\int\mathcal{D}\phi(-\partial_\mu\mathcal{J}^\mu)\phi(x_1)\phi^*(x_2)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\\
&\qquad+\int\mathcal{D}\phi\phi^*(x_2)\big(\frac{1}{i}\delta^4(x-x_1)\phi(x)\big)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\\
&\qquad+\int\mathcal{D}\phi\phi(x_1)\big(-\frac{1}{i}\delta^4(x-x_2)\phi^*(x)\big)\exp\Big[i\int d^4x\mathcal{L}\Big]\\
&=-\partial_\mu\langle 0|T(\mathcal{J}^\mu\phi(x_1)\phi^*(x_2))|0\rangle\\
&\qquad+\frac{1}{i}\langle 0|T(\delta^4(x-x_1)\phi(x)\phi^*(x_2))|0\rangle-\frac{1}{i}\langle 0|T(\delta^4(x-x_2)\phi(x_1)\phi^*(x))|0\rangle
\end{aligned}
$$

微分演算子は外にだして、時間順序積の外側に来ます。というわけで、

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^\mu\langle 0|T(\mathcal{J}_\mu(x)\phi(x_1)\phi^*(x_2))|0\rangle\\
&\quad=\frac{1}{i}\langle 0|T(\delta^4(x-x_1)\phi(x)\phi^*(x_2))|0\rangle-\frac{1}{i}\langle 0|T(\delta^4(x-x_2)\phi(x_1)\phi^*(x))|0\rangle
\end{aligned}
$$

右辺はシュウィンガー・ダイソン方程式の右辺と同じ形になっていることがわかります。

ここでも生成汎関数からでなく相関関数から始めることもでき、伝播関数の関係であるワード・高橋恒等式なんかを求める時には伝播関数 (2 点相関関数) から始めると簡単に出てきます。それを簡単に言っておきます。

QED ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/_{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_{\mu}J^{\mu} \qquad (J^{\mu} = e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)$$

と与えられ (ゲージ固定項は除いています)、これは A_μ と ψ に対する局所ゲージ変換を行ったとしてもラグランジアンが不変になっています。電子の伝播関数

$$\langle 0|\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)|0\rangle = \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{QED}\right]$$

から始めるとします。そうすると、伝播関数はゲージ不変であること、実際に左辺は ψ の変換 $\exp[ie\alpha(x)]$ に対して不変であることから、右辺も変換 $\exp[ie\alpha(x)]$ に対して不変でなければいけないはずです。というわけで、ラグランジアン $\mathcal{L}_{QED}$ に対して A_μ の変換を行う必要がないことになり、そのために $\mathcal{L}_{QED}$ の第一項から余計な項としてカレント J_μ が現れ、生成汎関数の exp の前に出てきます。これを計算していくことでワード・高橋恒等式は求まります。

また、今と同じ結果は

$$\partial^{\mu}_{x}\langle 0|T(\mathcal{J}_{\mu}(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi^*(x'_1)\cdots\phi^*(x'_n))|0\rangle$$

これを計算すれば右辺がちゃんと導出されます。ただ、そのためには時間順序積をもっと厳密に見ていかなければいけないのでここではしません。