シュウィンガー・ダイソン方程式〜QED〜

QED での光子と電子の厳密な伝播関数に対する表現をシュウィンガー・ダイソン方程式を使って表現します。ここでの話は nucl-th/0601071 の section2 を参考にしています。
「自己エネルギーと頂点関数」の QED での関係を見ておくと分かりやすいかもしれません。

- 光子の自己エネルギー (真空偏極)

  QED での作用は

$$\begin{aligned}S_{action}[A_\mu,\psi,\overline{\psi}] &= \int d^4x\mathcal{L}\\ &= \int d^4x[\overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0 A\!\!\!/)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0}(\partial^\mu A_\mu)^2]\end{aligned}$$

  $\xi_0=1$ のときはファインマンゲージ、$\xi_0=0$ のときはランダウゲージ。e_0, m_0, ξ_0 のように書いたのはくり込みを考えていないからです。生成汎関数は

$$Z[J_\mu,\eta,\overline{\eta}] = \int \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}+J_\mu A^\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)\Big]$$

  QED でのシュウィンガー・ダイソン方程式はこの生成汎関数を場 $A_\mu,\psi,\overline{\psi}$ で汎関数微分すれば 0 になるということから導かれます。光子の自己エネルギーを求めたいので、まずは A_μ で汎関数微分します

$$\begin{aligned}\frac{\delta Z}{\delta A_\mu(x)}=0 &= \int \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}+J_\mu A^\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)\Big]\\ &= \int \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\Big(\frac{\delta S_{action}}{\delta A_\mu(x)}+J^\mu(x)\Big)\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}+J_\mu A^\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)\Big]\end{aligned}$$

  経路積分のところでやったように (経路積分〜クライン・ゴルドン場 (相互作用あり)〜参照)、これの exp の前の ( ) 部分は場を汎関数微分に変えることで積分の外に出せるので

$$\begin{aligned}0 &= \Big(\frac{\delta S_{action}}{\delta A_\mu(x)}[\frac{\delta}{i\delta J},-\frac{\delta}{i\delta\eta},\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}}]+J^\mu(x)\Big)\int \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}+J_\mu A^\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta)\Big]\\ &= \Big(\frac{\delta S_{action}}{\delta A_\mu(x)}[\frac{\delta}{i\delta J},-\frac{\delta}{i\delta\eta},\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}}]+J^\mu(x)\Big)Z[J_\mu,\eta,\overline{\eta}] \qquad (1)\end{aligned}$$

  作用の汎関数微分は

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\int d^4x\mathcal{L}[\phi] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(y)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(y))}$$

  このことからわかるように、作用の A_μ による汎関数微分はマクスウェル方程式を導くので

$$\frac{\delta S_{action}}{\delta A_\mu(x)} = \big(\partial_\nu\partial^\nu g^{\mu\rho} - (1-\frac{1}{\xi_0})\partial^\mu\partial^\rho\big)A_\rho(x) - e_0\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

これの場を演算子にして (1) に入れれば

$$0 = \big(\partial_\nu\partial^\nu g^{\mu\rho} - (1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\rho)\big)\frac{\delta Z}{i\delta J^\rho} - e_0\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma^\mu\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}Z + J^\mu Z$$

ここで、Z から conneted な伝播関数を導く W

$$Z = e^{iW}$$

を導入して

$$\begin{aligned} 0 &= \big(\partial_\nu\partial^\nu g^{\mu\rho} - (1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\rho)\big)\frac{\delta e^{iW}}{i\delta J^\rho} - e_0\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma^\mu\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}e^{iW} + J^\mu e^{iW} \\ -J^\mu e^{iW} &= i\big(\partial_\nu\partial^\nu g^{\mu\rho} - (1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\rho)\big)\frac{\delta W}{i\delta J^\rho}e^{iW} - e_0\frac{\delta}{\delta\eta}\gamma^\mu\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}e^{iW} \end{aligned}$$

右辺の最後の項は

$$\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\exp[iW]\} = i\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}}\exp[iW]$$

$$i\frac{\delta}{\delta\eta}(\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}}\exp[iW]) = -\frac{\delta W}{\delta\eta}\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}}\exp[iW] + i\frac{\delta}{\delta\eta}(\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}})\exp[iW]$$

なので

$$-J^\mu = \big(\partial_\nu\partial^\nu g^{\mu\rho} - (1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\rho)\big)\frac{\delta W}{\delta J^\rho} - e_0\big(-\frac{\delta W}{\delta\eta}\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}} + i\frac{\delta}{\delta\eta}(\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}})\big) \tag{2}$$

これをワード・高橋恒等式の時と同じように有効作用にルジャンドル変換します

$$\Gamma[A_\mu,\psi,\overline{\psi}] = W[J_\mu,\eta,\overline{\eta}] - \int d^4x(\overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + J^\mu A_\mu)$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x)\ ,\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} = \overline{\eta}(x)\ ,\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)} = -\eta(x)$$

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} = A^\mu(x)\ ,\ \frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)} = \psi(x)\ ,\ \frac{\delta W}{\delta\eta(x)} = -\overline{\psi}(x)$$

これらを (2) 対して使って、$\eta=\overline{\eta}=0$ とすることで

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)}=\big(\partial_\nu\partial^\nu g^{\mu\rho}-(1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\rho)\big)A_\rho(x)-e_0\big(-\frac{\delta W}{\delta\eta}\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}}+i\frac{\delta}{\delta\eta}(\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}})\big)|_{\eta=\overline{\eta}=0}$$

右辺の最後の項は

$$\big(-\frac{\delta W}{\delta\eta}\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}}+i\frac{\delta}{\delta\eta}(\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}})\big)|_{\eta=\overline{\eta}=0}=\big(-\frac{\delta W}{\delta\eta}\gamma_\mu\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}}-i\mathrm{tr}[\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\frac{\delta}{\delta\eta}W]\big)|_{\eta=\overline{\eta}=0} \tag{3}$$

tr はスピノールの添え字に対して行うもので、何で出てきたのかというと、スピノールの添え字を i,j として

$$\overline{\psi}_i\gamma^\mu_{ij}\psi_j=-\gamma^\mu_{ij}\psi_j\overline{\psi}_i=-\mathrm{tr}[\gamma^\mu\psi\overline{\psi}]$$

となっているからです。スピノールの添え字に対してはあまり気にせずに計算をすることが多いですが、スピノールの順番を変える時には今みたいに注意が必要です。というより、ファインマン則でフェルミオンの交換やループに対してトレースが出るのはこの関係によるものです。そうすると (3) の第一項の汎関数微分はフェルミオンの 1 点相関関数なので消え、第二項はフェルミオンの厳密な伝播関数 S になります

$$iS(x_1,x_2)=\frac{1}{i}\frac{\delta^2W[\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}|_{\eta=\overline{\eta}=0}=-\frac{1}{i}\frac{\delta^2W[\eta,\overline{\eta}]}{\delta\overline{\eta}(x_1)\delta\eta(x_2)}|_{\eta=\overline{\eta}=0}$$

S の定義は伝播関数の中に i がないもので定義しておきます。なので (2) は

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)}=\big(\partial_\nu\partial^\nu g^{\mu\rho}-(1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\rho)\big)A_\rho(x)+ie_0\mathrm{tr}[\gamma_\mu S(x,x)]$$

これをもう 1 回 A_ν で汎関数微分すると

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(x)\delta A_\nu(y)}=\big(\partial_\rho\partial^\rho g^{\mu\nu}-(1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\nu)\big)\delta^4(x-y)+ie_0\mathrm{tr}[\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}S] \tag{4}$$

で、S というのはフェルミオンの伝播関数であって、これは有効作用による 2 点関数との関係

$$\int d^4z iS(x,z)\Gamma(y,z)=i\delta^4(x-y)$$

を満たすには

$$
\begin{aligned}
i\delta^4(x-y) &= i\int d^4z \frac{\delta\psi(z)}{\delta\eta(y)}\frac{\delta\eta(x)}{\delta\psi(z)} \\
&= -i\int d^4z \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\overline{\eta}(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)} \\
&= \int d^4z \frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\overline{\eta}(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)} \\
&= \int d^4z iS(z,y)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)}
\end{aligned}
$$

となっていればいいことを使えば

$$
\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x)\delta\overline{\psi}(y)}|_{\psi=\overline{\psi}=0} = -(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x)\delta\overline{\eta}(z)})^{-1} = (S(y,x))^{-1}
$$

となっていることが分かります。これを使って、(4) を $\psi=\overline{\psi}=0$ とすることで

$$
\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(x)\delta A_\nu(y)}|_{\psi=\overline{\psi}=0} = (\partial_\rho\partial^\rho g^{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\nu))\delta^4(x-y) - ie_0\mathrm{tr}[\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}\delta\psi}|_{\psi=\overline{\psi}=0})^{-1}] \tag{5}
$$

右辺のトレースの中に対しては、逆行列に対する微分

$$
\frac{\partial M^{-1}(x)}{\partial x} = -M^{-1}\frac{\partial M}{\partial x}M^{-1}
$$

$$
\Big(\frac{\partial M(x)M^{-1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial M(x)}{\partial x}M^{-1}(x) + M(x)\frac{\partial M^{-1}(x)}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial M(x)M^{-1}(x)}{\partial x} = 0\ (MM^{-1}=1)\Big)
$$

の汎関数版を使うことで

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)\delta\psi(x)})^{-1} \\
&\qquad = -\int d^4z_1 d^4z_2 (\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)\delta\psi(z_2)})^{-1}\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(z_2)\delta\psi(z_1)}(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(z_1)\delta\psi(x)})^{-1}
\end{aligned}
$$

このように変形させられます。そうすると今は $\psi=\overline{\psi}=0$ としているので

$$
(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(z_1)\delta\psi(x)}|_{\psi=\overline{\psi}=0})^{-1} = -S(z_1,x)
$$

さらに有効作用の三回の汎関数微分は 3 点関数、ようは頂点を作るので

$$e_0\Gamma_\mu(z_1,z_2;y)=\frac{\delta}{\delta A^\mu(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(z_2)\delta\psi(z_1)}$$

ワード・高橋恒等式と同じように、最低次での頂点と対応させるために e_0 をつけています (ラグランジアンの相互作用項の符号との対応に注意)。

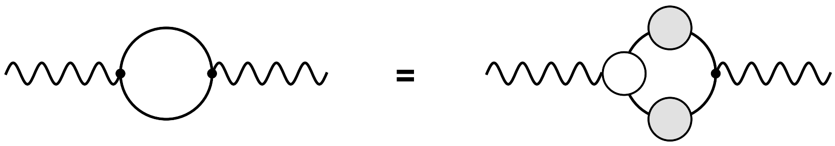
(5) の左辺は $A_\mu=0$ と取るようにすれば光子の厳密な伝播関数

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(x)\delta A^\nu(y)}|_{\psi=\overline{\psi}=0=A^\mu}=D^{-1}_{\mu\nu}(x,y)$$

ここでも $D_{\mu\nu}$ には i を含めない定義を使っています。なので、(5) は

$$\begin{aligned}D^{-1}_{\mu\nu}(x,y)&=\big(\partial_\rho\partial^\rho g_{\mu\nu}-(1-\frac{1}{\xi_0}\partial_\mu\partial_\nu)\big)\delta^4(x-y)+ie_0^2\int d^4z_1d^4z_2\mathrm{tr}\big[\gamma_\mu S(x,z_2)\Gamma_\nu(z_1,z_2;y)S(z_1,x)\big]\\&=\big(\partial_\nu\partial^\nu g_{\mu\nu}-(1-\frac{1}{\xi_0}\partial^\mu\partial^\rho)\big)\delta^4(x-y)+\Pi_{\mu\nu}(x,y)\qquad(6)\end{aligned}$$

これが光子の伝播関数に対するシュウィンガー・ダイソン方程式です。見て分かるように、第一項が最低次での自由な伝播関数の逆になっていることから、第二項が光子の自己エネルギー (真空偏極) に対応していることになります。真空偏極部分を図にすれば

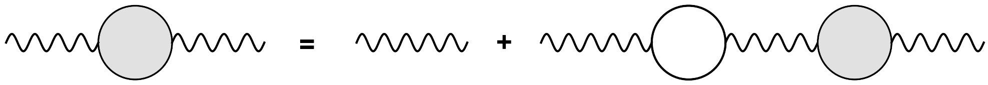


左辺の白丸が真空偏極 $\Pi_{\mu\nu}$、右辺の白丸部分が 3 点関数 (頂点)Γ、黒点が最低次の頂点 γ、γ と Γ の間の塗りつぶされた円が中間にある線が電子の厳密な伝播関数 S です。

また、第一項で自由な伝播関数を D_0 として (6) は式変形すれば

$$\begin{aligned}D^{-1}_{\mu\nu}&=D^{-1}_{0\mu\nu}+\Pi_{\mu\nu}\\D^{\rho\mu}D^{-1}_{\mu\nu}&=D^{\rho\mu}D^{-1}_{0\mu\nu}+D^{\rho\mu}\Pi_{\mu\nu}\\D^{\rho\mu}D^{-1}_{\mu\nu}D_0^{\nu\lambda}&=D^{\rho\mu}D^{-1}_{0\mu\nu}D_0^{\nu\lambda}+D^{\rho\mu}\Pi_{\mu\nu}D_0^{\nu\lambda}\\D_0^{\rho\lambda}&=D^{\rho\lambda}+D^{\rho\mu}\Pi_{\mu\nu}D_0^{\nu\lambda}\\D^{\rho\lambda}&=D_0^{\rho\lambda}-D^{\rho\mu}\Pi_{\mu\nu}D_0^{\nu\lambda}\end{aligned}$$

このようになっているので、図にすれば



式とは並びを変えていますが、右辺の第二項の白丸が真空偏極、そのとなりが厳密な光子の伝播関数です。真空偏極はゲージ不変性から $\Pi(q^2)$ によって

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\Pi(q^2)$$

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0 \quad (\text{ゲージ不変性})$$

みたいに書けます。

- 電子の自己エネルギー

電子の自己エネルギーも同じ手順によって求めることが出来ます。生成汎関数を今度は $\overline{\psi}$ で汎関数微分することで

$$\begin{aligned}\frac{\delta Z}{\delta\overline{\psi}(x)} = 0 \quad &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x)} \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L} + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big] \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \Big(\frac{\delta S_{action}}{\delta\overline{\psi}(x)} + \eta(x)\Big) \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L} + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big] \\ &= \Big(\frac{\delta S_{action}}{\delta\overline{\psi}(x)}[\frac{\delta}{i\delta J}, -\frac{\delta}{i\delta\eta}, \frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}}] + \eta(x)\Big) \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L} + J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)\Big]\end{aligned}$$

作用の汎関数微分は

$$(i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0 A\!\!\!/)\psi$$

なので

$$0 = \Big((i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu})\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} + \eta\Big)Z$$

今度の場合はディラック方程式が出てきます。これを η で汎関数微分し、$\eta = \overline{\eta} = 0$ とすれば

$$0 = \Big((i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu})\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}(x)} + \delta^4(x-y)\Big)Z$$

Z を e^{iW} に変えると、汎関数微分は

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}(x)}e^{iW} &= \frac{\delta}{\delta\eta(y)}(\frac{i\delta W}{i\delta\overline{\eta}(x)}e^{iW})\\ &= (\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{i\delta W}{i\delta\overline{\eta}(x)})e^{iW}+(\frac{i\delta W}{i\delta\overline{\eta}(x)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y)})\end{aligned}$$

そして、$\eta=\overline{\eta}=0$ なので、第一項は電子の伝播関数 $-S(x,y)$ になり、第二項は 1 点関数なので消えて

$$0=-\big(i\partial\!\!\!/-m_0-e_0\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}\big)S(x,y)e^{iW}+\delta^4(x-y)e^{iW}$$

書いていませんがいませんが $S(x,y)$ は J を変数に持っています。Se^{iW} の J による汎関数微分は上で出てきたルジャンドル変換による関係を使って

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{i\delta J^\mu}Se^{iW} &= e^{iW}\frac{\delta S}{i\delta J^\mu}+S\frac{\delta e^{iW}}{i\delta J^\mu}\\ &= e^{iW}\frac{\delta S}{i\delta J^\mu}+Sie^{iW}\frac{\delta W}{i\delta J^\mu}\\ &= e^{iW}\frac{\delta S}{i\delta J^\mu}+Se^{iW}A_\mu\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}0 &= -\Big(i\partial\!\!\!/-m_0-e_0\gamma^\mu\big(e^{iW}\frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}+e^{iW}A_\mu\big)\Big)S(x,y)+\delta^4(x-y)e^{iW}\\ &= -\big(i\partial\!\!\!/-m_0-e_0\gamma^\mu A_\mu-e_0\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}\big)S(x,y)+\delta^4(x-y)\end{aligned} \tag{7}$$

S の J による汎関数微分と有効作用との関係は

$$\frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}=\int d^4z\frac{\delta A_\nu(z)}{i\delta J^\mu(x)}\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}=\int d^4z\frac{\delta W}{i\delta J^\mu(x)\delta J_\mu(z)}\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}=\int d^4z iD_{\mu\nu}(x,z)\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}$$

$$-S(x,y)=(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)\delta\psi(y)})^{-1}$$

このとき、光子の伝播関数 $D_{\mu\nu}$ を出すためには $J_\mu=0$ とする必要があり、そうすると QED での場合は素直に $A_\mu=0$ となってくれるので $e_0\gamma^\mu A_\mu$ の項は消えます (自己エネルギーと頂点関数参照)。

これらと、汎関数の逆の汎関数微分の関係から

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{i\delta J^\mu(x)}S(x,y) &= -i\int d^4zD_{\mu\nu}(x,z)\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}(\frac{\delta^2\Gamma}{\overline{\psi}(x)\delta\psi(y)})^{-1} \\
&= i\int d^4zd^4ud^4vD_{\mu\nu}(x,z)(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)\delta\psi(u)})^{-1}\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(u)\delta\psi(v)}(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(v)\delta\psi(y)})^{-1} \\
&= i\int d^4zd^4ud^4vD_{\mu\nu}(x,z)S(x,u)\frac{\delta}{\delta A_\nu(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(u)\delta\psi(v)}S(v,y) \\
&= ie_0\int d^4zd^4ud^4vD_{\mu\nu}(x,z)S(x,u)\Gamma^\nu(z;u,v)S(v,y)
\end{aligned}
$$

これを (7) に入れて

$$
\delta^4(x-y)=(i\partial\!\!\!/-m_0)S(x,y)-ie_0^2\int d^4zd^4ud^4v\gamma^\mu D_{\mu\nu}(x,z)S(x,u)\Gamma^\nu(z;u,v)S(v,y)
$$

これが電子の伝播関数に対するシュウィンガー・ダイソン方程式になります。光子のときと同じで、第一項が自由な場合での伝播関数の逆になっているので、第二項が自己エネルギーに対応しています。見やすくするために、第一項を少し変形し、第二項の積分の文字を入れ替えれば

$$
\begin{aligned}
\delta^4(x-y) &= \int d^4z(i\partial\!\!\!/-m_0)S(z,y)\delta(z-x) \\
&\qquad -ie_0^2\int d^4zd^4ud^4v\gamma^\mu D_{\mu\nu}(x,v)S(x,u)\Gamma^\nu(v;u,z)S(z,y) \\
&= \int d^4z\big((i\partial\!\!\!/-m_0)\delta(x-z)-\Sigma(x,z)\big)S(z,y) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$$
\Sigma(x,z)=ie_0^2\int d^4ud^4v\gamma^\mu D_{\mu\nu}(x,v)S(x,u)\Gamma^\nu(v;u,z)
$$

これを見れば $S(z,y)$ の前の部分が厳密な伝播関数の逆になっていることがわかります。Σ は右から読むと、z から 3 点関数である頂点部分に入っていき、光子が v から、電子が u から出て行き、x でぶつかるといったものです。右辺の ( ) 内の第一項は明らかに最低次のフェルミオンの伝播関数の逆に対応しており (「ディラック場～伝播関数～」参照)、運動量表示で

$$
p\!\!\!/-m_0
$$

となります。

通常通り伝播関数は位置の差だけに依存しており、頂点では運動量保存が満たされているようにして、自己エネルギー部分を運動量表示にするためにフーリエ変換すると

$$\int d^4xd^4z\Sigma(x,z)e^{ip(x-z)}$$

$$= ie_0^2\gamma^\mu \int \frac{d^4q_1\cdots d^4q_5}{(2\pi)^{20}} \int d^4xd^4zd^4ud^4v$$

$$D_{\mu\nu}(q_1)e^{-iq_1(x-v)}S(q_2)e^{-iq_2(x-u)}e^{-iq_3v-iq_4u+iq_5z}\Gamma^\nu(q_3,q_4,q_5)e^{ip(x-z)}$$

$$= ie_0^2\gamma^\mu \int \frac{d^4q_1\cdots d^4q_5}{(2\pi)^{20}} \int d^4xd^4zd^4ud^4v$$

$$e^{-i(q_1+q_2-p)x}e^{-i(q_3-q_1)v}e^{-i(q_4-q_2)u}e^{-i(p-q_5)z}D_{\mu\nu}(q_1)S(q_2)\Gamma^\nu(q_3,q_4,q_5)$$

$$= ie_0^2\gamma^\mu \int \frac{d^4q_1\cdots d^4q_5}{(2\pi)^4}\delta(q_1+q_2-p)\delta(q_3-q_1)\delta(q_4-q_2)\delta(p-q_5)D_{\mu\nu}(q_1)S(q_2)\Gamma^\nu(q_3,q_4,q_5)$$

$$= ie_0^2\gamma^\mu \int \frac{d^4q_1d^4q_2d^4q_3}{(2\pi)^4}\delta(q_1+q_2-p)\delta(q_3-q_1)D_{\mu\nu}(q_1)S(q_2)\Gamma^\nu(q_3,q_2,p)$$

$$= ie_0^2\gamma^\mu \int \frac{d^4q_3}{(2\pi)^4}D_{\mu\nu}(q_3)S(p-q_3)\Gamma^\nu(q_3,p-q_3,p)$$

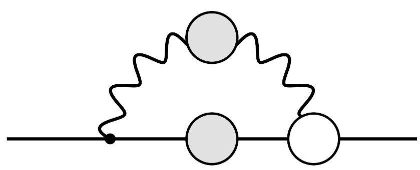
なので、

$$\Sigma(p) = ie_0^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma^\mu D_{\mu\nu}(q)S(p-q)\Gamma^\nu(p,q) \tag{9}$$

これは図に対してファインマン則を用いて出てくるものと同じです。通常の定義にあわせれば

$$\frac{\Sigma(p)}{i} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-ie_0\gamma^\mu)iD_{\mu\nu}(q)iS(p-q)(-ie_0\Gamma^\nu(p,q))$$

Σ の図は



塗りつぶされている円を含んでいる部分が厳密な伝播関数 (波線が光子、直線が電子) で、右側の丸が 3 点関数 (頂点)Γ_μ で、左の黒丸が最低次の頂点 γ_μ です。というわけで、運動量量表示におけるフェルミオンに対するシュウィンガー・ダイソン方程式は

$$
\begin{aligned}
S^{-1}(p) &= \not{p} - m_0 - \Sigma(p) \\
&= \not{p} - m_0 - ie_0^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu D_{\mu\nu}(q) S(p-q) \Gamma^\nu(p,q)
\end{aligned}
$$

となります。よって、厳密な電子の伝播関数は運動量表示で

$$
iS(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma}
$$

と書けます。

ちなみに、(9) はギャップ方程式 (gap equation) とも呼ばれています。このギャップは負のエネルギーを持った電子 (ディラックの海) から、正のエネルギー領域へと移るのに必要な質量の差 (ギャップ)$2m$ のことを指しているらしいです。QED のくり込みのところで触れたように、摂動的な枠組みの中では質量 0 から始めれば、Σ の質量補正部分は常に 0 になるので質量は 0 となり、この質量の差は常に 0 になります。それに対してシュウィンガー・ダイソン方程式による (9) には Σ を 0 としない解が出てくることからそう呼ばれているそうです。