自己エネルギーと頂点関数

厳密な伝播関数での自己エネルギーと、頂点部分を表す頂点関数を導入します。
スカラー場を使っているときは伝播関数と 2 点頂点関数の積は i としていますが、後半の QED では 1 としています。

connected な n 点相関関数 $G^{(n)}_{con}$ は生成汎関数 $W[J]=-i\log Z[J]$ から

$$G^{(n)}_{con}=\frac{1}{i^{n-1}}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}|_{J=0}$$

と与えられます。ϕ^4 理論として 2 点相関関数を展開したとき、2 次までを描いたのが図 1 です。この図を、内線を切って 2 つの図になるかどうかで分類します。例えば図 2 のようなのは、内線を切ることで 2 つの図に分離します (切ると 2 つの connected な図になる)。このときは 1 粒子可約 (1-particle reducible) と呼ばれます。これに対して、内線を切っても 2 つに分離しない図を 1 粒子既約 (1-particle irreducible(1PI)) と呼びます。

1 粒子可約な図は、1 粒子既約な図同士を内線でつなげる事で作れます。なので、1PI に分類されるものを使って図 3 のようにまとめます。このときの Σ が自己エネルギーと呼ばれます。ただし、ループしているところの両端に線がついているように描きましたが、Σ の定義にはこの線は含まれていません (下の式にしたものを見ればそうなっている)。

そして、伝播関数の摂動展開を見ていくと、相互作用のない伝播関数 G_0 と自己エネルギー Σ の等比数列になることが分かります。大雑把に言えば、Σ は 1PI の集まりなので Σ と Σ を内線 G_0 で繋げれば 1 粒子可約な図の集まりになり、それをどんどん繋いでいけば全ての寄与になるということです。なので、相互作用ありでの厳密な伝播関数 $G^{(2)}_{con}(p)$(全ての高次からの寄与が含まれた伝播関数) は (図 4)

$$G^{(2)}_{con}=G_0(p)+G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p)+G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p)+\cdots$$

と書けます。位置表示では位置積分が出てきて煩わしいので運動量表示にしています。等比数列の和から

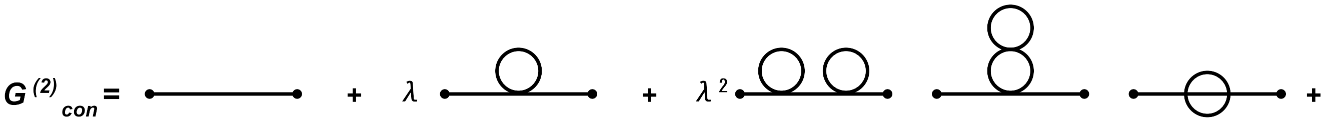

図 1

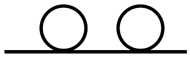

図 2

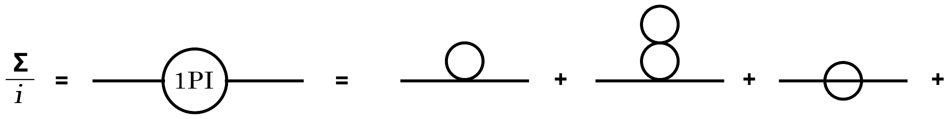

図 3

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}_{con}(p) &= G_0(p)(1 + \frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p) + \frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p) + \cdots) \\
&= G_0(p)\frac{1}{1 - \frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p)} \\
&= G_0(p)\frac{1}{G_0(p)(G_0^{-1}(p) - \frac{\Sigma(p)}{i})} \\
&= (G_0^{-1}(p) - \frac{\Sigma(p)}{i})^{-1} \\
&= (\frac{p^2 - m^2}{i} - \frac{\Sigma(p)}{i})^{-1} \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}
\end{aligned}
$$

物理的な質量は on-shell 条件 $p^2 = m^2_{phy}$ で与えられることから、物理的な質量は伝播関数の極の位置

$$
m^2_{phy} = m^2 + \Sigma(p^2 = m^2_{phy})
$$

となります。

頂点関数に移ります。厳密な伝播関数 $G^{(2)}_{con}$ の逆として 2 点頂点関数 $\Gamma^{(2)}(p)$ を

$$
G^{(2)}_{con}(p)\Gamma^{(2)}(p) = i \qquad (\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p))
$$

と定義します。これを一般化した n 点頂点関数を作ります。また、右辺は i でなく 1 で定義している場合もあります。

関数のルジャンドル変換

$$
g(u, y) = f(x, y) - ux \qquad (u = \frac{df}{dx})
$$

と同じように、汎関数のルジャンドル変換を

$$
\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi(x) \qquad \big(\phi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\ ,\ -J(x) = \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)}\big)
$$

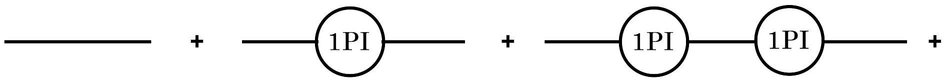

図 4

今はスカラー場 ϕ だけを考えます。$\Gamma[\phi]$ を有効作用 (effective action) と言います。$\Gamma[\phi]$ の汎関数微分を行えば

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta\phi(x)} - \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y) - J(x)\\ &= \int d^4y\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} - \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y) - J(x)\\ &= \int d^4y\phi(y)\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} - \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\phi(y) - J(x)\\ &= -J(x)\end{aligned}$$

となっているのが確かめられます。途中で汎関数の連鎖則

$$\frac{\delta F[G(\phi)]}{\delta\phi(x)} = \int d^4y\frac{\delta F[G(\phi)]}{\delta G(y)}\frac{\delta G(\phi)}{\delta\phi(x)}$$

を使っています。また、有効作用での ϕ は

$$\begin{aligned}\phi = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= -i\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J}\\ &= \frac{\int\mathcal{D}\phi\ \phi(x)\exp[\int d^4x'\mathcal{L}[\phi,\dot{\phi}] + J\phi]}{\int\mathcal{D}\phi\exp[i\int d^4x'\mathcal{L}[\phi,\dot{\phi}] + J\phi]}\\ &= \frac{\langle 0|\hat{\phi}(x)\exp[i\int d^4x'\ J\phi]|0\rangle}{\langle 0|\exp[i\int d^4x'\ J\phi]|0\rangle}\\ &= \frac{\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle}{\langle 0|0\rangle}\Big|_J\\ &= \phi_c\end{aligned}$$

なので、源 J がある場合での場の真空期待値です。このことは、$J=0$ で真空期待値が 0 にならない場合 (自発的対称性の破れがある場合) では気にする必要があります。例えば、$\Gamma[\phi_c]$ の汎関数微分で $J\to 0$ とすれば

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}\Big|_{J=0} = 0$$

これは ϕ_c の方程式ですが、ϕ_c は $J\to 0$ で外場なしの真空期待値 $\langle 0|\phi|0\rangle$ になるので、$\langle 0|\phi|0\rangle$ が 0 になるかならないかで状況が異なります。

有効作用は「有効作用と有効ポテンシャル」で触れることにして、ここでは今のような話は関係ないとして、そのまま ϕ とします。また、後で出てきますが、電磁場との相互作用なら $\psi,\overline{\psi},A$ があるので、これらも真空期待値のものに置き換える必要があります ($\Gamma[A_c,\psi_c,\overline{\psi}_c]$)。

伝播関数 $G^{(2)}_{con}(x,y)$ は W から

$$G^{(2)}_{con}(x,y)=\frac{1}{i}\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\Big|_{J=0}=\frac{1}{i}\frac{\delta\phi(y)}{\delta J(x)}\Big|_{J=0}$$

2 点頂点関数 $\Gamma^{(2)}(x,y)$ は有効作用から

$$\Gamma^{(2)}(x,y)=\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\Big|_{\phi=0}=-\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)}\Big|_{\phi=0}$$

と与えられます。n 回汎関数微分すれば n 点頂点関数になり、有効作用は頂点関数の生成汎関数です。実際に、これで伝播関数の逆になることは

$$\begin{aligned}\int d^4zG^{(2)}_{con}(x,z)\Gamma^{(2)}(z,y)=&\ -i\int d^4z\frac{\delta^2W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(y)}\Big|_{J=\phi=0}\\&=i\int d^4z\frac{\delta\phi(x)}{\delta J(z)}\frac{\delta J(z)}{\delta\phi(y)}\Big|_{J=\phi=0}\\&=i\delta^4(x-y)\end{aligned}\tag{1}$$

から確かめられます。また、$J=0$ で $\phi=0$ になるとすれば、$J=0$ だけでよくなります。

フーリエ変換して運動量表示にしてみます。$G^{(2)}_{con}(x,y)$ は並進不変性を持つとし、$\Gamma^{(2)}(x,y)$ も同様に並進不変としてフーリエ変換して

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^4p'd^4p}{(2\pi)^8}\int d^4zG^{(2)}_{con}(p')e^{-ip'(x-z)}\Gamma^{(2)}(p)e^{-ip(z-y)}\\&=\int\frac{d^4p'd^4p}{(2\pi)^8}\int d^4zG^{(2)}_{con}(p')e^{-ip'x}\Gamma^{(2)}(p)e^{ipy}e^{-i(p-p')z}\\&=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G^{(2)}_{con}(p')e^{-ip'x}e^{ipy}\Gamma^{(2)}(p)\delta(p-p')\\&=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}G^{(2)}_{con}(p)\Gamma^{(2)}(p)e^{-ip(x-y)}\end{aligned}$$

デルタ関数は

$$\delta^4(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}$$

なので

$$G^{(2)}_{con}(p)\Gamma^{(2)}(p)=i$$

となります。

$\Gamma^{(n)}(x,y)$ を頂点関数と呼ぶ理由を見ていきます。ここから $G^{(2)}_{con}$ は $G^{(2)}$ と書きます。(1) を使うと $G^{(2)}(x,z)$ は

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}(x,z) =& \int d^4y G^{(2)}(x,y)\delta^4(y-z) \\
=& -\int d^4y G^{(2)}(x,y)\int d^4x_1 \frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(y)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x_1)} \\
=& -\int d^4y d^4x_1 G^{(2)}(x,y)\frac{i\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(y)}\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x_1)} \\
=& -\int d^4y d^4x_1 G^{(2)}(x,y)\frac{i\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(y)}G^{(2)}(z,x_1) \\
=& -\int d^4y d^4x_1 G^{(2)}(x,y) i\Gamma^{(2)}(y,x_1)G^{(2)}(x_1,z)
\end{aligned}
$$

左辺は connected な 2 点相関関数なので、右辺の 2 つの $G^{(2)}$ は頂点と繋がっています。つまり、右辺は図的に言えば、真ん中に頂点を含む部分を持ち、その両方から connected な 2 点相関関数が内線として繋がっています。この構成から、$\Gamma^{(2)}$ は頂点に関する関数と言えます。そして、証明は省きますが頂点関数は 1PI となります。

3 点の場合も求めてみます。(1) に

$$
\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int d^4z'' \frac{\delta\phi(z'')}{\delta J(x'')}\frac{\delta}{\delta\phi(z'')} = i\int d^4z'' G^{(2)}(z'',x'')\frac{\delta}{\delta\phi(z'')}
$$

を作用させて

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta J(x'')}\int d^4z \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z')} \\
&= \int d^4z \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z')} + i\int d^4z d^4z'' \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}G^{(2)}(z'',x'')\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z'')\delta\phi(z')} \\
&= \int d^4z \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(z)}\Gamma(z,z') - \int d^4z d^4z'' G^{(2)}(x,z)G^{(2)}(z'',x'')\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z'')\delta\phi(z')} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$G^{(2)}(x',z')$ をかけて z' の積分を加えると、第一項は

$$
\begin{aligned}
&\int d^4z' d^4z \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(z)}G^{(2)}(x',z')\Gamma(z,z') \\
&\qquad = \int d^4z d^4z' d^4z'' G^{(2)}(x,z)G^{(2)}(x',z')G^{(2)}(z'',x'')\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z'')\delta\phi(z')}
\end{aligned}
$$

から

$$
i\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(x')} = \int d^4z d^4z' d^4z'' G^{(2)}(x,z)G^{(2)}(x',z')G^{(2)}(z'',x'')\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z'')\delta\phi(z')}
$$

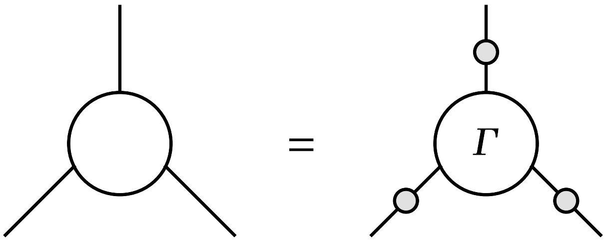

図 5

左辺は connected な点相関関数で、右辺は頂点関数に 3 つの $G^{(2)}$ が繋がっています（図 5)。図 5 での左辺の線が入ってきている丸部分が厳密な 3 点相関関数、右辺での線の真ん中に丸がくっついているものは $G^{(2)}$ です。また、これに Γ を両辺にかけていき積分をとることで

$$\frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(z'')\delta\phi(z')} = -\int d^4xd^4x'd^4x''\Gamma(x,y)\Gamma(x',y')\Gamma(x'',y'')\frac{\delta^3W[J]}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(x')}$$

このように反対の関係を導けます。

ϕ^4 理論の場合では頂点は 4 点から出てきて、最低次では「相関関数でのファインマン則」のように $-i\lambda$ です。

今度はフェルミオンとゲージ場で見ていきます。フェルミオンの伝播関数への自己エネルギー Σ の入れ方は同じですが、スピノール成分があるために伝播関数が行列となります。なので、自己エネルギーによる等比数列は行列に対する

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}y\frac{1}{x} + \frac{1}{x}y\frac{1}{x}y\frac{1}{x} - \cdots$$

を使うことで

$$\begin{aligned}
S(p) &= \frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon} + \frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon}\frac{\Sigma}{i}\frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon} + \frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon}\frac{\Sigma}{i}\frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon}\frac{\Sigma}{i}\frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon} + \cdots \\
&= i(\frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon} + \frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon}\Sigma\frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon} + \frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon}\Sigma\frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon}\Sigma\frac{1}{p_\mu\gamma^\mu - m + i\epsilon} + \cdots) \\
&= \frac{i}{p_\mu\gamma^\mu - m - \Sigma + i\epsilon}
\end{aligned}$$

となり、同じ結果になります。

電磁場 (ゲージ場) では若干変えます。スカラー場での伝播関数は

$$G^{(2)}_{con} = G_0(p) + G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p) + G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p)\frac{\Sigma(p)}{i}G_0(p) + \cdots$$

このように展開されているために、最終的に

$$\frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}$$

として、Σ が入ってきます。逆に言えば、この形になるようにして作られています。光子はボソンなので基本的な構造はスカラー場と同じですが、伝播関数は $i\epsilon$ もつけて書くと

$$\frac{-i}{k^2+i\epsilon}(g_{\mu\nu}+(\alpha-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\epsilon})=-(g_{\mu\nu}-(\alpha-1)k_\mu k_\nu\frac{\partial}{\partial k^2})D_0(k)|_{m=0}$$

と定義していて、フェルミオンやスカラー場での伝播関数とは符号が反転しています ($D_0(k)$ はスカラー場の最低次の伝播関数)。そのため、自己エネルギーの符号を同じように定義すると、$k^2+\Sigma$ として入ってきます。なので、自己エネルギー部分で

$$D_{con}(k)=D_0(k)+D_0(k)i\Pi(k)D_0(k)+D_0(k)i\Pi(k)D_0(k)i\Pi(k)D_0(k)+\cdots$$

このように符号を反転させます。$D_0=-i/k^2$ とすれば

$$\begin{aligned}
D_{con}&=D_0(k)+D_0(k)i\Pi(k)D_0(k)+D_0(k)i\Pi(k)D_0(k)i\Pi(k)D_0(k)+\cdots\\
&=D_0(k)(1+i\Pi(k)D_0(k)+i\Pi(k)D_0(k)i\Pi(k)D_0(k)-\cdots)\\
&=D_0(k)\frac{1}{1-i\Pi(k)D_0(k)}\\
&=(D_0^{-1}(k)-i\Pi(k))^{-1}\\
&=(\frac{k^2}{-i}+\frac{\Pi(k)}{i})^{-1}\\
&=\frac{-i}{k^2-\Pi(k)}
\end{aligned}$$

となります (QED の「くり込み〜真空偏極〜」参照)。

電磁場の場合ではゲージ固定項があるためにもう少し複雑になりますが、基本的には同じです。しかし、これは自己エネルギーの符号の定義をこのように与えたというだけなので、使いやすい自分の好きな定義で通せばいいです。例えば、スカラー場の伝播関数 $D_0(k)$ に $(-g_{\mu\nu}+(\alpha-1)k_\mu k_\nu\partial/\partial k^2)$ が作用しているだけと見て、スカラー場と同じように自己エネルギーを定義することもできます。

電磁場ではもう 1 つ特殊な性質があるので、それも示します。電磁場での自己エネルギーは真空偏極と呼ばれます。真空偏極のテンソルを $\Pi_{\mu\nu}(k)$ と書きます。$\Pi_{\mu\nu}$ はゲージ不変性 (運動量 k_μ と直交する)

$$k^\mu\Pi_{\mu\nu}(k)=0$$

とローレンツ不変性のために

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\Pi(k)=k^2P_{\mu\nu}\Pi(k)$$

このようにスカラー量 $\Pi(k)$ を使って書けます (QED の「くり込み〜真空偏極〜」参照)。そうすると厳密な光子の伝播関数は

$$D^{\mu\nu}_{con}(k) = D^{\mu\nu}_0(k) + D^{\mu\alpha}_0(k) i\Pi_{\alpha\beta}(k) D^{\beta\nu}_0(k) + \cdots$$
$$= D^{\mu\nu}_0(k) + D^{\mu\alpha}_0(k) ik^2 P_{\mu\nu}\Pi(k) D^{\beta\nu}_0(k) + \cdots$$

ここで、相互作用のない光子の伝播関数

$$D^{\mu\nu}_0(k) = \frac{-i}{k^2}\Big(g^{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big) = \frac{i}{k^2}\Big(P^{\mu\nu} - \alpha\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big)$$

を使ってみると

$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu}_{con}(k) &= \frac{i}{k^2}\Big(P^{\mu\nu} - \alpha\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big) + i\frac{i}{k^2}\Big(P^{\mu\alpha} - \alpha\frac{k^\mu k^\alpha}{k^2}\Big)\Pi_{\alpha\beta}(k)\frac{i}{k^2}\Big(P^{\beta\nu} - \alpha\frac{k^\beta k^\nu}{k^2}\Big) + \cdots \\
&= \frac{i}{k^2}P^{\mu\nu} + i\frac{i}{k^2}P^{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}(k)\frac{i}{k^2}P^{\beta\nu} - \frac{i}{k^2}\alpha\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + i\frac{i}{k^2}\alpha\frac{k^\mu k^\alpha}{k^2}\Pi_{\alpha\beta}(k)\frac{i}{k^2}\alpha\frac{k^\beta k^\nu}{k^2} + \cdots
\end{aligned}$$

最後の項は明らかにゲージ不変性の式 $k^\mu\Pi_{\mu\nu}(k) = 0$ によって消えるので

$$\begin{aligned}
D^{\mu\nu}_{con}(k) &= \frac{i}{k^2}P^{\mu\nu} + i\frac{i}{k^2}P^{\mu\alpha}\Pi_{\alpha\beta}(k)\frac{i}{k^2}P^{\beta\nu} + \cdots - \alpha\frac{i}{k^2}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \\
&= \frac{i}{k^2}\Big(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big) + i\frac{i}{k^2}\Big(-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{k^2}\Big)\Pi_{\alpha\beta}(k)\frac{i}{k^2}\Big(-g^{\beta\nu} + \frac{k^\beta k^\nu}{k^2}\Big) + \cdots - \alpha\frac{i}{k^2}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \\
&= \frac{i}{k^2}\Big(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big) + i\frac{i}{k^2}(-g^{\mu\alpha})\Pi_{\alpha\beta}(k)\frac{i}{k^2}(-g^{\beta\nu}) + \cdots - \alpha\frac{i}{k^2}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \\
&= \frac{i}{k^2}\big(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} + ig^{\mu\alpha}(k_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta}k^2)\Pi(k)\frac{i}{k^2}g^{\beta\nu} + \cdots\big) - \alpha\frac{i}{k^2}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \\
&= \frac{i}{k^2}\big((-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) - (-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2})\Pi(k) + \cdots\big) - \alpha\frac{i}{k^2}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \\
&= \frac{i}{k^2}(1 - \Pi(k) + \cdots)(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) - \alpha\frac{i}{k^2}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \\
&= \frac{-i}{k^2(1+\Pi(k))}(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) - \alpha\frac{i}{k^2}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}
\end{aligned}$$

これが光子の厳密な伝播関数に対する一般形です。　物理的な質量がどうなっているのかは k^2 がどこで極を持つのかを見ればいいので、この厳密な伝播関数から光子の質量が高次の量子 (輻射) 補正によってどうなるのかが分かります。第二項のゲージパラメータを含んでいる項は物理量に影響しないはずなので、第一項から質量がどうか分かります (たとえ影響するにしても $k^2 = 0$ に極はある)。

第一項は括弧の外にいる部分を見れば、この部分は $k^2 = 0$ で極を持っています。なので、光子の厳密な伝播関数は、光子の質量が 0 のままであることを表しています。このため、光子 (ゲージボソン) はフェルミオンやボソンと違い高次の寄与を考えても質量 0 のままです。

フェルミオンと電磁場がいるとき、つまり QED での有効作用を見ておきます。QED ではディラック場 $\psi, \overline{\psi}$ と電磁場 A_μ なので、それぞれの源を $\eta, \overline{\eta}, J$ として、$W[J, \eta, \overline{\eta}], \Gamma[A, \psi, \overline{\psi}]$ とします。

ルジャンドル変換は

$$\Gamma[A_\mu, \psi, \overline{\psi}] = W[J_\mu, \eta, \overline{\eta}] - \int d^4x(\overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + J^\mu A_\mu)$$

ここでの $A_\mu, \psi, \overline{\psi}$ は

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} = A^\mu(x)\ ,\ \frac{\delta W}{\delta \overline{\eta}(x)} = \psi(x)\ ,\ \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} = -\overline{\psi}(x)$$

と与えられ、$\Gamma[A_\mu, \psi, \overline{\psi}]$ に対する汎関数微分は

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x)\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} = \overline{\eta}(x)\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\psi}(x)} = -\eta(x)$$

$\psi(x), \overline{\psi}(x), \eta(x), \overline{\eta}(x)$ はグラスマン数の規則に従うとします。例えば、$\delta\Gamma/\delta\psi(x)$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} &= \int d^4y \frac{\delta \overline{\eta}(y)}{\delta \psi(x)} \frac{\delta W[J_\mu, \eta, \overline{\eta}]}{\delta \overline{\eta}(y)} + \overline{\eta}(x) - \int d^4y \frac{\delta \overline{\eta}(y)}{\delta \psi(x)} \psi(y) \\
&= \int d^4y \frac{\delta \overline{\eta}(y)}{\delta \psi(x)} \psi(y) + \overline{\eta}(x) - \int d^4y \frac{\delta \overline{\eta}(y)}{\delta \psi(x)} \psi(y) \\
&= \overline{\eta}(x)
\end{aligned}$$

グラスマン数の連鎖則は (η, ξ をグラスマン数として)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

となっています。

$\delta\Gamma/\delta A$ をもう一回 A で汎関数微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\nu(y) \delta A_\mu(x)} = -\frac{\delta J^\mu(x)}{\delta A_\nu(y)} &= -\left(\frac{\delta A_\nu(y)}{\delta J^\mu(x)}\right)^{-1} \\
&= -\left(\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \frac{\delta W}{\delta J^\nu(y)}\right)^{-1} \\
&= -\left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x) \delta J^\nu(y)}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

なので

$$i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\nu(y) \delta A_\mu(x)}\Big|_{A=\psi=\overline{\psi}=0} = -\left(\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x) \delta J^\nu(y)}\Big|_{J=\eta=\overline{\eta}=0}\right)^{-1} = -(D_{\mu\nu}(x,y))^{-1}$$

このように伝播関数の逆と分かります。これから、逆の定義は

$$\begin{aligned}\int d^4z D_{\mu\nu}(y,z)(D_{\lambda\nu}(x,z))^{-1} &= \int d^4z D_{\mu\nu}(y,z)\frac{-i\delta^2\Gamma}{\delta A_\nu(z)\delta A_\lambda(x)}\Big|_{A=0}\\ &= \int d^4z\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(y)\delta J^\nu(z)}\frac{-i\delta^2\Gamma}{\delta A_\nu(z)\delta A_\lambda(x)}\Big|_{J=0,A=0}\\ &= \int d^4z\frac{\delta A_\nu(z)}{\delta J^\mu(y)}\frac{\delta J^\lambda(x)}{\delta A_\nu(z)}\Big|_{J=0,A=0}\\ &= \frac{\delta J^\lambda(x)}{\delta J^\mu(y)}\\ &= g_\mu{}^\lambda\delta^4(x-y)\end{aligned}$$

とします。逆を i でなく 1 で定義しています。

フェルミオンでも 2 点頂点関数が伝播関数の逆になっています。フェルミオンの厳密な伝播関数は

$$S(x,y)=\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\overline{\eta}(x)}\Big|_{\eta=\overline{\eta}=0}=-\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta\overline{\eta}(x)\delta\eta(y)}\Big|_{\eta=\overline{\eta}=0}$$

これと $\psi,\overline{\psi}$ で Γ を汎関数微分したものの積を積分すれば

$$\begin{aligned}\int d^4z S(z,y)\frac{-i\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)}\Big|_{\psi=\overline{\psi}=0} &= -i\int d^4z\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\overline{\eta}(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)}\Big|_{\eta=\overline{\eta}=\psi=\overline{\psi}=0}\\ &= -\int d^4z\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\overline{\eta}(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)}\Big|_{\eta=\overline{\eta}=\psi=\overline{\psi}=0}\\ &= \int d^4z\frac{\delta\psi(z)}{\delta\eta(y)}\frac{\delta\eta(x)}{\delta\psi(z)}\Big|_{\eta=\overline{\eta}=\psi=\overline{\psi}=0}\\ &= \frac{\delta\eta(x)}{\delta\eta(y)}\Big|_{\eta=\overline{\eta}=0}\\ &= \delta^4(x-y)\end{aligned}$$

グラスマン数でも汎関数微分の連鎖則は同じです。よって

$$\frac{-i\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)}\Big|_{\psi=\overline{\psi}=0}=(\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z)\delta\overline{\eta}(x)}\Big|_{\eta=\overline{\eta}=0})^{-1}=(S(x,z))^{-1}=S^{-1}(x,z)$$

となり、伝播関数の逆です。逆であることの定義を

$$\int d^4z S^{-1}(x,z)S(z,y)=\delta^4(x-y)$$

とします。これは S^{-1} と S を入れ替えても

$$
\begin{aligned}
\int d^4z S(y,z)\frac{-i\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x)\delta\overline{\psi}(z)} &= -\int d^4z\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z)\delta\overline{\eta}(y)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x)\delta\overline{\psi}(z)} \\
&= \int d^4z\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z)\delta\overline{\eta}(y)}\frac{\delta\eta(z)}{\delta\psi(x)} \\
&= \int d^4z\frac{\delta\psi(y)}{\delta\eta(z)}\frac{\delta\eta(z)}{\delta\psi(x)} \\
&= \frac{\delta\psi(y)}{\delta\psi(x)}|_{\eta=\overline{\eta}=0} \\
&= \delta^4(y-x)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\int d^4z S(y,z)S^{-1}(z,x) = \delta^4(y-x)
$$

となっています。

また、逆を i で定義するなら

$$
\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(z)\delta\overline{\psi}(x)}|_{\overline{\psi}=\psi=0} = -(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z)\delta\overline{\eta}(x)}|_{\overline{\eta}=\eta=0})^{-1} = i(S(x,z))^{-1}
$$

として、i を外に出せばいいです。

QED での頂点も求めてみます。QED の頂点はフェルミオン 2 つ、光子 1 つによって構成されるので、頂点関数を $A,\psi,\overline{\psi}$ で汎関数微分したものです。なので

$$
\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(x_2)\delta\overline{\psi}(x_1)} = -(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)})^{-1}
$$

これを利用して

$$
\frac{\delta^3\Gamma[A,\psi,\overline{\psi}]}{\delta A_\mu(y)\delta\psi(x_2)\delta\overline{\psi}(x_1)} = -\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)}(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)})^{-1}
$$

この汎関数微分は逆行列に対する微分

$$
\frac{\partial M^{-1}(x)}{\partial x} = -M^{-1}\frac{\partial M}{\partial x}M^{-1}
$$

$$
\Big(\frac{\partial M(x)M^{-1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial M(x)}{\partial x}M^{-1}(x) + \frac{\partial M^{-1}(x)}{\partial x}M(x)\ ,\ \ \frac{\partial M(x)M^{-1}(x)}{\partial x} = 0\ (MM^{-1}=1)\Big)
$$

の汎関数にしたものを使うことで

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)}(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)})^{-1}\\
&=\int d^4z_1d^4z_2(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(z_2)})^{-1}\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z_2)\delta\overline{\eta}(z_1)}(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z_1)\delta\overline{\eta}(x_1)})^{-1}\\
&=\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(z_2)})^{-1}\frac{\delta J^\nu(z_3)}{\delta A_\mu(y)}\frac{\delta}{\delta J^\nu(z_3)}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z_2)\delta\overline{\eta}(z_1)}(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z_1)\delta\overline{\eta}(x_1)})^{-1}\\
&=\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(z_2)})^{-1}(\frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(z_3)\delta J^\nu(y)})^{-1}\frac{\delta^3 W}{\delta J^\nu(z_3)\delta\eta(z_2)\delta\overline{\eta}(z_1)}(\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z_1)\delta\overline{\eta}(x_1)})^{-1}
\end{aligned}
$$

最後の行へは

$$
\frac{\delta J^\mu(x)}{\delta A_\nu(y)}=(\frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(x)\delta J^\nu(y)})^{-1}
$$

を使っています。そして、i の数をうまく合わせて、$\eta=\overline{\eta}=J_\mu=0$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{i}(\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(z_2)})^{-1}\frac{1}{i}(\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta J^\mu(z_3)\delta J^\nu(y)})^{-1}\frac{\delta^3 W}{\delta J^\nu(z_3)\delta\eta(z_2)\delta\overline{\eta}(z_1)}\frac{1}{i}(\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z_1)\delta\overline{\eta}(x_1)})^{-1}\\
&=\frac{1}{i}(S(x_2,z_2))^{-1}\frac{1}{i}(D_{\mu\nu}(z_3,y))^{-1}\frac{\delta^3 W}{\delta J^\nu(z_3)\delta\eta(z_2)\delta\overline{\eta}(z_1)}\frac{1}{i}(S(z_1,x_1))^{-1}\\
&=\ -i(S(x_2,z_2))^{-1}(D_{\mu\nu}(z_3,y))^{-1}\frac{1}{i^2}\frac{\delta^3 W}{\delta J^\nu(z_3)\delta\eta(z_2)\delta\overline{\eta}(z_1)}(S(z_1,x_1))^{-1}\\
&=\ -i(S(x_2,z_2))^{-1}(D_{\mu\nu}(z_3,y))^{-1}G^{(3)}_\nu(z_3;z_2,z_1)(S(z_1,x_1))^{-1}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\frac{\delta^3\Gamma[A,\psi,\overline{\psi}]}{\delta A_\mu(y)\delta\psi(x_2)\delta\overline{\psi}(x_1)}\Big|_{A=\overline{\psi}=\psi=0}=-i\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3(S(x_2,z_2))^{-1}(D_{\mu\nu}(z_3,y))^{-1}G^{(3)}_\nu(z_3;z_2,z_1)(S(z_1,x_1))^{-1}
$$

$G^{(3)}_\nu$ の式にするために、右辺に $S(x,y),D_{\mu\nu}(x,y)$ を積分で潰せるように作用させて

$$
\begin{aligned}
&-i\int d^4yd^4x_1d^4x_2d^4z_1d^4z_2d^4z_3\\
&\qquad\times S(u_2,x_2)(S(x_2,z_2))^{-1}(D_{\mu\nu}(z_3,y))^{-1}D_{\mu\lambda}(u_1,y)G^{(3)}_\nu(z_3;z_2,z_1)(S(z_1,x_1))^{-1}S(x_1,u_3)\\
&=\ -i\int d^4z_1d^4z_2d^4z_3\\
&\qquad\times\delta^4(u_2-z_2)\delta^4(u_1-z_3)g^\nu{}_\lambda G^{(3)}_\nu(z_3;z_2,z_1)\delta^4(u_3-z_1)\\
&=\ -iG^{(3)}_\nu(u_1;u_2,u_3)
\end{aligned}
$$

なので、

$$G^{(3)}_{\nu}(u_1;u_2,u_3) = \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 S(u_2,x_2) D_{\mu\nu}(u_1,y) \frac{i\delta^3\Gamma[A,\psi,\overline{\psi}]}{\delta A_\mu(y)\delta\psi(x_2)\delta\overline{\psi}(x_1)}\Big|_{A=\overline{\psi}=\psi=0} S(x_1,u_3)$$

右辺では 3 点頂点関数は 2 つのフェルミオン、1 つの光子と繋がっているので

$$i\Gamma_\mu(y;x_1,x_2) = \frac{i\delta^3\Gamma[A,\psi,\overline{\psi}]}{\delta A_\mu(y)\delta\psi(x_2)\delta\overline{\psi}(x_1)}\Big|_{A=\overline{\psi}=\psi=0}$$

として、頂点部分を与えます。