線形シグマモデル

パイオンと核子を含んでいるカイラル対称な有効理論である線形シグマモデルを見ますが、ほとんどがカイラル変換の計算をしているだけです。パイオンが出てくるので、PCAC との関係も見ます。

モデルに意味を与えるために具体的な粒子名を使うので、ある程度の素粒子の粒子構成の知識があることを前提にしています。粒子の意味が分からなければラグランジアン構成だけを見てください。

ここでは $SU(2)$ を使っていきますが、 $SU(2)$ の単位行列は省いてかいていきます。

知りたいのは核子 (フェルミオン) とパイオン (ボソン) なので、ラグランジアンは基本的な形は

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^a)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi$$

とします。カイラル対称性を持つようにしたいので質量項は抜き、 π^a のカイラル対称な相方として σ を導入しています。 σ はスカラー場で、 π^a は $\pi^a = \pi = (\pi^1, \pi^2, \pi^3)$ は擬スカラー場で (アイソスピンは 1)、 ψ はフェルミオン場で 2 重項になっており (アイソスピンは 1/2)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

とします。これらは π^a はパイオン、 ψ は核子の 2 重項で ψ_1 が陽子で ψ_2 が中性子に対応するようにしています。 σ は π^a のカイラル対称性の相方となる最も軽いスカラーメソンなのですが実在が確認されていないものです。このように軽いクォーク 2 つ (u, d クォーク) から構成されるメソンと対応させるなら、 σ と π^a はフェルミオンによる $SU(2)$ に所属するスカラー、擬スカラーとして扱うべきなので、 $\bar{\psi}\psi$ と $i\bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi$ と等しいとします (核子の二重項 ψ と同じ記号で書きましたが、核子によるものではないです)。なので、 σ と π^a の $SU(2)$ の変換は $\bar{\psi}\psi$ と $i\bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi$ と同じになります。そうすると、 $\mathcal{L}_0$ は $SU_V(2)$ と $SU_A(2)$ の変換

$$SU_V(2) : \psi \Rightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\tau^a\varphi^a\right]\psi$$

$$SU_A(2) : \psi \Rightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\gamma^5\tau^a\varphi^a\right]\psi$$

に対して不変です (「南部・Jona-Lasinio モデル」参照)。 τ^a はパウリ行列で、ローマ文字は 1, 2, 3 を表し、同じ文字の場合は和を取るとします。

これだけだとスカラー場とフェルミオン場のラグランジアンを合わせただけなので、相互作用項を入れます。相互作用項は核子とパイオンの相互作用によるものとして湯川型の

$$g\bar{\psi}(i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi$$

というのを入れたいですが (g はパイオンと核子での結合定数)、これは $SU_A(2)$ 変換に対して不変になっていません。なので

$$(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2$$

これが $SU_{V,A}(2)$ 変換に対して不変になっていることから $\bar{\psi}\sigma\psi$ をくっつけ (σ は $\bar{\psi}\psi$ 、 π^a は $\bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi$ と同じ変換をするため)

$$\mathcal{L}_{int} = g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi$$

とします (これは南部・Jona-Lasinio モデルをボソン化したものに対応)。さらにスカラー場の自発的対称性の破れを踏まえて、 σ と π^a によるポテンシャルとして

$$\mathcal{L}_{pote} = \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (\mu^2 > 0)$$

第一項は質量項の符号を反転させたもので、第二項は ϕ^4 理論のスカラー場が 2 つある場合の相互作用項です。これもちゃんと $SU_{V,A}(2)$ 変換に対して不変になっています。

というわけで、全体のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi^a)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (1)$$

これは Gell-Mann と Levy によって与えられた形で、線形シグマモデル (linear sigma model) と呼ばれます (σ モデルと書かれたりもします)。

線形シグマモデルのよく使われる変形として

$$\Sigma = \sigma + i\tau^a\pi^a, \quad \Sigma^\dagger = \sigma - i\tau^a\pi^a$$

という 2×2 行列を導入した形があります (パウリ行列は $\tau^a = \tau^{a\dagger}$)。明確に書きませんが、 σ の項には 2×2 の単位行列 I がかかっています。そうすると

$$\Sigma\Sigma^\dagger = (\sigma^2 + \pi^2) \quad (\tau^a\pi^a\tau^b\pi^b = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 = \pi^2)$$

$$\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger = (\partial^\mu\sigma + i\tau^a\partial^\mu\pi^a)(\partial_\mu\sigma - i\tau^a\partial_\mu\pi^a) = (\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi^a)^2$$

これらによって

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\text{tr}\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi + \frac{\mu^2}{4}\text{tr}\Sigma\Sigma^\dagger - \frac{\lambda}{16}\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger)^2$$

トレースは $SU(2)$ の成分に対してです。さらにフェルミオン場を右手系 ψ_R 、左手系 ψ_L

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad \psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$$

$$\bar{\psi}_R = \frac{1}{2}(\psi^\dagger + \psi^\dagger\gamma_5)\gamma_0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - \gamma_5), \quad \bar{\psi}_L = \frac{1}{2}(\psi^\dagger - \psi^\dagger\gamma_5)\gamma_0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + \gamma_5)$$

に分けると

$$\begin{aligned}
& i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi \\
&= i(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)\gamma_\mu\partial^\mu(\psi_R + \psi_L) + g(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi^a)(\psi_R + \psi_L) \\
&= i\bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L + g(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)\sigma(\psi_R + \psi_L) + g(\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)i\gamma_5\tau^a\pi^a(\psi_R + \psi_L)
\end{aligned}$$

途中で

$$\bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\gamma_\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\partial^\mu\psi = \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_\mu(1 + \gamma_5)(1 - \gamma_5)\partial^\mu\psi = 0$$

となることを使っています。第四項は

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_R\gamma_5\psi_R + \bar{\psi}_R\gamma_5\psi_L + \bar{\psi}_L\gamma_5\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma_5\psi_L &= \bar{\psi}_R\psi_R - \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R - \bar{\psi}_L\psi_L = -\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R \\
(\gamma_5\psi_R = \frac{1}{2}(\gamma_5 + 1)\psi = \psi_R, \gamma_5\psi_L = \frac{1}{2}(\gamma_5 - 1)\psi = -\psi_L)
\end{aligned}$$

となっているので第三項と合わせると

$$\begin{aligned}
& (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)\sigma(\psi_R + \psi_L) + (\bar{\psi}_R + \bar{\psi}_L)i\gamma_5\tau^a\pi^a(\psi_R + \psi_L) \\
&= \bar{\psi}_R(\sigma - i\tau^a\pi^a)\psi_L + \bar{\psi}_L(\sigma + i\tau^a\pi^a)\psi_R \\
&= \bar{\psi}_R\Sigma^\dagger\psi_L + \bar{\psi}_L\Sigma\psi_R
\end{aligned}$$

よって、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\text{tr}\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger + i\bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L + g(\bar{\psi}_L\Sigma\psi_R + \bar{\psi}_R\Sigma^\dagger\psi_L) + \frac{\mu^2}{4}\text{tr}\Sigma\Sigma^\dagger - \frac{\lambda}{16}\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger)^2 \quad (2)$$

という形になります。元のラグランジアンが $SU_{V,A}(2)$ 変換に対して不変になっているので、左手系、右手系で書かれたこれは $SU_L(2) \times SU_R(2)$ 変換で不変になっています ($SU_{V,A}(2)$ と $SU_L(2) \times SU_R(2)$ は等価)。

この形から不変性を確かめようとすると、 $SU_L(2) \times SU_R(2)$ のすぐには分からない変換規則を使うので、 $SU_L(2) \times SU_R(2)$ に対してこのラグランジアンが不変であることを利用して、それを出します (下の補足も参照)。 $SU_L(2) \times SU_R(2)$ の変換は

$$\begin{aligned}
\psi_{L,R} &\Rightarrow \exp\left[-\frac{i}{2}\tau^a\theta^a\right] = U\psi_{L,R} \\
\psi_L &\Rightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\tau^a\alpha^a\right]\psi_L = \exp\left[-\frac{i}{2}\tau^a\omega^a\right]\psi_L = U_L\psi_L \\
\psi_R &\Rightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\tau^a\beta^a\right]\psi_R = \exp\left[\frac{i}{2}\tau^a\omega^a\right]\psi_R = U_R\psi_R
\end{aligned}$$

一番上がベクトル変換で、下二つが左手系、右手系に対する変換です (「南部・Jona-Lasinio モデル」参照)。これらの変換に対して $\psi_{L,R}$ の微分項は不変なのでこれらの項は無視します

まず、ベクトル変換の場合を見ます。 Σ は $SU(2)$ の 2×2 行列なので、両側から $U, U^\dagger$ をつけた

$$\Sigma \Rightarrow U\Sigma U^\dagger$$

という変換だとすれば、 $\text{tr}\Sigma\Sigma^\dagger$ はトレースの性質から

$$\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger) \Rightarrow \text{tr}(U\Sigma U^\dagger U\Sigma^\dagger U^\dagger) = \text{tr}(U\Sigma\Sigma^\dagger U^\dagger) = \text{tr}(U^\dagger U\Sigma\Sigma^\dagger) = \text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger)$$

とできるので、変換に対して不変になります。大局的変換なので微分が作用しても同様ですし、2乗がついていても同じです。なので、ラグランジアン (2) の第一項と第六項も不変です。残っている第四項は

$$\bar{\psi}_L \Sigma \psi_R \Rightarrow \bar{\psi}_L U^\dagger U \Sigma U^\dagger U \psi_R = \bar{\psi}_L \Sigma \psi_R$$

となるので不変になります。というわけで、 2×2 行列 Σ は $\Sigma \Rightarrow U\Sigma U^\dagger$ と変換されます。

次に $U_{L,R}$ に対してどうなっているのか見ます。(2) の第四項を見てみると、 Σ が

$$\Sigma \Rightarrow U_L \Sigma U_R^\dagger$$

と変換されれば、第四項は

$$\bar{\psi}_L \Sigma \psi_R \Rightarrow \bar{\psi}_L U_L^\dagger U_L \Sigma U_R^\dagger U_R \psi_R = \bar{\psi}_L \Sigma \psi_R$$

と不変になることが分かります。そして、 $\text{tr}\Sigma\Sigma^\dagger$ も

$$\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger) \Rightarrow \text{tr}(U_L \Sigma U_R^\dagger U_L^\dagger \Sigma^\dagger U_R) = \text{tr}(U_L \Sigma U_R^\dagger U_R \Sigma^\dagger U_L^\dagger) = \text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger)$$

となるので、不変になっています。微分がかかっているものと2乗の場合も同様です。よって、軸性変換に対して $\Sigma \Rightarrow U_L \Sigma U_R^\dagger$ と変換されます。群論とは無関係に天下りの的に導きましたが、これが $SU_L(2) \times SU_R(2)$ に対する変換性です。

変換を見てきたので、次は保存カレントを導きます。今は場しか変換していないので、保存カレントは

$$J = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_i)} \delta \phi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \sigma)} \delta \sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \pi^a)} \delta \pi^a$$

で求められます。ラグランジアン (1) の形は (1) を使うことにします。 σ は $\bar{\psi}\psi$ と同じ変換なので $SU_V(2)$ 変換での無限小変換による変化分は $\delta_V \sigma = 0$ です。 π^a は

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\tau^a\gamma_5\psi &\Rightarrow \psi^\dagger\left(1 - \frac{i\tau^b\varphi^b}{2}\right)\gamma_0\tau^a\gamma_5\left(1 + \frac{i\tau^c\varphi^c}{2}\right)\psi \\
&= \psi^\dagger\gamma_0\gamma_5\left(1 - \frac{i\tau^b\varphi^b}{2}\right)\tau^a\left(1 + \frac{i\tau^c\varphi^c}{2}\right)\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma_5\left(\tau^a - i\frac{\tau^b\tau^a}{2} + i\frac{\tau^a\tau^b}{2}\right)\varphi^b\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma_5\left(\tau^a + \frac{i}{2}[\tau^a, \tau^b]\right)\varphi^b\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma_5\left(\tau^a - \epsilon^{abc}\tau^c\right)\varphi^b\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi - \epsilon^{abc}\varphi^b\bar{\psi}\gamma_5\tau^c\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi - (\varphi \times \bar{\psi}\gamma_5\tau\psi)^a
\end{aligned}$$

$\pi^a = i\bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi$ とすれば

$$\pi^a \Rightarrow \pi^a - (\varphi \times \pi)^a$$

なので変化分は $\delta_V\pi^a = -(\varphi \times \pi)^a$ です。 $\delta\psi$ は単純に $\delta_V\psi = i\tau^a\varphi^a\psi/2$ です。 よってベクトルカレント J_V^μ を

$$J = -\varphi \cdot \mathbf{J}_V^\mu$$

と定義すれば

$$\begin{aligned}
-\varphi \cdot \mathbf{J}_V^\mu &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\varphi^a\psi - \partial^\mu\pi^a(\varphi \times \pi)^a \\
\mathbf{J}_V^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau}{2}\psi + \pi \times \partial^\mu\pi \quad (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}))
\end{aligned} \tag{3}$$

となります。

同様に $SU_A(2)$ では、 σ は $\sigma = \bar{\psi}\psi$ とみなして

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\psi &\Rightarrow \psi^\dagger\left(1 - \frac{i\tau^b\varphi^b}{2}\gamma_5\right)\gamma_0\left(1 + \frac{i\tau^c\varphi^c}{2}\gamma_5\right)\psi \\
&= \psi^\dagger\gamma_0\left(1 + \frac{i\tau^b\varphi^b}{2}\gamma_5\right)\left(1 + \frac{i\tau^c\varphi^c}{2}\gamma_5\right)\psi \\
&= \psi^\dagger\gamma_0\left(1 + i\tau^a\varphi^a\gamma_5\right)\psi \\
&= \bar{\psi}\psi + \bar{\psi}(i\tau^a\varphi^a\gamma_5)\psi
\end{aligned}$$

これから変化分は $\delta_A\sigma = \varphi^a\pi^a$ です。 π^a では

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\tau^a\gamma_5\psi &\Rightarrow \psi^\dagger\left(1 - \frac{i\tau^b\varphi^b}{2}\gamma_5\right)\gamma_0\tau^a\gamma_5\left(1 + \frac{i\tau^c\varphi^c}{2}\gamma_5\right)\psi \\
&= \psi^\dagger\gamma_0\left(\gamma_5 + \frac{i\tau^b\varphi^b}{2}\right)\tau^a\left(1 + \frac{i\tau^c\varphi^c}{2}\gamma_5\right)\psi \\
&= \psi^\dagger\gamma_0\left(\tau^a\gamma_5 + \frac{i\tau^b\tau^a\varphi^b}{2} + \frac{i\tau^a\tau^b\varphi^b}{2}\right)\psi \\
&= \bar{\psi}\tau^a\gamma_5\psi + \bar{\psi}\left(\frac{i\tau^b\tau^a}{2} + \frac{i\tau^a\tau^b}{2}\right)\varphi^b\psi \\
&= \bar{\psi}\tau^a\gamma_5\psi + i\bar{\psi}\delta^{ab}\varphi^b\psi \quad (\tau^i\tau^j + \tau^j\tau^i = 2\delta^{ij}) \\
&= \bar{\psi}\tau^a\gamma_5\psi + i\varphi^a\bar{\psi}\psi
\end{aligned}$$

$\bar{\psi}\psi$ を σ とすれば、変化分は $\delta_A\pi^a = -\varphi^a\sigma$ です。 $\delta_A\psi$ は $\delta_A\psi = i\tau^a\varphi^a\gamma_5\psi/2$ です。よって軸性ベクトルカレントは

$$\begin{aligned}
-\varphi \cdot \mathbf{J}_A^\mu &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\varphi^a\gamma_5\psi + (\partial^\mu\sigma)\varphi^a\pi^a - (\partial^\mu\pi^a)\varphi^a\sigma \\
\mathbf{J}_A^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\gamma_5\psi - \pi\partial^\mu\sigma + \sigma\partial^\mu\pi
\end{aligned} \tag{4}$$

ベクトルカレントと軸性カレントの発散はラグランジアンが不変になっているので

$$\partial_\mu\mathbf{J}_V^\mu = 0, \quad \partial_\mu\mathbf{J}_A^\mu = 0$$

となっています。また、フェルミオンの質量項があるときでは軸性変換に対して不変にならないので、保存カレントの発散はラグランジアンの変化分 $\delta\mathcal{L}$ と等しいことから（「ネーターの定理」参照）、 $m\bar{\psi}\psi$ の軸性変換の変化分より

$$\partial_\mu\mathbf{J}_A^\mu = im\bar{\psi}\tau\gamma_5\psi$$

となります。

左手系、右手系の変換を使っても同じ結果を導けます。ベクトル変換に対して Σ は

$$\begin{aligned}
\Sigma &\Rightarrow (1 + \frac{i}{2}\tau^b\theta^b)\Sigma(1 - \frac{i}{2}\tau^c\theta^c) = \Sigma + \frac{i}{2}(\tau^b\theta^b\Sigma - \Sigma\tau^c\theta^c) \\
&= \Sigma + \frac{i}{2}(\tau^b\theta^b(\sigma + i\tau^a\pi^a) - (\sigma + i\tau^a\pi^a)\tau^c\theta^c) \\
&= \Sigma - \frac{1}{2}(\tau^b\theta^b\tau^a\pi^a - \tau^a\pi^a\tau^b\theta^b) \\
&= \Sigma + \frac{1}{2}[\tau^a, \tau^b]\pi^a\theta^b \\
&= \Sigma + i\epsilon^{abc}\pi^a\theta^b\tau^c \\
&= \sigma + i\tau^a\pi^a + i(\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\tau} \\
&= \sigma + i\tau^a(\pi^a - (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\pi})^a)
\end{aligned}$$

なので、 σ の変化分は 0 で、 π^a の変化分は $\delta_V\pi^a = -(\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\pi})^a$ となり、同じ結果になります。
 U_L に対しては

$$\begin{aligned}
\Sigma &\Rightarrow U_L\Sigma = (1 + \frac{i}{2}\tau^b\alpha^b)\Sigma \\
&= \sigma + i\tau^a\pi^a + \frac{i}{2}\tau^b\alpha^b(\sigma + i\tau^a\pi^a) \\
&= \sigma + i\tau^a\pi^a + \frac{i}{2}\tau^b\alpha^b\sigma - \frac{1}{2}\tau^b\alpha^b\tau^a\pi^a \\
&= \sigma + i\tau^a\pi^a + \frac{i}{2}\tau^a\alpha^a\sigma - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + i\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi})) \\
&= \sigma + i\tau^a\pi^a - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + \frac{i}{2}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})\sigma + \frac{i}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}$$

これから変化分は

$$\begin{aligned}
\delta_L\sigma &= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \\
\delta_L\boldsymbol{\pi} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\sigma + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}$$

U_R では

$$\begin{aligned}
\Sigma &\Rightarrow \Sigma U_R^\dagger = \Sigma(1 - \frac{i}{2}\tau^c\beta^c) \\
&= \sigma + i\tau^a\pi^a - \frac{i}{2}(\sigma + i\tau^a\pi^a)\tau^c\beta^c \\
&= \sigma + i\tau^a\pi^a - \frac{i}{2}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta})\sigma + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\beta})) \\
&= \sigma + i\tau^a\pi^a + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \frac{i}{2}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta})\sigma + \frac{i}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\beta})
\end{aligned}$$

なので、変化分は

$$\begin{aligned}\delta_R \sigma &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\ \delta_R \boldsymbol{\pi} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}\sigma + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

フェルミオンに対しては

$$\begin{aligned}\psi_L &\Rightarrow U_L \psi_L = \psi_L + \frac{i}{2}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})\psi_L \\ \psi_R &\Rightarrow U_R \psi_R = \psi_R + \frac{i}{2}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta})\psi_R\end{aligned}$$

と変換されるので

$$\delta_L \psi_L = \frac{i}{2}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})\psi_L, \quad \delta_R \psi_R = \frac{i}{2}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta})\psi_R$$

そうすると、左手系の変換に対するカレントは

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}_L^\mu &= -\bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha})}{2} \psi_L - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\alpha})\partial^\mu \sigma + \frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{\alpha} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2}\partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{J}_L^\mu &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_L + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\partial^\mu \sigma - \frac{1}{2}\sigma(\partial^\mu \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi})\end{aligned}$$

右手系では

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J}_R^\mu &= -\bar{\psi}_R \gamma^\mu \frac{(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\beta})}{2} \psi_R + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\beta})\partial^\mu \sigma - \frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{\beta} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) - \frac{1}{2}\partial^\mu \boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\beta}) \\ \mathbf{J}_R^\mu &= \bar{\psi}_R \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_R - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}\partial^\mu \sigma + \frac{1}{2}\sigma(\partial^\mu \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi})\end{aligned}$$

となります。これらと $J_{V,A}^\mu$ の式 (3), (4) を比較してみると

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_V^\mu &= \mathbf{J}_R^\mu + \mathbf{J}_L^\mu \\ \mathbf{J}_A^\mu &= \mathbf{J}_R^\mu - \mathbf{J}_L^\mu\end{aligned}$$

このようになっていることが分かります。軸性カレントと一致することは

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_R \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_R &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi = \frac{1}{4}\bar{\psi} \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \gamma^\mu (1 + \gamma_5)(1 + \gamma_5)\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi} \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \gamma^\mu (1 + \gamma_5)\psi \\ \bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \psi_L &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\gamma^\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi = \frac{1}{4}\bar{\psi} \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5)(1 - \gamma_5)\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi} \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5)\psi\end{aligned}$$

から分かります。

対称性関係の話は終わりにしてラグランジアンを見ていきます。ラグランジアンでのポテンシャル部分

$$V = -\frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2$$

の最小値を求めてみます。 σ と π による微分は

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = -\mu^2 \sigma + \lambda \sigma (\sigma^2 + \pi^2) = \sigma (-\mu^2 + \lambda (\sigma^2 + \pi^2))$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = -\mu^2 \pi + \lambda \pi (\sigma^2 + \pi^2) = \pi (-\mu^2 + \lambda (\sigma^2 + \pi^2))$$

これらが0になればいいので、最小値の地点は

$$\sigma^2 + \pi^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (\mu^2 > 0)$$

$\sigma = 0, \pi = 0$ が最小値になっていないので、対称性は自発的に破れています。これはラグランジアンからすでに分かっていたことです。パイオンをゴールドストーンボソンだとすれば、質量は0となり真空期待値は $\langle \pi^a \rangle = 0$ となります。 σ は真空期待値を持たせて $v = \langle \sigma \rangle$ となり、質量を得ます。この話はスカラー場の自発的対称性の破れの話そのまま、具体的な粒子を使ったというだけです。ちなみに、ラグランジアン上にいる σ と π^a を真空期待値に置き換えると

$$-g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi \Rightarrow -gv\bar{\psi}\psi$$

とできるので、フェルミオンの質量項が現れます ($g > 0$)。なので、フェルミオンは質量

$$m_f = gv$$

を獲得します。これはフェルミオンが力学的質量を獲得することを表しています。

ここでカイラル対称性をラグランジアン上であからさまに破るために、 c を定数として

$$\mathcal{L}_{sb} = -c\sigma$$

という項を加え

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^a)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi + g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi - V_{eff}$$

$$V_{eff} = -\frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 + c\sigma$$

とします。 V_{eff} を微分した最小値の式は

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = -\mu^2 \sigma + \lambda \sigma (\sigma^2 + \pi^2) + c = \sigma (-\mu^2 + \lambda (\sigma^2 + \pi^2)) + c = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = -\mu^2 \pi + \lambda \pi (\sigma^2 + \pi^2) = \pi (-\mu^2 + \lambda (\sigma^2 + \pi^2)) = 0$$

σ の微分の式をみると $c \neq 0$ のとき $-\mu^2 + \lambda (\sigma^2 + \pi^2) = 0$ とすることができません。なので、 π の微分の式から $\pi = 0$ になっている必要があります。よって最小値の位置は $\pi = 0$ と

$$\lambda \sigma^3 - \mu^2 \sigma + c = 0$$

によって与えられます。

$\mathcal{L}_{sb}$ によってカイラル対称性は壊れているので軸性カレントは保存しなくなっています。軸性変換によるラグランジアンの変化 $\delta \mathcal{L}$ は $\mathcal{L}_{sb}$ の変化分だけなので、 $\sigma = \bar{\psi} \psi$ の変換から

$$\partial_\mu J_A^\mu = \delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_{sb} = -c \pi \quad (5)$$

となって実際に 0 になっていないことが分かり、パイオン場に比例しています。

「自発的対称性の破れ」と同じように、真空期待値からずらして質量を求めてみます。 σ を真空期待値 v によって

$$\sigma(x) \Rightarrow v + \sigma(x), \quad \pi(x) \Rightarrow \pi(x)$$

とすると、ポテンシャル部分は

$$\begin{aligned} V_{eff} &= -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 + c\sigma \\ &= -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + v^2 + \pi^2 + 2v\sigma) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + v^2 + \pi^2 - 2v\sigma)^2 + c\sigma + cv \\ &= -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + v^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (2v^2 \sigma^2 + 2v^2 \pi^2 + 4v^2 \sigma^2) + \dots \\ &= -\frac{1}{2} (\mu^2 - 3\lambda v^2) \sigma^2 - \frac{1}{2} (\mu^2 - \lambda v^2) \pi^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} (2\mu^2 - \frac{3c}{v}) \sigma^2 - \frac{1}{2} \frac{c}{v} \pi^2 + \dots \quad (c = v(\mu^2 - \lambda v^2)) \end{aligned}$$

「 $\dots$ 」は σ と π が 2 次になっていない項です。 $c = v(\mu^2 - \lambda v^2)$ は σ を $v + \sigma$ に置き換えて、 v 側の式を取り出しただけです。これの第一項が σ の質量項、第二項が π の質量項になるので、質量 m_σ と m_π は (V_{eff} はラグランジアンで $-V_{eff}$ としているので符号が反転)

$$m_\sigma^2 = 2\mu^2 - \frac{3c}{v}, \quad m_\pi^2 = -\frac{c}{v}$$

となり、パイオンも質量を得ます。 v は σ の真空期待値なので $v > 0$ とすれば、 $c < 0$ のときに各質量は正の値になります。また、パイオン質量は全部同じなので、アイソスピンの対称性は壊さず ($c = 0$ では質量 0 での

パイオン)。またここでも、 $\sigma \Rightarrow \sigma + v$ の置き換えによって、フェルミオンの質量項として $gv\bar{\psi}\psi$ が出てくるので、フェルミオンの質量 m_f は

$$m_f = gv$$

となります。

パイオンが質量を得ているので、PCAC と関連付けられます。軸性カレントを $\sigma + v$ で置き換えて $\langle 0|$ と $|\pi^a\rangle$ で挟むと

$$\langle 0|J_A^{\mu a}|\pi^b\rangle = \langle 0|(\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\gamma_5\psi - \pi^a\partial^\mu\sigma + \sigma\partial^\mu\pi^a + v\partial^\mu\pi^a)|\pi^b\rangle$$

右辺の括弧内の第一項は核子、第二項と第三項はスカラーメソンの状態を生成、消滅させる演算子を持っているので、終状態 $\langle 0|$ 、始状態 $|\pi^b\rangle$ に挟まれた中では寄与しません。なので、第四項だけが寄与することになって

$$\langle 0|J_A^{\mu a}|\pi^b\rangle = v\langle 0|\partial^\mu\pi^a|\pi^b\rangle$$

ここで v がパイオンの崩壊定数 f_π だと思えば、「カイラル対称性と PCAC」で出てきた PCAC

$$J_A^{\mu a} = f_\pi\partial^\mu\pi^a$$

となります。もしくは先に PCAC を仮定して

$$\langle 0|\partial_\mu J_A^{\mu a}|\pi^b\rangle = -f_\pi m_\pi^2\delta^{ab}$$

を持ち出すと、(5) による ($\langle 0|\pi^a|\pi^b\rangle = \delta^{ab}$ と規格化して)

$$\langle 0|\partial_\mu J_A^{\mu a}|\pi^b\rangle = -c\langle 0|\pi^a|\pi^b\rangle = -c\delta^{ab}$$

と比較することで

$$c = -f_\pi m_\pi^2$$

これを使うと σ の真空期待値 v は

$$v = f_\pi$$

となって、パイオンの崩壊定数となります。

ラグランジアンにいるフェルミオンの質量項は $-m\bar{\psi}\psi$ であり、これはカイラル対称性を壊します。ここではカイラル対称性を壊す項として $\mathcal{L}_{sb} = -c\sigma$ というのを入れました。この対応と、 σ は $\bar{\psi}\psi$ と同じように扱ってきたことを考えると、古典的な量としてはこの二つは等しいとできるのではないかと予想できます。つまり、真空期待値において

$$\langle 0|c\sigma|0\rangle = m\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle$$

が成立していると考えられます。右辺の ψ は核子でなくクォークによるもので、 u, d クォークだとします。 $c = -f_\pi m_\pi^2$ と $\langle 0|\sigma|0\rangle = v = f_\pi$ を使うことで

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{m_u + m_d}{2} \langle 0|(\bar{u}u + \bar{d}d)|0\rangle$$

となります (右辺は $m_u \simeq m_d$ として平均を取ったものを m に対応させています)。これを Gell-Mann・Oakes・Renner の関係と言います。これはパイオンの崩壊定数、パイオンの質量とクォークのカレント質量を関係づけているために物理量の計算に利用されます。例えば、クォークの質量を 0 としていない時の南部・Jona-Lasinio モデルでのスケールを決めるのに使われます (0 としているときはクォークに適用したゴールドバーガー・トライマンの関係を利用します)。

・補足

Σ がなんで $U\Sigma U^\dagger$ と変換されるのかの簡単な説明をしておきます。 $SU(2)$ の変換自体は 2 成分の ψ を

$$\psi \Rightarrow \exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right]\psi = U\psi$$

と変換させます。この変換に対して 3 成分ベクトルがどう変換されるのかをみます。3 成分ベクトルは ψ とパウリ行列によって

$$V^a = \psi^\dagger \tau^a \psi$$

このように作ります。そうすると $SU(2)$ の変換によって

$$V^a \Rightarrow V'^a = \psi^\dagger U^\dagger \tau^a U \psi$$

となります。 $U^\dagger \tau^a U$ を θ の 2 次まで展開してみると

$$\begin{aligned} U^\dagger \tau^a U &= e^{-i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}/2} \tau^a e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}/2} \\ &= \left(1 + \left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)^2 + \dots\right) \tau^a \left(1 + \left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)^2 + \dots\right) \\ &= \tau^a + \left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) \tau^a + \tau^a \left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) + \left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) \tau^a \left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)^2 \tau^a + \frac{1}{2}\tau^a \left(\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)^2 + \dots \\ &= \tau^a + i\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) \tau^a + i\tau^a \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) - \frac{1}{2}\left(-2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) \tau^a \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)^2 \tau^a + \tau^a \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)^2\right) + \dots \\ &= \tau^a - i\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}, \tau^a\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}, \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}, \tau^a\right]\right] + \dots \end{aligned}$$

真面目に展開しましたが、ハウズドルフの公式

$$e^{iA} B e^{-iA} = B + i[A, B] + \frac{i^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots$$

において、 $A \Rightarrow -A$ に置き換えたのを使えばいいだけです。交換関係を計算すると

$$\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}, \tau^a\right] = \frac{1}{2}\theta^b [\tau^b, \tau^a] = i\theta^b \epsilon^{bac} \tau^c \quad ([\tau^a, \tau^b] = 2i\epsilon^{abc} \tau^c) \quad (6)$$

ϵ^{abc} はレヴィ・チビタ記号です。ここで、ベクトルに対する 3 次元回転の変換 $\exp[iI^a \Lambda^a]$ の生成子

$$I^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を持ち出します。これらの 0 でない行列成分の位置とそれらが反対称になっていることから、レヴィ・チビタ記号と

$$(I^a)_{bc} = -i\epsilon^{abc}$$

という関係になっています ($(I^a)_{bc}$ は I^a の行列成分 bc という意味です。行列成分の添え字は下を書くことにします)。これを使うと交換関係 (6) は

$$\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}, \tau^a\right] = i\theta^b \epsilon^{bac} \tau^c = -\theta^b (I^b)_{ac} \tau^c = \tau^c (I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ca}$$

同じように

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}, \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}, \tau^a\right]\right] &= -\frac{1}{2}[\tau^b \theta^b, \tau^c] (I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac} \\ &= -i\epsilon^{bcd} \tau^d \theta^b (I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac} \\ &= (I^b)_{cd} \tau^d \theta^b (I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac} \\ &= (I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac} (I \cdot \boldsymbol{\theta})_{cd} \tau^d \\ &= (I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac}^2 \tau^c \\ &= \tau^c (I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ca}^2 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} U^\dagger \tau^a U &= \tau^a + i(I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac} \tau^c - \frac{1}{2}(I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac}^2 \tau^c \\ &= (\delta_{ac} + i(I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac} - \frac{1}{2}(I \cdot \boldsymbol{\theta})_{ac}^2) \tau^c \\ &= (1 + i(I \cdot \boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2}(I \cdot \boldsymbol{\theta})^2)_{ac} \tau^c \\ &= \exp[i(I \cdot \boldsymbol{\theta})]_{ac} \tau^c \end{aligned}$$

これをベクトルの変換に入れると

$$V^a \Rightarrow V'^a = \psi^\dagger e^{i\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\theta}} \tau^c \psi = e^{i\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\theta}} \psi^\dagger \tau^c \psi = e^{i\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\theta}} V^c$$

となって、よく見るベクトルの回転変換になります。つまり $SU(2)$ の変換は、ベクトルの 3 次元回転変換、ようは $SO(3)$ の変換になっていることが分かります。

この結果から、 $\Pi = \tau^a \phi^a$ みたいになっているのは

$$\Pi = \tau^a \phi^a \Rightarrow \Pi' = \tau^a e^{i\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\theta}} \phi^c$$

と変換され、これは

$$\begin{aligned} U\tau^a U^\dagger &= \tau^a + i\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}, \tau^a\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}, \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}, \tau^a\right]\right] \\ &= \tau^a + i\tau^c (\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\theta})_{ca} - \frac{1}{2}\tau^c (\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\theta})_{ca}^2 \\ &= \tau^c \exp[i(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\theta})]_{ca} \end{aligned}$$

であることから

$$\Pi' = \tau^a e^{i\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\theta}} \phi^c = U\tau^c U^\dagger \phi^c = U\tau^c \phi^c U^\dagger = U\Pi U^\dagger$$

となります。

$SU_L(2) \times SU_R(2)$ の変換に Σ が $U_L \Sigma U_R^\dagger$ となるのは、大雑把に言うと、 $SU(2)$ の行列を直積によって $M = \psi_L \psi_R^\dagger$ と作った M が $U_L M U_R^\dagger$ と変換されることに対応します。