非線形シグマモデル

カイラル対称性を扱うモデルの 1 つである非線形シグマモデルを導きます。ここでの非線形は変換が非線形になっているという意味で使います。
最初に $U(1)$ で流れを示してから、$SU(2)$ に移ります。

$U(1)$ の線形シグマモデルから始めます。線形シグマモデルのボソン部分のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \eta^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \eta^2)^2 \quad (\mu^2 > 0)$$

スカラー場 η は $U(1)$ $(U_L(1) \times U_R(1))$ に対応させています。このときの σ の質量は対称性の破れによって

$$m_\sigma^2 = 2\mu^2 = 2\lambda v^2 \quad (v^2 =< \sigma >= \frac{\mu^2}{\lambda}) \tag{1}$$

となります。ここで、このモデルにおける運動量の大きさが σ の質量 m_σ^2 に比べて小さいとします (v の値は固定)。質量に比べて運動量が小さいとするのは、低エネルギーに持っていくことに対応します ($p^2 \ll m^2$)。これによって質量を持つ粒子の効果が質量を持たない粒子 (η) の運動から分離されます。
σ の運動方程式は、オイラー・ラグランジュ方程式から

$$\partial^\mu \partial_\mu \sigma - \mu^2 \sigma + \lambda\sigma(\sigma^2 + \eta^2) = 0$$

これに対して $m_\sigma^2 \to \infty$ とするには、(1) から、μ^2 と結合定数 λ を $v^2 = \mu^2/\lambda$ を固定しつつ無限大に持っていけばいいです。そうすると、運動方程式での主な寄与は微分項以外で

$$-\mu^2\sigma + \lambda\sigma(\sigma^2 + \eta^2) = 0$$

$$\sigma^2 + \eta^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

となり、時間微分を含まなくなることから、拘束条件となります。この拘束条件によって、ポテンシャルはポテンシャルの最低値 (σ の真空期待値) の円上に制限されるので、ポテンシャルの形自体は必要なくなります。よって、この拘束条件からラグランジアンは

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 \ , \ \sigma^2 + \eta^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

となります (拘束条件は同じ)。
拘束条件は

$$\sigma^2 + \eta^2 = (\sigma + i\eta)(\sigma - i\eta) = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

なので

$$\sigma(x) + i\eta(x) = ve^{i\theta(x)}$$

とすれば、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 = \frac{1}{2}\partial_\mu(\sigma + i\eta)\partial^\mu(\sigma - i\eta) = \frac{1}{2}v^2(\partial_\mu \Sigma)(\partial^\mu \Sigma^\dagger) \quad (\Sigma = e^{i\theta}) \tag{2}$$

このように書き換えられます (エルミート共役にしていますが行列ではないので複素共役と同じ)。もしくは微分を実行して

$$\frac{1}{2}v^2(\partial_\mu \Sigma)(\partial^\mu \Sigma^\dagger) = \frac{1}{2}v^2(\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{\eta})(\partial^\mu \tilde{\eta}) \quad (\tilde{\eta} = v\theta)$$

このように質量のないボソン $\tilde{\eta}$ によるラグランジアンになり、$\tilde{\eta}$ には $e^{i\theta} = e^{i\tilde{\eta}/v}$ と拘束条件から、$0 \le \tilde{\eta} \le 2\pi v$ の制限があります。

次にフェルミオン項と相互作用項を加えます。フェルミオン項と相互作用項は

$$i\overline{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi - g\overline{\psi}(\sigma + i\gamma_5 \eta)\psi$$

拘束条件は三角関数を使うと

$$\sigma^2(x) + \eta^2(x) = v^2 \cos^2\theta(x) + v^2 \sin^2\theta(x) = v^2$$

なので

$$\sigma = v\cos\theta \ , \ \eta = v\sin\theta$$

これを入れると相互作用項は

$$\begin{aligned}
g\overline{\psi}(\sigma + i\gamma_5\eta)\psi &= gv\overline{\psi}(\cos\theta + i\gamma_5 \sin\theta)\psi \\
&= gv\overline{\psi}(\cos\theta + i\gamma_5 \sin\theta)\psi \\
&= gv\overline{\psi}(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\gamma_5 \cos\theta\sin\theta)\psi \quad (\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta \ , \ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta) \\
&= gv\overline{\psi}(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma_5 \sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma_5 \sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= gv\psi^\dagger(\cos\frac{\theta}{2} - i\gamma_5 \sin\frac{\theta}{2})\gamma_0(\cos\frac{\theta}{2} + i\gamma_5 \sin\frac{\theta}{2})\psi \\
&= gv\psi^\dagger e^{-i\gamma_5\theta/2}\gamma_0 e^{+i\gamma_5\theta/2}\psi
\end{aligned}$$

と書き換えられます。なので、ψ を

$$\chi = e^{+i\gamma_5\theta/2}\psi \ , \ \chi^\dagger = \psi^\dagger e^{-i\gamma_5\theta/2}$$

と置き換えれば、相互作用項は新しく定義された χ による質量項

$$g\overline{\psi}(\sigma + i\gamma_5\eta)\psi = gv\overline{\chi}\chi$$

となります。なので、ラグランジアン上のフェルミオン場 ψ を χ として再定義して、質量項を与えることにします。

フェルミオン項を χ に書き換えると

$$
\begin{aligned}
i\overline{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi &= i\chi^\dagger e^{i\gamma_5\theta/2}\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu(e^{-i\gamma_5\theta/2}\chi) \\
&= i\overline{\chi}e^{-i\gamma_5\theta/2}\gamma_\mu\partial^\mu(e^{-i\gamma_5\theta/2}\chi) \\
&= i\overline{\chi}e^{-i\gamma_5\theta/2}\gamma_\mu\partial^\mu(e^{-i\gamma_5\theta/2})\chi + i\overline{\chi}e^{-i\gamma_5\theta/2}\gamma_\mu e^{-i\gamma_5\theta/2}\partial^\mu\chi \\
&= i\overline{\chi}e^{-i\gamma_5\theta/2}\gamma_\mu\partial^\mu(e^{-i\gamma_5\theta/2})\chi + i\overline{\chi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi
\end{aligned}
$$

これの第一項は

$$
\begin{aligned}
e^{-i\gamma_5\theta/2}\gamma_\mu\partial^\mu(e^{-i\gamma_5\theta/2}) &= (\cos\phi - i\gamma_5\sin\phi)\gamma_\mu\partial^\mu(\cos\phi - i\gamma_5\sin\phi) \quad (\phi = \frac{\theta}{2}) \\
&= \gamma_\mu(\cos\phi + i\gamma^5\sin\phi)(\partial^\mu\cos\phi - i\gamma_5\partial^\mu\sin\phi) \\
&= \gamma_\mu(\cos\phi\partial^\mu\cos\phi + \sin\phi\partial^\mu\sin\phi + i\gamma_5\sin\phi\partial^\mu\cos\phi - i\gamma_5\cos\phi\partial^\mu\sin\phi) \\
&= \gamma_\mu(\cos\phi\partial^\mu\cos\phi + \sin\phi\partial^\mu\sin\phi) + i\gamma_\mu\gamma_5(\sin\phi\partial^\mu\cos\phi - \cos\phi\partial^\mu\sin\phi) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
e^{-i\phi}\partial^\mu e^{i\phi} &= (\cos\phi - i\sin\phi)\partial^\mu(\cos\phi + i\sin\phi) \\
&= \cos\phi\partial^\mu\cos\phi + i\cos\phi\partial^\mu\sin\phi - i\sin\phi\partial^\mu\cos\phi + \sin\phi\partial^\mu\sin\phi \\
e^{i\phi}\partial^\mu e^{-i\phi} &= (\cos\phi + i\sin\phi)\partial^\mu(\cos\phi - i\sin\phi) \\
&= \cos\phi\partial^\mu\cos\phi - i\cos\phi\partial^\mu\sin\phi + i\sin\phi\partial^\mu\cos\phi + \sin\phi\partial^\mu\sin\phi
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\cos\phi\partial^\mu\cos\phi + \sin\phi\partial^\mu\sin\phi &= \frac{1}{2}(e^{-i\phi}\partial^\mu e^{i\phi} + e^{i\phi}\partial^\mu e^{-i\phi}) \\
\sin\phi\partial^\mu\cos\phi - \cos\phi\partial^\mu\sin\phi &= \frac{1}{2i}(e^{i\phi}\partial^\mu e^{-i\phi} - e^{-i\phi}\partial^\mu e^{i\phi})
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
e^{-i\gamma_5\theta/2}\gamma_\mu\partial^\mu(e^{-i\gamma_5\theta/2}) &= \frac{1}{2}\gamma_\mu(\xi^\dagger\partial^\mu\xi + \xi\partial^\mu\xi^\dagger) + \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_5(\xi\partial^\mu\xi^\dagger - \xi^\dagger\partial^\mu\xi) \\
&= \frac{1}{i}\gamma_\mu V^\mu + \frac{1}{i}\gamma_\mu\gamma_5 A^\mu
\end{aligned}
$$

これの V^μ は

$$
\xi^\dagger\partial^\mu\xi + \xi\partial^\mu\xi^\dagger = e^{-i\theta'}\partial^\mu e^{i\theta'} + e^{i\theta'}\partial^\mu e^{-i\theta'} = i\partial^\mu\theta' - i\partial^\mu\theta' = 0
$$

なので、消えます。よってフェルミオン項は

$$i\overline{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi = i\overline{\chi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi + i\overline{\chi}e^{-i\gamma_5\theta/2}\gamma_\mu\partial^\mu(e^{-i\gamma_5\theta/2})\chi = i\overline{\chi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi + \overline{\chi}\gamma_\mu\gamma_5 A^\mu\chi$$

$$A^\mu = \frac{i}{2}(\xi\partial^\mu\xi^\dagger - \xi^\dagger\partial^\mu\xi) \quad (\Sigma = \xi\xi)$$

というわけで、(2) と合わせる事で全体のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}v^2(\partial_\mu\Sigma)(\partial^\mu\Sigma^\dagger) + i\overline{\chi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi + \overline{\chi}\gamma_\mu\gamma_5 A^\mu\chi - gv\overline{\chi}\chi$$

となって、χ の質量項がいる形になります。これが非線形シグマモデルでのラグランジアンです。σ が消えて、相互作用項に γ_5 が入ってくるという特徴があります。

ついでに左手系、右手系で書いてみます。「線形シグマモデル」で求めたように左手系を ψ_L、右手系を ψ_R とすれば

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}v^2(\partial_\mu\Sigma)(\partial^\mu\Sigma^\dagger) + i\overline{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R + i\overline{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L - gv(\overline{\psi}_L\Sigma\psi_R + \overline{\psi}_R\Sigma^\dagger\psi_L)$$

書き換えるには、$\chi_R = (1+\gamma_5)\chi/2$ から

$$\begin{aligned}
\chi &= e^{i\gamma_5\phi/2}\psi \\
\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\chi &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)e^{i\gamma_5\phi/2}\psi \\
\chi_R &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)(\cos\theta + i\gamma_5\sin\theta)\psi \\
&= \frac{1}{2}(\cos\theta + \gamma_5\cos\theta + i\sin\theta + +i\gamma_5\sin\theta)\psi \\
&= \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)(1+\gamma_5)\psi \\
&= e^{i\theta}\psi_R
\end{aligned}$$

χ_L も同様に、$\chi_L = (1-\gamma_5)\chi/2$ から

$$\begin{aligned}
\chi &= e^{i\gamma_5\phi/2}\psi \\
\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\chi &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)e^{i\gamma_5\phi/2}\psi \\
\chi_L &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)(\cos\theta + i\gamma_5\sin\theta)\psi \\
&= \frac{1}{2}(\cos\theta - \gamma_5\cos\theta - i\sin\theta + i\gamma_5\sin\theta)\psi \\
&= \frac{1}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)(1-\gamma_5)\psi \\
&= e^{-i\theta}\psi_L
\end{aligned}$$

なので

$$\psi_L = \xi\chi_L \ , \ \psi_R = \xi^\dagger\chi_R \quad (\xi = \Sigma^{1/2} = e^{i\theta/2v})$$

とすればいいです。そうすると

$$
\begin{aligned}
i\overline{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R &= i\overline{\chi}_R\xi\gamma_\mu\partial^\mu(\xi^\dagger\chi_R) = i\overline{\chi}_R\gamma_\mu(\partial^\mu + \xi(\partial^\mu\xi^\dagger))\chi_R \\
i\overline{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L &= i\overline{\chi}_L\xi^\dagger\gamma_\mu\partial^\mu(\xi\chi_L) = i\overline{\chi}_L\gamma_\mu(\partial^\mu + \xi^\dagger(\partial^\mu\xi))\chi_L
\end{aligned}
$$

相互作用項は

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi}_L\Sigma\psi_R &= \overline{\chi}_L\xi^\dagger\Sigma\xi^\dagger\chi_R = \overline{\chi}_L\chi_R = \frac{1}{2}\overline{\chi}(1+\gamma_5)\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\chi = \frac{1}{2}(\overline{\chi}\chi + \overline{\chi}\gamma_5\chi) \\
\overline{\psi}_R\Sigma^\dagger\psi_L &= \overline{\chi}_R\xi\Sigma^\dagger\xi\chi_L = \overline{\chi}_R\chi_L = \frac{1}{2}\overline{\chi}(1-\gamma_5)\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\chi = \frac{1}{2}(\overline{\chi}\chi - \overline{\chi}\gamma_5\chi)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}v^2(\partial_\mu\Sigma)(\partial^\mu\Sigma^\dagger) + i\overline{\chi}_R\gamma_\mu(\partial^\mu + \xi(\partial^\mu\xi^\dagger))\chi_R + i\overline{\chi}_L\gamma_\mu(\partial^\mu + \xi^\dagger(\partial^\mu\xi))\chi_L - m_f\overline{\chi}\chi
$$

これから χ に戻す手順も一応示しておきます。第二項は

$$
\begin{aligned}
i\overline{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R &= i\overline{\chi}_R\gamma_\mu\xi(\partial^\mu\xi^\dagger)\chi_R + i\overline{\chi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\chi_R \\
&= i\frac{1}{4}\overline{\chi}(1-\gamma_5)\gamma_\mu\xi(\partial^\mu\xi^\dagger)(1+\gamma_5)\chi + i\overline{\chi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\chi_R \\
&= i\frac{1}{4}\overline{\chi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)(1+\gamma_5)\xi(\partial^\mu\xi^\dagger)\chi + i\overline{\chi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\chi_R \\
&= i\frac{1}{2}\overline{\chi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\xi(\partial^\mu\xi^\dagger)\chi + i\overline{\chi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\chi_R
\end{aligned}
$$

同様に第三項は

$$
\begin{aligned}
i\overline{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L &= i\overline{\chi}_L\xi^\dagger\gamma_\mu(\partial^\mu\xi)\chi_L + i\overline{\chi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\chi_L \\
&= i\frac{1}{4}\overline{\chi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)(1-\gamma_5)\xi^\dagger(\partial^\mu\xi)\chi + i\overline{\chi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\chi_L \\
&= i\frac{1}{2}\overline{\chi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\xi^\dagger(\partial^\mu\xi)\chi + i\overline{\chi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\chi_L
\end{aligned}
$$

合わせると

$$
\begin{aligned}
&i\overline{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R + i\overline{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L \\
&\quad = i(\overline{\chi}_R + \overline{\chi}_L)\gamma_\mu\partial^\mu(\chi_R + \chi_L) + i\frac{1}{2}\overline{\chi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\xi(\partial^\mu\xi^\dagger)\chi + i\frac{1}{2}\overline{\chi}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\xi^\dagger(\partial^\mu\xi)\chi \\
&\quad = i\overline{\chi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi + i\frac{1}{2}\overline{\chi}\gamma_\mu(\xi(\partial^\mu\xi^\dagger) + \xi^\dagger(\partial^\mu\xi))\chi + i\frac{1}{2}\overline{\chi}\gamma_\mu\gamma_5(\xi(\partial^\mu\xi^\dagger) - \xi^\dagger(\partial^\mu\xi))\chi
\end{aligned}
$$

これの第二項は消えます。よって、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}v^2(\partial_\mu\Sigma)(\partial^\mu\Sigma^\dagger) + i\overline{\chi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi + \overline{\chi}\gamma_\mu\gamma_5 A^\mu\chi - m_f\overline{\chi}\chi$$

$$A^\mu = i\frac{1}{2}(\xi\partial^\mu\xi^\dagger - \xi^\dagger\partial^\mu\xi)\ ,\ m_f = gv$$

となって元に戻ります。

変換性を見ていきます。フェルミオンの変換はとりあえずどうでもよくて、今見たいのは $\tilde{\eta}$ ($\tilde{\eta} = v\theta$) です。カイラル変換 (軸性変換) 自体は「線形シグマモデル」で示したように

$$\Sigma\ \Rightarrow\ U_L\Sigma U_R^\dagger = e^{i\alpha_L}\Sigma e^{-i\alpha_R} = e^{i\alpha_L}e^{i\theta}e^{-i\alpha_R} = e^{i\theta'}$$

これを $\alpha_{L,R}$ の 1 次まででで展開すると

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_L}e^{i\theta}e^{-i\alpha_R} &= (1 + i\alpha_L - \frac{1}{2}\alpha_L^2)(1 + i\theta)(1 - i\alpha_R - \frac{1}{2}\alpha_R^2) \\ &= (1 + i\alpha_L - \frac{1}{2}\alpha_L^2)(1 + i\theta)(1 - i\alpha_R - \frac{1}{2}\alpha_R^2) \\ &= 1 + i\theta + i\alpha_L - i\alpha_R \end{aligned}$$

$e^{i\theta'}$ は

$$e^{i\theta'} = 1 + i\theta'$$

そうすると

$$1 + i\theta + i\alpha_L - i\alpha_R = 1 + i\theta'$$

なので、

$$\theta' = \theta + \alpha_L - \alpha_R$$

と変換されていることが分かります。この Σ のカイラル変換を θ に対するものだと見たとき、θ は平行移動と同じ形で変換され、さらに θ には拘束条件での 2π の周期性から $0 \leq \theta \leq 2\pi$ が与えられているために、一般的に線形変換ではないです (平行移動は線形変換ではない)。これが特徴で、質量 0 のボソン $\tilde{\eta}$ がカイラル変換に対して非線形な変換になっているという意味で非線形シグマモデルと呼ばれます。そして、この非線形の変換は自発的対称性の破れが起きているときに、出てきているのも特徴です (質量項を $\mu^2 > 0$ として自発的対称性の破れをおこしている)。

ちなみに、平行移動が線形変換でないことは、平行移動を $F(x) = ax + b$ としたとき

$$F(cx) = acx + b \neq cF(x)$$

$$F(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) + b = ax_1 + b + ax_2 + b - b = F(x_1) + F(x_2) - b \neq F(x_1) + F(x_2)$$

であることから分かります。

$SU(2)$ に移ります。$SU(2)$ での線形シグマモデルのボソン項は

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi^a)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2$$

π^a は $\pi^a = \boldsymbol{\pi} = (\pi^1, \pi^2, \pi^3),\ \boldsymbol{\pi}^2 = \pi^a\pi^a$ とします。ここでも $\lambda \to \infty, \mu^2 \to \infty$ にします。σ の運動方程式の形自体は変わらないので、拘束条件として

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

が出てきます。$SU(2)$ なのでパウリ行列 τ^a によって

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(\sigma + i\tau^a\pi^a)(\sigma - i\tau^b\pi^b)] \quad (\mathrm{tr}(\tau^a\tau^b) = 2\delta^{ab})$$

$$((\sigma + i\tau^a\pi^a)(\sigma - i\tau^b\pi^b) = \sigma^2 + i\tau^a\pi^a\sigma - i\tau^a\pi^a\sigma + \tau^a\tau^b\pi^a\pi^b)$$

トレースは $SU(2)$ の行列成分 (2×2 行列) に対して取っています。ここで

$$M = (\sigma + i\tau^a\pi^a) = f_\pi e^{i\tau^a\theta^a/f_\pi} = f_\pi\Sigma$$

とすれば

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(MM^\dagger) = \frac{1}{2}f_\pi^2\mathrm{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger) = f_\pi^2$$

σ の真空期待値 v ($v^2 = \mu^2/\lambda$) はパイオンの崩壊定数 f_π と同じなので、ここでは f_π を使うことにします。exp を展開してみると

$$\begin{aligned}
e^{i\tau^a\theta^a/f_\pi} &= 1 + \frac{i}{f_\pi}\tau^a\theta^a + \frac{1}{2}(\frac{i}{f_\pi})^2(\tau^a\theta^a)^2 + \frac{1}{3!}(\frac{i}{f_\pi})^3(\tau^a\theta^a)^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{i}{f_\pi}\tau^a\theta^a + \frac{1}{2}(\frac{i}{f_\pi})^2(\tau^a\theta^a)^2 + \frac{1}{3!}(\frac{i}{f_\pi})^3(\tau^a\theta^a)^3 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{f_\pi})^2(\tau^a\theta^a)^2 + \cdots + \frac{i}{f_\pi}\tau^a\theta^a - \frac{1}{3!}i(\frac{1}{f_\pi})^3(\tau^a\theta^a)^3 + \cdots \\
&= \cos\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi} + i\sin\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi}
\end{aligned} \tag{4}$$

実部は σ、虚部は π なので、θ^a の 0 次で $\sigma = f_\pi$、1 次では $\pi^a = \theta^a$ となっています。
　というわけで、ボソン項のラグランジアンは

$$(\partial_\mu\pi^a)^2 + (\partial_\mu\sigma)^2 = \partial^\mu(\sigma + i\tau^a\pi^a)\partial_\mu(\sigma - i\tau^b\pi^b) = \frac{1}{2}f_\pi^2\mathrm{tr}(\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger)$$

から、拘束条件 $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = f_\pi$ を持った

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4}f_\pi^2\mathrm{tr}(\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger) \tag{5}$$

となります。
　$SU(2)$ でのフェルミオン項と相互作用項

$$\mathcal{L}_f = i\overline{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - g\overline{\psi}(\sigma + i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi$$

も同じように見ていきます。拘束条件を三角関数で

$$
\begin{aligned}
\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2&=f_\pi^2\big(\cos^2\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi}+\sin^2\frac{\tau^b\theta^b}{f_\pi}\big)\\
&=f_\pi^2\big(\cos\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi}+i\frac{\theta^a}{|\theta|}\sin\frac{\tau^b\theta^b}{f_\pi}\big)\big(\cos\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi}-i\frac{\theta^a}{|\theta|}\sin\frac{\tau^b\theta^b}{f_\pi}\big)\quad(|\theta|=\sqrt{\theta^a\theta^a})
\end{aligned}
$$

とすれば

$$
\sigma=f_\pi\cos\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi}\ ,\ \pi^a=f_\pi\hat{\theta}^a\sin\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi}\qquad(\hat{\theta}^a=\frac{\theta^a}{|\theta|})
$$

これを相互作用項に入れて

$$
\begin{aligned}
g\overline{\psi}(\sigma+i\gamma_5\tau^a\pi^a)\psi&=gf_\pi\overline{\psi}\big(\cos\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi}+i\gamma_5\tau^a\hat{\theta}^a\sin\frac{\tau^a\theta^a}{f_\pi}\big)\psi\\
&=gf_\pi\psi^\dagger e^{-i\gamma^5\tau^a\theta^a/2f_\pi}\gamma_0e^{i\gamma^5\tau^b\theta^b/2f_\pi}\psi\\
&=gf_\pi\psi^\dagger\Lambda^\dagger\gamma_0\Lambda\psi\quad(\Lambda=e^{i\gamma^5\tau^a\theta^a/2f_\pi})
\end{aligned}
$$

これは「南部・Jona-Lasinio モデル」で求めています。これを質量項にするために、ここでもフェルミオン場を置き換えて

$$
\chi=\Lambda\psi\ ,\ \chi^\dagger=\psi^\dagger\Lambda^\dagger
$$

とします。フェルミオン項は γ_5 は γ_μ と反交換することから、χ に置き換えると

$$
\begin{aligned}
i\overline{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi&=i\chi^\dagger\Lambda\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu(\Lambda^\dagger\chi)\\
&=i\chi^\dagger\Lambda\gamma_0\gamma_\mu(\partial^\mu\Lambda^\dagger)\chi+i\chi^\dagger\Lambda\gamma_0\gamma_\mu\Lambda^\dagger\partial^\mu\chi\\
&=i\chi^\dagger\Lambda\gamma_0\gamma_\mu(\partial^\mu\Lambda^\dagger)\chi+i\overline{\chi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi
\end{aligned}\tag{6}
$$

第一項は

$$
\begin{aligned}
i\Lambda\gamma_0\gamma_\mu(\partial^\mu\Lambda^\dagger)&=ie^{i\gamma^5\tau^a\theta^a/2f_\pi}\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu e^{-i\gamma^5\tau^b\theta^b/2f_\pi}\\
&=i\gamma_0\gamma_\mu(\cos\frac{\tau^a\theta^a}{2f_\pi}+i\gamma^5\sin\frac{\tau^a\theta^a}{2f_\pi})\partial^\mu(\cos\frac{\tau^a\theta^a}{2f_\pi}-i\gamma^5\sin\frac{\tau^a\theta^a}{2f_\pi})
\end{aligned}
$$

これは (3) と同じ形なので

$$
\xi=e^{i\tau^a\theta^a/2f_\pi}
$$

として

$$
i\chi^\dagger\Lambda\gamma_0\gamma_\mu(\partial^\mu\Lambda^\dagger)\chi=\overline{\chi}\gamma_\mu V^\mu\chi+\overline{\chi}\gamma_\mu\gamma_5A^\mu\chi\tag{7}
$$

$$V^\mu = \frac{i}{2}(\xi\partial^\mu\xi^\dagger + \xi^\dagger\partial^\mu\xi)\ ,\ A^\mu = \frac{i}{2}(\xi\partial^\mu\xi^\dagger - \xi^\dagger\partial^\mu\xi)$$

このとき、$SU(2)$ では

$$e^{-i\tau^a\theta^a}\partial_\mu e^{i\tau^b\theta^b} = ie^{-i\tau^a\theta^a}\tau^c e^{i\tau^b\theta^b}\partial_\mu\theta^c$$

となっていて、パウリ行列は交換しないので、V^μ は消えずに残ります。

よって、(5),(6),(7) を合わせる事で全体のラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}f_\pi^2\mathrm{tr}(\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger) + \overline{\chi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi + \overline{\chi}\gamma_\mu V^\mu\chi + \overline{\chi}\gamma_\mu\gamma_5 A^\mu\chi - gf_\pi\overline{\chi}\chi \\ &= \frac{1}{4}f_\pi^2\mathrm{tr}(\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger) + i\overline{\chi}\gamma_\mu(\partial^\mu - iV^\mu)\chi + \overline{\chi}\gamma_\mu\gamma_5 A^\mu\chi - m_f\overline{\chi}\chi\end{aligned}$$

となって、$SU(2)$ では V^μ の項が残ります。また、$\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger$ の項はカイラル変換で不変なので、

$$\mathrm{tr}(\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger)\mathrm{tr}(\partial^\mu\Sigma\partial_\mu\Sigma^\dagger)$$

のような項を加えてもカイラル不変なままになります。なので、こういった項をどんどん付け加えていくことが出来ます。

変換性を見ていきます。(4) から、θ^a を π^a として変換を求めます。変換は

$$\Sigma\ \Rightarrow\ U_L\Sigma U_R^\dagger = e^{i\tau^a\alpha_L^a}\Sigma e^{-i\tau^b\alpha_R^b} = e^{i\tau^a\alpha_L^a}e^{i\tau^c\pi^c/f_\pi}e^{-i\tau^b\alpha_R^b} = e^{i\tau^c\pi'^c/f_\pi}$$

これを $\alpha_L = -\alpha_R = \alpha$ として展開すると

$$\begin{aligned}e^{i\tau^a\alpha_L^a}e^{i\tau^c\pi^c/f_\pi}e^{-i\tau^b\alpha_R^b} &= (1 + i\tau^a\alpha^a - \cdots)(1 + \frac{i}{f_\pi}\tau^c\pi^c - \cdots)(1 + i\tau^b\alpha^b - \cdots) \\ &= 1 + \frac{i}{f_\pi}\tau^a\pi^a + i\tau^a\alpha^a + i\tau^a\alpha^a + \cdots\end{aligned}$$

よって

$$\pi'^a = \pi^a + 2\tau^a\alpha^a + \cdots$$

これから π^a の変換が一般的に非線形になっていることが分かります。

ラグランジアンを求めた後の話としては、線形シグマモデルと同じように、核子とパイオンの散乱振幅を求めたりします。それらを元にカイラル摂動論というのが作られています。他にもパイオンの低エネルギー定理 (パイオンの低エネルギー領域は対称性によって決まっているというもの) を見るために非線形シグマモデルを持ち出して、nonlinear realization の話をしたりもします (低エネルギー定理は線形シグマモデルでも扱う)。nonlinear realization は、群論の枠組みで扱われるもので、Callan-Coleman-Wess-Zumino の方法として与えられています。nonlinear realization は超対称性に対しても使われています。