

Lehmann-Källén スペクトル表示

相互作用ありでの伝播関数を、完全性を挟んだスペクトル表示で表現します。

ここではスカラー場を使いますが、ディラック場でもスピノール成分があるだけで同じ結果になります。

実スカラー場での相互作用のある伝播関数 $D(x-y)$ を見ていきます。伝播関数は場 $\phi(x), \phi(y)$ の時間順序積を真空 $|\Omega\rangle$ で挟めばよく

$$D(x-y) = \langle \Omega | T[\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle = \theta(x_0 - y_0) \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle \Omega | \phi(y)\phi(x) | \Omega \rangle$$

θ は階段関数です。これに完全正規直交系の固有状態を挟んでいきます。

運動量 P_μ の固有状態を $|p\rangle$ ($P_\mu|p\rangle = p_\mu|p\rangle$) とします (P_0 はハミルトニアンで P とは交換する)。ついでに、適当な状態を表す λ をくっつけて $|p, \lambda\rangle$ として

$$P^\mu|n\rangle = p_{(n)}^\mu|n\rangle, \quad |n\rangle = |p, \lambda\rangle$$

$|n\rangle$ は p と λ に関して完全正規直交系を作っているとして、完全性を

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \sum_\lambda \int d^4p |p, \lambda\rangle\langle p, \lambda|$$

と書くことにします。これを挟めば

$$\langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle = \sum_n \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(y) | \Omega \rangle$$

場の演算子の時間発展から

$$\langle k | \phi(x) | p \rangle = \langle k | e^{iPx} \phi(0) e^{-iPx} | p \rangle = \langle k | \phi(0) | p \rangle e^{-i(p-k)x}$$

なので

$$\sum_n \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(y) | \Omega \rangle = \sum_n \langle \Omega | e^{iPx} \phi(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) e^{-iPy} | \Omega \rangle e^{-ip_{(n)}(x-y)}$$

真空は並進不変性を持つとするので、 P^μ が作用しても変化しないことから

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle &= \sum_n \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(y) | \Omega \rangle \\ &= \sum_n \langle \Omega | \phi(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) | \Omega \rangle e^{-ip_{(n)}(x-y)} \\ &= \sum_n |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2 e^{-ip_{(n)}(x-y)} \end{aligned}$$

ここで物理的な要請を加えます。物理的な状態の運動量は時間的 (time-like) で正のエネルギーを持つので、 $p_{(n)}^\mu$ は時間的で $p_0 \geq 0$ とします。この運動量の制限を階段関数で与えて、固定された p に対して

$$\theta(p^2)\theta(p_0)\rho(p^2) = (2\pi)^3 \sum_{\lambda} |\langle \Omega | \phi(0) | p, \lambda \rangle|^2$$

となる、 $\rho(p^2)$ を定義します。 p^2 に依存させているのは、ローレンツ不変性のためです。これによって

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \sum_{\lambda} \int d^4 p |\langle \Omega | \phi(0) | p, \lambda \rangle|^2 e^{-ip(x-y)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \theta(p^2) \theta(p_0) \rho(p^2) e^{-ip(x-y)} \end{aligned}$$

階段関数はデルタ関数から

$$\theta(p^2) = \int_{-\infty}^{p^2} dz \delta(z) = - \int_{\infty}^0 d\alpha \delta(p^2 - \alpha) = \int_0^{\infty} d\mu^2 \delta(p^2 - \mu^2)$$

α の範囲が正なので、最後に μ^2 と書き換えています。これを入れて

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d\mu^2 \int d^4 p \delta(p^2 - \mu^2) \theta(p_0) \rho(p^2) e^{-ip(x-y)} \\ &= \int_0^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \theta(p_0) \delta(p^2 - \mu^2) e^{-ip(x-y)} \\ &= \int_0^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - \mu^2} e^{-ip(x-y)} \end{aligned}$$

ここで、「伝播関数について」で出てきた $\Delta^{(\pm)}$

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(x-y; m^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)} \\ \Delta^{(-)}(x-y; m^2) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta(-p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)} \end{aligned}$$

を使えば

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^{(+)}(x-y; \mu^2) \quad (1a)$$

同様に行えば $\langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle$ では

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle &= \int_0^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^{(+)}(y-x; \mu^2) \\ &= - \int_0^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^{(-)}(x-y; \mu^2) \end{aligned} \quad (1b)$$

よって

$$\begin{aligned}
D(x-y) &= \langle \Omega | T[\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle = \theta(x_0 - y_0) \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^{(+)}(x-y; \mu^2) \\
&\quad - \theta(y_0 - x_0) \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^{(-)}(x-y; \mu^2) \\
&= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta_F(x-y; \mu^2)
\end{aligned} \tag{2}$$

Δ_F は

$$\Delta_F(x-y; \mu^2) = \theta(x_0 - y_0) \Delta^{(+)}(x-y; \mu^2) - \theta(y_0 - x_0) \Delta^{(-)}(x-y; \mu^2)$$

このように、質量が μ^2 の自由な伝播関数 Δ_F に $\rho(\mu^2)$ の重りをつけて積分すると相互作用ありの伝播関数になります。 $\rho(\mu^2)$ をスペクトル関数やスペクトル密度と言い、(2) を Lehmann-Källén スペクトル表示と呼びます。

スペクトル関数の和則 (sum rule) を求めておきます。まず、 $\phi(x)$ の交換関係を真空中で挟めば、(1a),(1b) から

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle &= \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle - \langle \Omega | \phi(y)\phi(x) | \Omega \rangle \\
&= \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^{(+)}(x-y; \mu^2) + \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^{(-)}(x-y; \mu^2) \\
&= \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta(x-y; \mu^2) \quad (\Delta = \Delta^{(+)} + \Delta^{(-)})
\end{aligned}$$

これを時間微分して同時刻とすれば、左辺は同時刻交換関係を要求 (仮定) して

$$\partial_{y_0} [\phi(x), \phi(y)]|_{x_0=y_0} = [\phi(x), \partial_{y_0} \phi(y)]|_{x_0=y_0} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

右辺の $\Delta(x-y; \mu^2)$ は

$$\begin{aligned}
\Delta^{(+)}(x-y; \mu^2) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\mu)} e^{-ip(x-y)} \\
\Delta^{(-)}(x-y; \mu^2) &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\mu)} e^{ip(x-y)}
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
\partial_{y_0} \Delta(x-y; \mu^2)|_{x_0=y_0} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\mu)} \partial_{y_0} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)})|_{x_0=y_0} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\mu)} (ip_0 e^{-ip(x-y)} + ip_0 e^{ip(x-y)})|_{x_0=y_0} \quad (p_0 = E_{\mathbf{p}}(\mu)) \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} (e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}) \\
&= i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}$$

$x_0 = y_0$ から 3 行目で $\exp$ 内は 3 次元の内積になります。よって

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle &= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta(x-y; \mu^2) \\
i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2)
\end{aligned}$$

から

$$\int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) = 1$$

となり、これをスペクトル関数の和則と言います。

スペクトル関数を違う視点から見ます。(1a) は

$$\Delta^{(+)}(x-y; \mu^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - \mu^2} e^{-ip(x-y)}$$

であることと

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)}|_{p_0=E_{\mathbf{p}}} \quad (E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$$

を使うと

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - \mu^2} e^{-ip(x-y)} \\
&= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\mu)} e^{-ip(x-y)}|_{p_0=E_{\mathbf{p}}(\mu)} \quad (E_{\mathbf{p}}(\mu) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mu^2}) \quad (3)
\end{aligned}$$

ここで、質量 m_λ を持つ状態 $|\mathbf{p}, \lambda\rangle$ を考えます。このときの完全性は 3 次元運動量積分になるので、ローレンツ不変性を持たせるために

$$\sum_\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} |\mathbf{p}, \lambda\rangle \langle \mathbf{p}, \lambda| = 1$$

とします (「規格化について」参照)。そして

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\phi(x)|\mathbf{p},\lambda\rangle &= \langle\Omega|e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}|\mathbf{p},\lambda\rangle = \langle\Omega|\phi(0)e^{-ipx}|\mathbf{p},\lambda\rangle \quad (p_0 = E_{\mathbf{p}}(\lambda)) \\ &= \langle\Omega|\phi(0)|\mathbf{p},\lambda\rangle e^{-ipx}\end{aligned}$$

これらから、完全性を挟むと

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} |\langle\Omega|\phi(0)|\mathbf{p},\lambda\rangle|^2 e^{-ip(x-y)} \Big|_{p_0=E_{\mathbf{p}}(\lambda)}$$

(3) と比べれば

$$\rho(\mu^2) = \sum_{\lambda} \delta(\mu^2 - m_{\lambda}^2) |\langle\Omega|\phi(0)|\mathbf{p},\lambda\rangle|^2 \quad (4)$$

となります。このように、スペクトル関数は状態の質量によるデルタ関数を含んでいます。実際に、相互作用していない質量 m_0 の粒子とすれば

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \Delta^{(+)}(x-y; m_0^2) = \int_0^{\infty} d\mu^2 \rho(\mu^2) \Delta^{(+)}(x-y; \mu^2)$$

から

$$\rho(\mu^2) = \delta(\mu^2 - m_0^2) \quad (5)$$

となり、1 粒子の質量によるデルタ関数になります。

相互作用があるときの質量 m の 1 粒子状態を

$$P^{\mu} |p, p^2 = m^2\rangle = p^{\mu} |p, p^2 = m^2\rangle$$

として与えれば

$$\langle\Omega|\phi(x)|p, p^2 = m^2\rangle = \langle\Omega|\phi(0)|p, p^2 = m^2\rangle e^{-ipx}$$

スペクトル関数は p^2 に依存させているので、 $\langle\Omega|\phi(0)|p, p^2 = m^2\rangle$ は定数です。なので、定数を $\sqrt{Z}$ として

$$\langle\Omega|\phi(0)|p, p^2 = m^2\rangle = \sqrt{Z} e^{-ipx}$$

これは相互作用がないときの 1 粒子状態 $|p\rangle$ による $\langle 0|\phi(0)|p\rangle = e^{-ipx}$ に定数 $\sqrt{Z}$ がついているだけです。よって、(5) に Z が付くだけになり、この状態を分離して書けば

$$\rho(\mu^2) = Z\delta(\mu^2 - m^2) + \sum_{\lambda'} |\langle \Omega | \phi(0) | p, \lambda' \rangle|^2 = Z\delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2) \quad (6)$$

第一項は1粒子なので、第二項は2粒子以上の状態による項と考えます。(4) から

$$\begin{aligned} \rho(\mu^2) &= \sum_{\lambda} \delta(\mu^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(0) | p, \lambda \rangle|^2 \\ &= \delta(\mu^2 - m^2) |\langle \Omega | \phi(0) | p \rangle|^2 + \sum_{\lambda'} \delta(\mu^2 - m_{\lambda'}^2) |\langle \Omega | \phi(0) | p, \lambda' \rangle|^2 \\ &= Z\delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2) \end{aligned}$$

として、同じことになります。

このように1粒子状態が分離されるために、1粒子状態 m^2 は孤立した値を持ちます。第二項は2粒子以上の項と考えられ、同じ粒子なら $\mu^2 \geq (2m)^2$ となります。典型的なスペクトル関数は、孤立した1粒子状態の値と、 $\mu^2 \geq (2m)^2$ からの連続的な値を持ちます。また、1粒子状態が安定した束縛状態を持たなければ、2粒子状態に連続的に移っていきます。

伝播関数 (2) に (6) を入れれば

$$\langle \Omega | T[\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle = Z \int_0^\infty d\mu^2 \delta(\mu^2 - m^2) \Delta_F(x-y; \mu^2) + \int^\infty d\mu^2 \sigma(\mu^2) \Delta_F(x-y; \mu^2)$$

第二項の積分の下限は状況によるので省いています。例えば、第二項に2粒子以上という制限を与えるなら積分の下限は $\mu^2 \geq (2m)^2$ になります。伝播関数 $D(x, y)$ の運動量表示を $D(p)$ とすれば

$$\begin{aligned} D(p) &= Z \int_0^\infty d\mu^2 \delta(\mu^2 - m^2) \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \int^\infty d\mu^2 \sigma(\mu^2) \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int^\infty d\mu^2 \sigma(\mu^2) \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

これも第二項に2粒子以上という制限を与えるなら積分の下限は $\mu^2 \geq (2m)^2$ になります。

相互作用がないときの質量を m_0 、あるときの質量を m として区別していることに注意してください。これは、ラグランジアンに現れる質量 m_0 と観測される質量 m は異なることを意味します。これはくり込みの話で出てきます。

Z についても触れておきます。 Z は場のくり込み定数と呼ばれます。このように呼ばれるのは

$$\phi(x) \Rightarrow \sqrt{Z}\phi(x)$$

と置き換えることに対応するからです。これから、場のくり込み定数によって場は再規格化されると表現されるときもあります。そして、場のくり込み定数 Z は、自由な場合では

$$Z = |\langle 0 | \phi(0) | p \rangle|^2 = 1 \quad (\langle p | \phi(0) | 0 \rangle = e^{-ipx})$$

であるために現れません。

Z は、 $D(p)$ の分母が $p^2 = m^2$ で極を持つことから、厳密な伝播関数の 1 粒子状態の留数になっています。このことは自己エネルギーを使った式からも分かり、「自己エネルギーと頂点関数」で出てきた自己エネルギーによる厳密な伝播関数の形

$$G_{con}^{(2)} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (m^2 = m_0^2 + \Sigma(p))$$

での分母が $p^2 = m^2$ ($i\epsilon$ は無視) で極をもつことに対応します。分母を $p^2 = m^2$ 周りで展開してみると

$$0 + (1 - \frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2})(p^2 - m^2) + O((p^2 - m^2)^2)$$

これと $D(p)$ を比べれば

$$Z^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{dp^2}|_{p^2=m^2}$$

と分かります。

Z には制限があります。スペクトル関数の和則から

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) = \int_0^\infty d\mu^2 (Z\delta(\mu^2 - m^2) + \sum_\lambda \delta(\mu^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p}, \lambda \rangle|^2) \\ &= Z + \int_0^\infty d\mu^2 \sigma(\mu^2) \end{aligned}$$

$\sigma(\mu^2)$ は複素数の絶対値なので、一般的に $\sigma(\mu^2) \geq 0$ です。このため、 Z には

$$0 \leq Z \leq 1$$

という制限があります。しかし、 Z は摂動論によって計算すると発散を含んで出てきます。そのため、 $Z = \infty$ になってしまい、この制限を満たしていないように思えます。しかし、摂動論では全てのオーダーの寄与を考えなくては厳密な結果にならないので、ここでの話のような厳密な場合での結果と単純に比較できません。特に、摂動展開では収束性の問題などもあるので、すぐに分かるようなものではないです。

例えば、単純な構造として

$$Z = \frac{1}{1 - g^2 \log a}$$

という形を与えます (g は結合定数)。このような形を考えるのは、 Z は摂動展開すると

$$Z = 1 + Z^{(1)} + Z^{(2)} + \dots$$

と出てくるからです ($Z^{(1)}, Z^{(2)}$ は摂動展開したときの 1 次、2 次のオーダー)。 $Z^{(n)}$ が発散していても、の形に書いたとすれば、 a は 0 に近づくので対数は発散します。しかし、分母にいたために、 Z は 0 に近づき、無限大にはなりません。しかし、この状況が常に成り立っている保証は一般的な摂動論の枠組み内ではないです。また、 a を適当な値に固定して、 g^2 が微小として展開すれば $Z > 1$ になります。