超ポアンカレ代数

ポアンカレ代数に反交換関係を付け加えます。ここでの結果は「Wess-Zumino モデル」の話からもいけますが、別方向から求めます。超ポアンカレ代数を求めるだけなので、結果だけ知っていればいいという人は飛ばしてください。
$SL(2,C)$ の話は「ローレンツ群と $SL(2,C)$」と「$SL(2,C)$ の左手系、右手系」を見てください。
ここでの 2 成分スピノールに関する表記は補足 1 にまとめています。
重なっている添え字は和を取ります。途中から大文字のローマ文字の範囲を $1,2,3,4$ から $1,2$ にしています。

ポアンカレ代数に反交換関係を付け足す理由を大雑把に見ていきます。ボソンの状態 $|B\rangle$ とフェルミオンの状態 $|F\rangle$ に対して

$$Q|B\rangle = |F\rangle\ ,\ Q|F\rangle = |B\rangle$$

とする演算子を考えます。このような演算子は単純に考えれば、ボソンの生成、消滅演算子を $b^\dagger, b$、フェルミオンの生成、消滅演算子を $f^\dagger, f$ として、

$$b|0\rangle = f|0\rangle = 0$$

$$b^\dagger|0\rangle = |B\rangle\ ,\ f^\dagger|0\rangle = |F\rangle$$

$$[b, b^\dagger] = 1\ ,\ \{f, f^\dagger\} = 1\ ,\ [b, f] = [b^\dagger, f^\dagger] = [b^\dagger, f] = [f^\dagger, b] = 0$$

と設定し、Q を

$$Q = f^\dagger b + b^\dagger f$$

と与えれば

$$Q|B\rangle = Qb^\dagger|0\rangle = (f^\dagger b + b^\dagger f)b^\dagger|0\rangle = (f^\dagger b^\dagger b + f^\dagger + b^\dagger b^\dagger f)|0\rangle = f^\dagger|0\rangle = |F\rangle$$

$$Q|F\rangle = Qf^\dagger|0\rangle = (f^\dagger b + b^\dagger f)f^\dagger|0\rangle = (f^\dagger f^\dagger b - b^\dagger f^\dagger f + b^\dagger)|0\rangle = |B\rangle$$

このように、Q によってボソンとフェルミオンの状態を入れ替えられます。
これだけでは単に生成子を作っただけなので、その性質を知るためには生成子 Q の代数がどうなっているのかを求める必要があります。そのために、まずは Q がどういったものなのか考えます。
Q はスピンを $1/2$ 変えるので、反交換関係に従うはずで、スピノールになっていると考えられます。次に Q による対称性は、時空の対称性なのか内部対称性なのかです。場の量子論において、時空の対称性は時空上の変換 (並進とローレンツ変換) であるポアンカレ変換、内部対称性はアイソスピンとかです。Q が行っているのはスピンを $1/2$ 変えるもので、スピンが変わると、空間回転の受け方が変わるので (例えば、スピノールの回転である $SU(2)$ は 4π で元に戻り、ベクトルの回転 $O(3)$ は 2π で元に戻る)、Q による変換は時空における変換に影響を与えます。このため Q は時空における対称性の一種と考えます。
つまり、Q は反交換関係に従う時空上の対称性の生成子ということなので、ポアンカレ代数にこの生成子を付け加えればいいことになります。ただし、ここで問題が起きていました。なぜなら、コールマン・マンドゥーラ (Coleman-Mandula) の定理と呼ばれるものによって、S 行列は対称性としてポアンカレ変換による時空の対称性と内部対称性の組み合わせしか持たせられない、ということが示されているからです。S 行列を変える変換を理論の中に組み込むことは出来ないので、時空の新しい対称性を加えることができません。コールマン・マンドゥーラの定理は、ポアンカレ群での並進の生成子 P_α とローレンツ変換の生成子 $J_{\alpha\beta}$(「生成子・ポアンカレ群」参照) と、内部対称性の生成子 T_i の間には

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0 \tag{1a}$$

$$[P_\alpha, J_{\mu\nu}] = i(\eta_{\alpha\mu} P_\nu - \eta_{\alpha\nu} P_\mu) \tag{1b}$$

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] = i(\eta_{\beta\mu} J_{\alpha\nu} - \eta_{\beta\nu} J_{\alpha\mu} - \eta_{\alpha\mu} J_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} J_{\beta\mu}) \tag{1c}$$

$$[T_i, T_j] = c_{ijk} T_k \tag{1d}$$

$$[P_\alpha, T_i] = [J_{\alpha\beta}, T_i] = 0 \tag{1e}$$

という関係しか持たないと言っています。$\eta_{\alpha\beta}$ はミンコフスキー計量 $(+,-,-,-)$、c_{ijk} は構造定数、$P_\alpha, J_{\alpha\beta}$ は

$$P_\alpha = -i\partial_\alpha \ , \ J_{\alpha\beta} = i(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)$$

としています。P_α 同士はそのままで、P_α と $J_{\alpha\beta}$ は

$$\begin{aligned}
[P_\alpha, J_{\mu\nu}] = [-i\partial_\alpha, i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)] &= -i^2 \partial_\alpha (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + i^2 (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\partial_\alpha \\
&= -i^2 \eta_{\alpha\mu} \partial_\nu - i^2 \eta_{\nu\alpha} \partial_\mu \\
&= i(\eta_{\alpha\mu} P_\nu - \eta_{\nu\alpha} P_\mu)
\end{aligned}$$

$J_{\alpha\beta}$ 同士は

$$\begin{aligned}
[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] &= [i(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha), i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)] \\
&= i^2[(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) - (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)] \\
&= i^2 \big((x_\alpha \partial_\beta (x_\mu \partial_\nu) - x_\alpha \partial_\beta (x_\nu \partial_\mu) - x_\beta \partial_\alpha (x_\mu \partial_\nu) + x_\beta \partial_\alpha (x_\nu \partial_\mu) \\
&\qquad - x_\mu \partial_\nu (x_\alpha \partial_\beta) + x_\mu \partial_\nu (x_\beta \partial_\alpha) + x_\nu \partial_\mu (x_\alpha \partial_\beta) - x_\nu \partial_\mu (x_\beta \partial_\alpha)\big) \\
&= i^2 (x_\alpha \eta_{\beta\mu} \partial_\nu - x_\alpha \eta_{\beta\nu} \partial_\mu - x_\beta \eta_{\alpha\mu} \partial_\nu + x_\beta \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu - x_\mu \eta_{\nu\alpha} \partial_\beta + x_\mu \eta_{\nu\beta} \partial_\alpha + x_\nu \eta_{\mu\alpha} \partial_\beta - x_\nu \eta_{\mu\beta} \partial_\alpha) \\
&= i^2 \big(\eta_{\beta\mu}(x_\alpha \partial_\nu - x_\nu \partial_\alpha) + \eta_{\beta\nu}(x_\mu \partial_\alpha - x_\alpha \partial_\mu) + \eta_{\alpha\mu}(x_\nu \partial_\beta - x_\beta \partial_\nu) + \eta_{\alpha\nu}(x_\beta \partial_\mu - x_\mu \partial_\beta)\big) \\
&= i\big(\eta_{\beta\mu} i(x_\alpha \partial_\nu - x_\nu \partial_\alpha) - \eta_{\beta\nu} i(x_\alpha \partial_\mu - x_\mu \partial_\alpha) - \eta_{\alpha\mu} i(x_\beta \partial_\nu - x_\nu \partial_\beta) + \eta_{\alpha\nu} i(x_\beta \partial_\mu - x_\mu \partial_\beta)\big) \\
&= i(\eta_{\beta\mu} J_{\alpha\nu} - \eta_{\beta\nu} J_{\alpha\mu} - \eta_{\alpha\mu} J_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} J_{\beta\mu})
\end{aligned}$$

$J_{\alpha\beta}$ の交換関係は「ローレンツ群と $SL(2,C)$」と同じになっています。

しかし、新しい時空の対称性が反交換関係に従っているなら、この定理は適用されないということが示されました。これは Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理と呼ばれます。このため、反交換関係に従う時空の対称性である Q を場の量子論の中に加えることが出来ます。この交換関係によるリー代数に反交換関係を加えたものを次数つきリー代数 (graded Lie algebra) と呼びます。

というわけで、反交換関係に従う生成子をポアンカレ群に入れても場の量子論の要請を壊しません。なので、フェルミオンとボソンを入れ替える変換を場の量子論の中に加えることができます。これが、ポアンカレ群に反交換関係を加える理論上の理由で、これによって何がどうなるかを調べるのが超対称性理論 (supersymmetry theory) で、略して SUSY です。

理由の話は終わりにして、ポアンカレ群の交換関係の中に反交換関係を満たす生成子を加えます。そのために、交換関係と反交換関係の規則を与えておきます。交換関係に従う生成子を偶、反交換関係に従う生成子を奇とします。偶同士の交換関係は偶、奇同士の反交換関係は偶 (例えばスピノールの $\psi^\dagger \chi$ は普通の数)、偶と奇の交換関係は奇です (普通の数とスピノールの積はスピノール)。なので

$$[\text{偶},\text{偶}]=\text{偶}$$

$$\{\text{奇},\text{奇}\}=\text{偶}$$

$$[\text{偶},\text{奇}]=\text{奇}$$

という関係を持たせせます。また、偶の生成子を B、奇の生成子を F としたとき、反交換関係も含む一般化されたヤコビの恒等式として

$$[B_1,[B_2,B_3]]+[B_2,[B_3,B_1]]+[B_3,[B_1,B_2]]=0 \tag{2a}$$

$$[F_1,\{F_2,F_3\}]+[F_2,\{F_1,F_3\}]+[F_3,\{F_1,F_2\}]=0 \tag{2b}$$

$$[B_1,[B_2,F_3]]+[B_2,[F_3,B_1]]+[F_3,[B_1,B_2]]=0 \tag{2c}$$

$$\{[B_1,F_2],F_3\}+\{[B_1,F_3],F_2\}+[\{F_2,F_3\},B_1]=0 \tag{2d}$$

というのを満たす必要があります。これらに従って Q と $P_\alpha, J_{\alpha\beta}, T_i$ との交換関係を作ります。

反交換関係に従う生成子の添え字は Q^i_A $(i=1,2,\dots,N)$ として、大文字のローマ文字はスピノール成分の添え字、i は Q の区別だとします。

- Q^i_A と $J_{\alpha\beta}$

  Q^i_A と $J_{\alpha\beta}$ の交換関係は奇と偶なので、奇になることから

  $$[Q^i_A,J_{\alpha\beta}]=(b_{\alpha\beta})_A{}^BQ^i_B$$

  とし (奇の生成子は Q^i_A しかない)、この $(b_{\alpha\beta})_A{}^B$ を決めます。ヤコビの恒等式 (2c) において、Q^i_A を F_3、$J_{\alpha\beta}$ を B_1、$J_{\mu\nu}$ を B_2 に当てはめて

  $$[J_{\alpha\beta},[J_{\mu\nu},Q^i_A]]+[J_{\mu\nu},[Q^i_A,J_{\alpha\beta}]]+[Q^i_A,[J_{\alpha\beta},J_{\mu\nu}]]=0$$

  これに入れると

  $$\begin{aligned}&-(b_{\mu\nu})_A{}^B[J_{\alpha\beta},Q^i_B]+(b_{\alpha\beta})_A{}^B[J_{\mu\nu},Q^i_B]+[Q^i_A,[J_{\alpha\beta},J_{\mu\nu}]]\\&\quad=(b_{\mu\nu})_A{}^B(b_{\alpha\beta})_B{}^CQ^i_C-(b_{\alpha\beta})_A{}^B(b_{\mu\nu})_B{}^CQ^i_C+[Q^i_A,[J_{\alpha\beta},J_{\mu\nu}]]\\&\quad=\ -[(b_{\alpha\beta})_A{}^B,(b_{\mu\nu})_B{}^C]Q^i_C+[Q^i_A,[J_{\alpha\beta},J_{\mu\nu}]]\end{aligned}$$

  第二項は

  $$\begin{aligned}[Q^i_A,[J_{\alpha\beta},J_{\mu\nu}]]&=i[Q^i_A,\eta_{\beta\mu}J_{\alpha\nu}-\eta_{\beta\nu}J_{\alpha\mu}-\eta_{\alpha\mu}J_{\beta\nu}+\eta_{\alpha\nu}J_{\beta\mu}]\\&=i\eta_{\beta\mu}[Q^i_A,J_{\alpha\nu}]-i\eta_{\beta\nu}[Q^i_A,J_{\alpha\mu}]-i\eta_{\alpha\mu}[Q^i_A,J_{\beta\nu}]+i\eta_{\alpha\nu}[Q^i_A,J_{\beta\mu}]\\&=i\eta_{\beta\mu}(b_{\alpha\nu})_A{}^BQ^i_B-i\eta_{\beta\nu}(b_{\alpha\mu})_A{}^BQ^i_B-i\eta_{\alpha\mu}(b_{\beta\nu})_A{}^BQ^i_B+i\eta_{\alpha\nu}(b_{\beta\mu})_A{}^BQ^i_B\end{aligned}$$

  よって

$$[(b_{\alpha\beta})_A{}^B,(b_{\mu\nu})_B{}^C]=i\eta_{\beta\mu}(b_{\alpha\nu})_A{}^B-i\eta_{\beta\nu}(b_{\alpha\mu})_A{}^B-i\eta_{\alpha\mu}(b_{\beta\nu})_A{}^B+i\eta_{\alpha\nu}(b_{\beta\mu})_A{}^B$$

これから $(b_{\alpha\beta})_A{}^B$ はローレンツ変換の生成子 $J_{\alpha\beta}$ と同じ交換関係を持つことが分かります。つまり、$(b_{\alpha\beta})_A{}^B$ はローレンツ群です。「ローレンツ変換と $SL(2,C)$」(相対論的量子力学の「ディラック方程式の共変性」も参照) で見たように、ローレンツ変換の生成子は

$$(\gamma_{\mu\nu})_A{}^B=\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\mu\gamma_\nu)_A{}^B$$

で与えられます (随伴表現)。なので、$(b_{\alpha\beta})_A{}^B$ を $(\gamma_{\alpha\beta})_A{}^B$ に置き換えて

$$[Q^i_A,J_{\alpha\beta}]=\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta})_A{}^BQ^i_B \tag{3}$$

と出来ます。この結果は一般的な偶の生成子に言えます。なぜなら、この形を求めるのにヤコビの恒等式しか使っていないので、偶の生成子を B として

$$[Q^i_A,B_1]=(b_1)_A{}^BQ^i_B$$

さらに一般化すれば

$$[Q^i_A,B_1]=(b_1)_{Aj}^{Bi}Q^j_B$$

とも書けます。後はこれをヤコビの恒等式に入れて同じことをしていくだけなので

$$[b_1,b_2]_{Aj}^{Bi}Q^j=[Q^i_A,[B_1,B_2]]$$

となります。このため、奇の生成子である Q と偶の生成子による交換関係は、偶の生成子の交換関係 (随伴表現) によって書けることが分かります。

- Q^j_A と T_a

  このことを使うと、内部対称性の生成子 T_a との交換関係は、その随伴表現を $(c_a)_{ij}$ とすることで

$$[Q^i_A,T_a]=(c_a)^{ij}Q^j_A$$

となります。もしくは、ローレンツスカラーであればいいので、これに擬スカラーである γ_5 による項を加えて (T_a が対応する随伴表現 $(c'_a)^{ij}$ を持っているなら)

$$[Q^i_A,T_a]=(c_a)^{ij}Q^j_A+\gamma_5(c'_a)^{ij}Q^j_A$$

とも出来ます。

- Q^i_A と P_α

　Q^i_A と P_α の交換関係は

$$[Q^i_A, P_\alpha] = c_\alpha Q^i_A$$

とも考えられますが、スピノールの添え字を持ったガンマ行列をローレンツ不変性を保ったまま分離させられるはずなので、ガンマ行列によって

$$[Q^i_A, P_\alpha] = c(\gamma_\alpha)_A{}^B Q^i_B + d(\gamma_\alpha\gamma_5)_A{}^B Q^i_B$$

これをヤコビの恒等式 (2c) に入れると

$$\begin{aligned}
[P_\alpha,&[P_\beta, Q^i_A]] + [P_\beta, [Q^i_A, P_\alpha]] + [Q^i_A, [P_\alpha, P_\beta]] \\
&= [P_\alpha, [P_\beta, Q^i_A]] + [P_\beta, [Q^i_A, P_\alpha]] \\
&= \ -[P_\alpha, c(\gamma_\beta)_A{}^B Q^i_B] + [P_\beta, c(\gamma_\alpha)_A{}^B Q^i_B] \\
&= \ -c(\gamma_\beta)_A{}^B [P_\alpha, Q^i_B] + c(\gamma_\alpha)_A{}^B [P_\beta, Q^i_B] \\
&= c^2(\gamma_\beta)_A{}^B(\gamma_\alpha)_B{}^C Q^i_C - c^2(\gamma_\alpha)_A{}^B(\gamma_\beta)_B{}^C Q^i_C \\
&= c^2[(\gamma_\beta)_A{}^B, (\gamma_\alpha)_B{}^C] Q^i_C
\end{aligned}$$

ガンマ行列の交換関係は 0 ではないので、ヤコビの恒等式を満たすために $c = 0$ となります (d も同様)。よって

$$[Q^i_A, P_\alpha] = 0$$

となります。

- Q^i_A と Q^j_B

　Q^i_A と Q^j_B では反交換関係なので、i, j と A, B の同時の入れ替えに対して対称になっている必要があります ($Q^i_A Q^j_B + Q^j_B Q^i_A$ だから)。そして、偶の生成子になっていなければいけないので、$P_\alpha, J_{\alpha\beta}$ によって

$$\{Q^i_A, Q^j_B\} = \delta^{ij}(v^\alpha)_{AB} P_\alpha + \delta^{ij}(w^{\alpha\beta})_{AB} J_{\alpha\beta}$$

という形になります。v^α と $w^{\alpha\beta}$ は A, B の入れ替えに対して対称になるガンマ行列の組み合わせなので荷電共役の行列 C によって

$$(\gamma^\alpha C)_{AB} \ , \ (\gamma^{\alpha\beta} C)_{AB}$$

とすればいいです。これによって、A, B の入れ替えに対して対称になります。確かめたければ、例えばディラック表現での $C = i\gamma^2\gamma^0$ としてみればいいです。これらを入れて

$$\{Q^i_A, Q^j_B\} = \delta^{ij}(\gamma^\alpha C)_{AB} P_\alpha + \delta^{ij}(\gamma^{\alpha\beta} C)_{AB} J_{\alpha\beta}$$

とします。

後はこれに内部対称性の偶の生成子がつくことも考えられて、それを U^{ij} として Q の区別の添え字に対応させれば、C_{AB} は AB の入れ替えで反対称なので $U^{ij}=-U^{ji}$ として

$$\{Q^i_A, Q^j_B\}=\delta^{ij}(\gamma^\alpha C)_{AB}P_\alpha+\delta^{ij}(\gamma^{\alpha\beta}C)_{AB}J_{\alpha\beta}+C_{AB}U^{ij}$$

U^{ij} には時空の添え字がないので、γ^α のようなものがつかずに C_{AB} のみになります。また、時空の添え字を持たずに A, B が反対称な組み合わせとして $\gamma_5 C$ も考えられるので、もう一つ内部対称性の生成子 $V^{ij}=-V^{ji}$ を加えて

$$\{Q^i_A, Q^j_B\}=a\delta^{ij}(\gamma^\alpha C)_{AB}P_\alpha+b\delta^{ij}(\gamma^{\alpha\beta}C)_{AB}J_{\alpha\beta}+C_{AB}U^{ij}+(\gamma_5 C)_{AB}V^{ij}$$

これが一般的な形になります。しかし、ヤコビの恒等式 (2d) を持ち出して、$J_{\alpha\beta}$ の項を見てみると (右辺は足し算なので各項を取り出せる。$[A+B,C]=[A,C]+[B,C]$)、(3) を使って

$$\begin{aligned}
0 &= [\{Q^i_A, Q^j_B\}, J_{\alpha\beta}]+\{[J_{\alpha\beta}, Q^i_A], Q^j_B\}+\{[J_{\alpha\beta}, Q^j_B], Q^i_A\}\\
-[\{Q^i_A, Q^j_B\}, J_{\alpha\beta}] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta})_A^{\ C}\{Q^i_C, Q^j_B\}-\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta})_B^{\ C}\{Q^j_C, Q^i_A\}\\
b(\gamma^{\mu\nu}C)_{AB}[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta})_A^{\ C}\{Q^i_C, Q^j_B\}-\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta})_B^{\ C}\{Q^j_C, Q^i_A\}\\
&= -\frac{1}{2}b(\gamma_{\alpha\beta})_A^{\ C}(\gamma^{\mu\nu})_{CB}J_{\mu\nu}-\frac{1}{2}b(\gamma_{\alpha\beta})_B^{\ C}(\gamma^{\mu\nu})_{CA}J_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

これは成立しないので、$b=0$ です。よって

$$\{Q^i_A, Q^j_B\}=2\delta^{ij}(\gamma^\alpha C)_{AB}P_\alpha+C_{AB}U^{ij}+(\gamma_5 C)_{AB}V^{ij}$$

a を 2 に規格化しています。

ここまで 4 成分のスピノールでしたが、ローレンツ群でのスピノールは $SL(2,C)$ に対応させることができるので、Q^i_A をマヨラナスピノールとすることができます (一般性はなくならない)。その場合を見ていきます。Q^i_A をマヨラナスピノールとして 2 成分ごとに分けて、それぞれを $Q_{Ai}, \overline{Q}^i{}_{\dot{A}}$ とします ($\overline{\psi}=\psi^\dagger\gamma_0$ でない)。2 成分でも Q のままにして、スピノールの添え字も大文字のローマ文字のままにしますが、大文字のローマ文字の添え字は $1,2$ だとします (ドット付きも)。これらは Q のエルミート共役を $\overline{Q}$ とし、マヨラナ条件から (「ローレンツ群と $SL(2,C)$」の最後の方を参照)

$$(Q_{Ai})^\dagger=\overline{Q}^i{}_{\dot{A}}$$

と定義します。複素共役で i の添え字が動き、A から $\dot{A}$ になり、転置は A, i に関して行っています。他の関係は下の補足 1 にまとめてあります。

- Q_{Ai} と $\overline{Q}^j{}_{\dot{B}}$

  Q_{Ai} と $(Q_{Bj})^\dagger=\overline{Q}^j{}_{\dot{B}}$ の反交換関係は $Q_{Ai}\overline{Q}^j{}_{\dot{B}}$ によって作られます。この積は $SL(2,C)$ の表現 $(1/2,0)$ と $(0,1/2)$ の積なので、$(1/2,1/2)$ の表現だと見なせます (「$SL(2,C)$ の左手系、右手系」参照)。そして、$(1/2,1/2)$ はローレンツ群の表現でもあります。そうすると、ローレンツ変換に対して 4 元ベクトルとして変換を受けることになります。よって、反交換関係は 4 元ベクトルの生成子である P_α と、時空の添え字を潰すために 2×2 行列であるパウリ行列 σ^α によって

$$\{Q_{Ai},\overline{Q}^j{}_{\dot{B}}\}=2c_i{}^j(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}}P_\alpha$$

2 は規格化のために入れています。パウリ行列の定義も補足 1 を見てください。これのエルミート共役を取ってみると、左辺は

$$(Q_{Ai}\overline{Q}^j{}_{\dot{B}}+\overline{Q}^j{}_{\dot{B}}Q_{Ai})^\dagger=Q_{Bj}\overline{Q}^i{}_{\dot{A}}+\overline{Q}^i{}_{\dot{A}}Q_{Bj}=\{Q_{Bj},\overline{Q}^i{}_{\dot{A}}\}$$

右辺は、P_α はエルミートなので

$$(2c^j{}_i(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}}P_\alpha)^\dagger=2(c_i{}^j)^*((\sigma^\alpha)_{A\dot{B}})^\dagger P_\alpha^\dagger=2(c_i{}^j)^*(\sigma^\alpha)_{B\dot{A}}P_\alpha$$

よって、エルミート共役を取ったとき

$$\{Q_{Bj},\overline{Q}^i{}_{\dot{A}}\}=2(c_i{}^j)^*(\sigma^\alpha)_{B\dot{A}}P_\alpha$$

元の反交換関係の添え字をこれにあわせると

$$\{Q_{Bj},\overline{Q}^i_{\dot{A}}\}=2c_j{}^i(\sigma^\alpha)_{B\dot{A}}P_\alpha$$

2 つを比較することで

$$c_j{}^i=(c_i{}^j)^*$$

添え字の書き方の慣習のため上下に分かれていますが、これは転置です。なので $c_j{}^i=(c_j{}^i)^\dagger$ となって、エルミート行列です。ここで Q_{Ai} をユニタリー行列 U によって

$$\begin{aligned}&Q'_{Ai}=U_i{}^jQ_{Aj}\\&\overline{Q}'^i{}_{\dot{A}}=(Q'_{Ai})^*=(U_i{}^j)^*\overline{Q}^j{}_{\dot{A}}=(U_j{}^i)^{-1}\overline{Q}^j{}_{\dot{A}}\qquad((U_j{}^i)^{-1}=(U_j{}^i)^\dagger=(U_i{}^j)^*)\end{aligned}$$

と変換します。反交換関係もこれに置き換えると

$$\{Q'_{Ak},\overline{Q}'^l{}_{\dot{B}}\}=2U_k{}^i(U_j{}^l)^{-1}c_i{}^j(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}}P_\alpha=2c'_k{}^l(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}}P_\alpha$$

となって

$$c'_k{}^l=U_k{}^ic_i{}^j(U_j{}^l)^{-1}$$

$c_i{}^j$ はエルミート行列なので、このユニタリー変換によって対角化されます。その対角成分を c_i とします。

今度はパウリ行列 σ^a のトレースが 0 であることから

$$\{Q_{Ai}, \overline{Q}^j_{\dot{A}}\} = \{Q_{Ai}, (Q_{Ai})^\dagger\} = 2c_i{}^j(\sigma^\alpha)_{A\dot{A}}P_\alpha = 2c_i{}^jP_\alpha\mathrm{tr}(\sigma^\alpha) = 2c_i{}^jP_0\mathrm{tr}(\sigma^0) = 4c_i{}^jP_0$$

そして、Q_{Ai} を演算子として $(Q_{Ai})^\dagger$ との真空期待値を取ってみると

$$\begin{aligned}\langle 0|\{Q_{Ai}, (Q_{Ai})^\dagger\}|0\rangle &= \langle 0|Q_{Ai}(Q_{Ai})^\dagger|0\rangle + \langle 0|(Q_{Ai})^\dagger Q_{Ai}|0\rangle \\ &= |(Q_{Ai})^\dagger|0\rangle|^2 + |Q_{Ai}|0\rangle|^2\end{aligned}$$

のようになっていて、これはノルムの 2 乗同士の足し算なので、ノルムの定義から

$$\langle 0|\{Q_{Ai}, (Q_{Ai})^\dagger\}|0\rangle \geq 0$$

0 は $Q_{Ai} = 0$ のときです。そうすると

$$\{Q_{Ai}, \overline{Q}^j_{\dot{A}}\} = 4c_i{}^jP_0$$

において、P_0 はエネルギー演算子に相当することから $P_0 > 0$ で $c_i{}^j > 0$ です。このため対角化された $c'_i{}^j$ の固有値は正とできるので

$$Q_{Aj} \;\Rightarrow\; \sqrt{c_i}Q_{Aj}$$

と変換すれば、$c'_i{}^j = 1$ と出来ます。つまり、Q_{Aj} と $\overline{Q}^j_{\dot{A}}$ の反交換関係は

$$\{Q_{Ai}, \overline{Q}^j_{\dot{B}}\} = 2\delta^j_i(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}}P_\alpha$$

となります。もっと単純に考えれば反交換関係なので、i, j の入れ替えで対称にならなければいけないので、クロネッカーデルタを使うと言えます。

- Q_{Ai} と P_α

  P_α との交換関係も $SL(2,C)$ の構造から作ります。Q_{Ai} とでは、$(1/2, 0)$ と $(1/2, 1/2)$ なので、直和に分解すると

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes (\frac{1}{2}, 0) = (0, \frac{1}{2}) \oplus (1, \frac{1}{2})$$

$(1, 1/2)$ はローレンツ変換にいないので、除外されます。なので、残っているのは $(0, 1/2)$ の $\overline{Q}^{\dot{B}j}$ だけなので、

$$[Q_{Ai}, P_\alpha] = e_{ij}(\sigma_\alpha)_{A\dot{B}}\overline{Q}^{\dot{B}j}$$

とします。これのエルミート共役は

$$[\overline{Q}^i_{\dot{A}}, P_\alpha] = (e_{ij})^\dagger(\sigma_\alpha)_{B\dot{A}}Q^B_j$$

添え字の位置を変えて

$$[\overline{Q}^{\dot{A}i}, P_\alpha] = (e_{ij})^\dagger (\sigma_\alpha)^{B\dot{A}} Q_{Bj} = (e_{ij})^\dagger (\overline{\sigma}_\alpha)^{\dot{A}B} Q_{Bj}$$

ヤコビの恒等式 (2c) に入れると

$$\begin{aligned}
[P_\alpha, &[P_\beta, Q_{Ai}]] + [P_\beta, [Q_{Ai}, P_\alpha]] + [Q_{Ai}, [P_\alpha, P_\beta]] \\
&= [P_\alpha, [P_\beta, Q_{Ai}]] + [P_\beta, [Q_{Ai}, P_\alpha]] \\
&= -e_{ij}(\sigma_\beta)_{A\dot{B}} [P_\alpha, \overline{Q}^{\dot{B}j}] + e_{ij}(\sigma_\alpha)_{A\dot{B}} [P_\beta, \overline{Q}^{\dot{B}j}] \\
&= e_{ij}(\sigma_\beta)_{A\dot{B}} (e_{jk})^\dagger (\sigma_\alpha)^{C\dot{B}} Q_{Ck} - e_{ij}(\sigma_\alpha)_{A\dot{B}} (e_{jk})^\dagger (\sigma_\beta)^{C\dot{B}} Q_{Ck} \\
&= e_{ij}(e_{jk})^\dagger ((\sigma_\beta)_{A\dot{B}} (\sigma_\alpha)^{C\dot{B}} - (\sigma_\alpha)_{A\dot{B}} (\sigma_\beta)^{C\dot{B}}) Q_{Ck}
\end{aligned}$$

パウリ行列の部分は 0 にならないので、$e_{ij}(e_{jk})^\dagger = 0$ となって

$$e_{ij} = 0$$

よって P_α との交換関係は

$$[Q_{Ai}, P_\alpha] = 0\ ,\ [\overline{Q}^i_{\dot{A}}, P_\alpha] = 0$$

となります。

- Q_{Ai} と Q_{Bj}

  Q 同士を見てみます。Q 同士の反交換関係と P_α との交換関係を見てみると、ヤコビの恒等式 (2d) から

$$\begin{aligned}
[\{Q_{Ai}, Q_{Bj}\}, P_\alpha] &= Q_{Ai}Q_{Bj}P_\alpha + Q_{Bj}Q_{Ai}P_\alpha - P_\alpha Q_{Ai}Q_{Bj} - P_\alpha Q_{Bj}Q_{Ai} \\
[\{Q_{Ai}, Q_{Bj}\}, P_\alpha] &= -\{[P_\alpha, Q_{Ai}], Q_{Bj}\} - \{[P_\alpha, Q_{Bj}], Q_{Ai}\} \\
&= \{[Q_{Ai}, P_\alpha], Q_{Bj}\} + \{[Q_{Bj}, P_\alpha], Q_{Ai}\}
\end{aligned}$$

Q_{Ai} と P_α の交換関係は 0 であることが分かっているので

$$[\{Q_{Ai}, Q_{Bj}\}, P_\alpha] = 0$$

となって、反交換関係は P_α と交換することが分かります。そうすると、P_α なら P_α と交換するので使えるように思えますが、また $SL(2, C)$ の表現を見てみると、Q_{Ai} 同士なので、直和にすると

$$(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0)$$

このため、$(1/2,1/2)$ である P_α は使えないことが分かります。そして、$J_{\alpha\beta}$ は P_α と交換しないので、$J_{\alpha\beta}$ も使えません ($J_{\alpha\beta}$ は $(1,0)$)。

　よって、残っている内部対称性の生成子しか使えなくなり、時空の添え字を持たない ϵ_{AB} ($\epsilon_{12}=-\epsilon_{21}$) を使って

$$\{Q_{Ai},Q_{Bj}\}=\epsilon_{AB}T_{ij}$$

のようになります。A,B と i,j の同時の入れ替えで対称にならなくてはいけないので、$T_{ij}=-T_{ji}$ です。

- Q_{Ai} と $J_{\alpha\beta}$

  　$J_{\alpha\beta}$ とは、4 成分スピノールが 2 成分スピノールに変わるだけなので、$SL(2,C)$ でのローレンツ変換の生成子である (「ローレンツ群と $SL(2,C)$」での $\Sigma_{\mu\nu}$)

$$(\sigma^{\alpha\beta})_A^{\ \ B}=\frac{i}{2}((\sigma^\alpha)_{A\dot{C}}(\overline{\sigma}^\beta)^{\dot{C}B}-(\sigma^\beta)_{A\dot{C}}(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{C}B})$$

$$(\overline{\sigma}^{\alpha\beta})^{\dot{A}}_{\ \ \dot{B}}=\frac{i}{2}((\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}C}(\sigma^\beta)_{C\dot{B}}-(\overline{\sigma}^\beta)^{\dot{A}C}(\sigma^\alpha)_{C\dot{B}})$$

  によって

$$[Q_{Ai},J_{\alpha\beta}]=(\sigma_{\mu\nu})_A^{\ \ B}Q_{Bi}$$

  エルミート共役は

$$((\sigma_{\alpha\beta})_A^{\ \ B}Q_{Bi})^\dagger=(Q_{Bi})^\dagger((\sigma_{\alpha\beta})_A^{\ \ B})^\dagger=\overline{Q}^i_{\ \dot{B}}(\overline{\sigma}_{\alpha\beta})^{\dot{B}}_{\ \ \dot{A}}$$

  なので

$$[\overline{Q}^i_{\ \dot{A}},J_{\alpha\beta}]=\overline{Q}^i_{\ \dot{B}}(\overline{\sigma}_{\alpha\beta})^{\dot{B}}_{\ \ \dot{A}}$$

  となります ($\overline{Q}^i_{\dot{A}}$ の生成子は $\overline{\sigma}_{\alpha\beta}$)。

- Q^i_A と T_a

  　偶の生成子 T_a とは単純に

$$[Q^i_A,T_a]=d^i_{\ j}Q^j_A$$

  となります。

まとめると

- 4 成分スピノール ($A=1,2,3,4$)

$$[Q^i_A,J_{\alpha\beta}]=\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta})_A^{\ \ B}Q^i_B\qquad((\gamma_{\mu\nu})_A^{\ \ B}=\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\mu\gamma_\nu)_A^{\ \ B})$$

$$[Q^i_A,P_\alpha]=0$$

$$\{Q^i_A, Q^j_B\} = 2\delta^{ij}(\gamma^\alpha C)_{AB}P_\alpha + C_{AB}U^{ij} + (\gamma_5 C)_{AB}V^{ij}$$

$$[Q^i_A, T_a] = (c_a)^{ij}Q^j_A + \gamma_5(c'_a)^{ij}Q^j_A$$

- 2 成分マヨラナスピノール ($A = 1, 2$)

$$\{Q_{Ai}, \overline{Q}^j_{\dot{B}}\} = 2\delta^j_i(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}}P_\alpha$$

$$[Q_{Ai}, P_\alpha] = 0\ ,\ [\overline{Q}^i_{\dot{A}}, P_\alpha] = 0$$

$$\{Q_{Ai}, Q_{Bj}\} = \epsilon_{AB}T_{ij}$$

$$[Q_{Ai}, J_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_A^{\ B}Q_{Bi} \quad ((\sigma^{\alpha\beta})_A^{\ B} = \frac{i}{2}((\sigma^\alpha)_{A\dot{C}}(\overline{\sigma}^\beta)^{\dot{C}B} - (\sigma^\beta)_{A\dot{C}}(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{C}B}))$$

$$[\overline{Q}^i{}_{\dot{A}}, J_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}\overline{Q}^i{}_{\dot{B}}(\overline{\sigma}_{\alpha\beta})^{\dot{B}}_{\ \dot{A}} \quad ((\overline{\sigma}^{\alpha\beta})^{\dot{A}}_{\ \dot{B}} = \frac{i}{2}((\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}C}(\sigma^\beta)_{C\dot{B}} - (\overline{\sigma}^\beta)^{\dot{A}C}(\sigma^\alpha)_{C\dot{B}}))$$

$$[Q^i_A, T_a] = d^i{}_jQ^j_A$$

ポアンカレ代数 (1a)〜(1e) にこれらを加えたものを超ポアンカレ代数 (super Poincaré algebra)、もしくは、超対称性の生成子が作る代数ということから超対称性代数と言います。

最後に、「Wess-Zumino モデル」での結果を持ち出して見ます。「Wess-Zumino モデル」ではスカラー場 A の変換に対して

$$[\delta_1, \delta_2]A = 2i\overline{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\partial_\mu A$$

というのを導きました (ϵ は定数の 4 成分マヨラナスピノール)。これは、変換を起こす生成子を Q として $\delta A = \overline{\epsilon}QA$ とすれば

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]A = \delta_1\delta_2 A &= \delta_1\overline{\epsilon}_2QA - \delta_2\overline{\epsilon}_1QA \\
&= \delta_1A\overline{\epsilon}_2Q - \delta_2A\overline{\epsilon}_1Q \\
&= \overline{\epsilon}_1Q\overline{\epsilon}_2QA - \overline{\epsilon}_2Q\overline{\epsilon}_1QA \\
&= (\overline{\epsilon}_1)_B(Q)_B(\overline{\epsilon}_2)_C(Q)_CA - (\overline{\epsilon}_2)_C(Q)_C(\overline{\epsilon}_1)_B(Q)_BA \\
&= -(\overline{\epsilon}_1)_B(\overline{\epsilon}_2)_C(Q)_B(Q)_CA - (\overline{\epsilon}_1)_B(\overline{\epsilon}_2)_C(Q)_C(Q)_BA \\
&= -(\overline{\epsilon}_1)_B(\overline{\epsilon}_2)_C\{(Q)_B, (Q)_C\}
\end{aligned}$$

一方で、4 成分スピノール Q_A の反交換関係から

$$
\begin{aligned}
[\delta_1,\delta_2]A &= 2i\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\partial_\mu A \\
&= -2i\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu C(\epsilon_1^\dagger\gamma_0)^T\partial_\mu A \\
&= -2i(\bar{\epsilon}_2)_A(\gamma^\mu C)_{BC}(\bar{\epsilon}_1)_C\partial_\mu A \\
&= 2(\bar{\epsilon}_2)_A(\gamma^\mu C)_{BC}(\bar{\epsilon}_1)_C P_\mu \\
&= 2(\bar{\epsilon}_2)_B\frac{1}{2}\{Q_B,Q_C\}(\bar{\epsilon}_1)_C A \\
&= -(\bar{\epsilon}_1)_C(\bar{\epsilon}_2)_B\{Q_B,Q_C\}
\end{aligned}
$$

よって、超対称性変換 δ は超ポアンカレ代数と同じ反交換関係を持っています。つまり、超ポアンカレ代数は「Wess-Zumino モデル」での変換になります。

・補足

マヨラナスピノールの表記を定義します。どうしてこのように定義するかは「ローレンツ群と $SL(2,C)$」の最後の方を見てください。超対称性関連では、この定義を使っている場合が多いと思います (Wess, Bagger の「Supersymmetry and Supergravity」がそうだから)。ミンコフスキー計量を $(+,-,-,-)$ にするか $(-,+,+,+)$ にするかでも一部変更されます。ここでは $(+,-,-,-)$ です。

2 成分スピノールとして、左手系を χ、右手系を $\overline{\chi}$ とし、χ の成分は χ_A、$\overline{\chi}$ の成分は $\overline{\chi}^{\dot{A}}$ と書きます (大文字のローマ文字は $1,2$)。マヨラナ条件を入れているので、4 成分スピノールは χ_A と $\overline{\chi}^{\dot{A}}$ で構成されます。ドットつきの添え字との対応 (左手系、右手系の対応) は、エルミート共役によって

$$(\chi_A)^\dagger = \overline{\chi}_{\dot{A}}\ ,\ (\chi^A)^\dagger = \overline{\chi}^{\dot{A}}$$

エルミート共役にしていますが複素共役と同じ意味です。

χ と $\overline{\chi}$ の添え字の上げ下げは

$$\chi^A = \epsilon^{AB}\chi_B\ ,\ \chi_A = \epsilon_{AB}\chi^B$$

$$\overline{\chi}^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\overline{\chi}_{\dot{B}}\ ,\ \overline{\chi}_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\overline{\chi}^{\dot{B}}$$

$$\epsilon_{AB} = -\epsilon^{AB} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = -\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\ ,\ \epsilon_{12} = -\epsilon^{12} = \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -\epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -1$$

$$(\epsilon_{AB})^* = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\ ,\ (\epsilon^{AB})^* = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}$$

また、2 成分持ちの α_{AB} は

$$\alpha^{CD} = \epsilon^{CA}\epsilon^{DB}\alpha_{AB}\ ,\ \alpha_{CD} = \epsilon_{CA}\epsilon_{DB}\alpha^{AB}$$

だたし、ϵ_{AB} に対しては

$$\epsilon^{CD} = -\epsilon^{CA}\epsilon^{DB}\epsilon_{AB}\ ,\ \epsilon_{CD} = -\epsilon_{CA}\epsilon_{DB}\epsilon^{AB}$$

$$(\epsilon^{12} = -\epsilon^{1A}\epsilon^{2B}\epsilon_{AB} = -\epsilon^{12}\epsilon^{21}\epsilon_{21} = \epsilon_{21} = -\epsilon_{12})$$

というようにマイナスがつきます。これは ϵ_{AB} の定義によるものです。

内積は

$$\chi\xi = \chi^A\xi_A = \epsilon^{AB}\chi_B\xi_A = -\epsilon^{AB}\chi_A\xi_B = -\chi_A\epsilon^{AB}\xi_B = -\chi_A\xi^A = \xi^A\chi_A = \xi\chi$$

$$\overline{\chi}\overline{\xi} = \overline{\chi}_{\dot{A}}\overline{\xi}^{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\overline{\chi}^{\dot{B}}\overline{\xi}^{\dot{A}} = -\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\overline{\chi}^{\dot{A}}\overline{\xi}^{\dot{B}} = -\overline{\chi}^{\dot{A}}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\overline{\xi}^{\dot{B}} = -\overline{\chi}^{\dot{A}}\overline{\xi}_{\dot{A}} = \overline{\xi}_{\dot{A}}\overline{\chi}^{\dot{A}} = \overline{\xi}\overline{\chi}$$

添え字の位置が逆になっていることに注意してください。ϵ^{AB} の積は

$$\epsilon^{AB}\epsilon_{CB} = \epsilon^{A1}\epsilon_{C1} + \epsilon^{A2}\epsilon_{C2} = -\delta^A_C$$

$$\epsilon^{AB}\epsilon_{BC} = \epsilon^{A1}\epsilon_{1C} + \epsilon^{A2}\epsilon_{2C} = \delta^A_C$$

$$\epsilon_{\dot{B}\dot{C}}\epsilon^{\dot{B}\dot{A}} = \epsilon_{\dot{1}\dot{C}}\epsilon^{\dot{1}\dot{A}} + \epsilon_{\dot{2}\dot{C}}\epsilon^{\dot{2}\dot{A}} = -\delta^{\dot{A}}_{\dot{C}}$$

$$\epsilon_{\dot{C}\dot{B}}\epsilon^{\dot{B}\dot{A}} = \epsilon_{\dot{C}\dot{1}}\epsilon^{\dot{1}\dot{A}} + \epsilon_{\dot{C}\dot{2}}\epsilon^{\dot{2}\dot{A}} = \delta^{\dot{A}}_{\dot{C}}$$

4 次元のパウリ行列の成分を (σ^0 は単位行列)

$$(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}} = (\sigma^0, \sigma^i)_{A\dot{B}}$$

と定義して、$(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}B}$ を

$$(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}B} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{BA}(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}} = (\sigma^0, -\sigma^i)^{\dot{A}B}$$

$$(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{BA}(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}B}$$

とします ($\sigma^0 = \overline{\sigma}^0,\ \sigma^i = -\overline{\sigma}^i$)。添え字の上げ下げの規則に対して

$$(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}B} = (\sigma^\alpha)^{B\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{BA}(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}}$$

$$(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}} = (\overline{\sigma}^\alpha)_{\dot{B}A} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{BA}(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}B}$$

$$\epsilon^{AB}(\sigma^\alpha)_{B\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{B}A}\ ,\ \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}(\sigma^\alpha)_{A\dot{B}} = \epsilon_{AB}(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}B}$$

内積のエルミート共役は

$$(\chi\xi)^\dagger = (\chi^A\xi_A)^\dagger = (\xi_A)^\dagger(\chi^A)^\dagger = \overline{\xi}_{\dot{A}}\overline{\chi}^{\dot{A}} = \overline{\xi}\overline{\chi}$$

$$(\chi\sigma^\mu\overline{\xi})^\dagger = \overline{\xi}^\dagger(\sigma^\mu)^\dagger\chi^\dagger = \xi\sigma^\mu\overline{\chi}$$

$$(\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\xi)^\dagger = \overline{\xi}\sigma^\mu\chi$$

$\sigma^\mu, \overline{\sigma}^\mu$ はエルミートです。パウリ行列とのを成分で書くと

$$(\chi\sigma^\mu\overline{\xi})^\dagger = (\chi^A(\sigma^\mu)_{A\dot{B}}\overline{\xi}^{\dot{B}})^\dagger = (\overline{\xi}^{\dot{B}})^\dagger((\sigma^\mu)_{A\dot{B}})^\dagger(\chi^A)^\dagger = \xi^B(\sigma^\mu)_{B\dot{A}}\overline{\chi}^{\dot{A}} = \xi\sigma^\mu\overline{\chi}$$

$$(\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\xi)^\dagger = (\overline{\chi}_{\dot{A}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{A}B}\xi_B)^\dagger = \overline{\xi}_{\dot{B}}((\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{A}B})^\dagger\chi_A = \overline{\xi}_{\dot{B}}(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{B}A}\chi_A = \overline{\xi}\sigma^\mu\chi$$

これから

$$((\sigma^\mu)_{A\dot{B}})^\dagger = (\sigma^\mu)_{B\dot{A}}\ ,\ ((\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{A}B})^\dagger = (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{B}A}$$

となります。また、$(\sigma^\alpha)^* = \overline{\sigma}^\alpha$ であることからパウリ行列の複素共役を

$$((\sigma^\alpha)_{A\dot{B}})^* = (\overline{\sigma}^\alpha)_{\dot{A}B}$$

とすることができます。そして、転置を

$$((\sigma^\alpha)^T)_{A\dot{B}} = (\sigma^\alpha)_{B\dot{A}}$$

と書くことにすれば

$$((\sigma^\alpha)^\dagger)_{A\dot{B}} = ((\sigma^\alpha)_{B\dot{A}})^* = (\overline{\sigma}^\alpha)_{\dot{B}A} = (\sigma^\alpha)_{A\dot{B}}$$

となって、パウリ行列のエルミート性を再現します。
　パウリ行列から

$$(\sigma^{\alpha\beta})_A^{\ B} = \frac{i}{2}\big((\sigma^\alpha)_{A\dot{C}}(\overline{\sigma}^\beta)^{\dot{C}B} - (\sigma^\beta)_{A\dot{C}}(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{C}B}\big)$$

$$(\overline{\sigma}^{\alpha\beta})^{\dot{A}}_{\ \dot{B}} = \frac{i}{2}\big((\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{A}C}(\sigma^\beta)_{C\dot{B}} - (\overline{\sigma}^\beta)^{\dot{A}C}(\sigma^\alpha)_{C\dot{B}}\big)$$

と作ります。$\sigma^{\alpha\beta}$ のエルミート共役はパウリ行列がエルミートなので

$$(\sigma^{\alpha\beta})^\dagger = -\frac{i}{2}(\overline{\sigma}^\beta\sigma^\alpha - \overline{\sigma}^\alpha\sigma^\beta) = \overline{\sigma}^{\alpha\beta}$$

成分を書いてエルミート共役を取ると

$$\begin{aligned}((\sigma^{\alpha\beta})_A^{\ B})^\dagger &= -\frac{i}{2}\big(((\sigma^\alpha)_{A\dot{C}}(\overline{\sigma}^\beta)^{\dot{C}B})^\dagger - \big((\sigma^\beta)_{A\dot{C}}(\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{C}B})^\dagger\big)\\ &= -\frac{i}{2}\big((\overline{\sigma}^\beta)^{\dot{B}C}(\sigma^\alpha)_{C\dot{A}} - (\overline{\sigma}^\alpha)^{\dot{B}C}(\sigma^\beta)_{C\dot{A}}\big)\\ &= (\overline{\sigma}^{\alpha\beta})^{\dot{B}}_{\ \dot{A}}\end{aligned}$$

となります。ここで必要なのはこの程度ですが、他にもいろいろと関係があります。大体の関係は「Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry」(arXiv:0812.1594) に書いてあります。

・補足 2

　スピノール表記の別の例を示しておきます。スピノールの添え字の上げ下げを

$$\chi^A = \epsilon^{AB}\chi_B \ , \ \chi_A = \chi^B\epsilon_{BA}$$

$$\overline{\chi}^{\dot{A}} = \overline{\chi}_{\dot{B}}\epsilon^{\dot{B}\dot{A}} \ , \ \overline{\chi}_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\overline{\chi}^{\dot{B}}$$

$$\epsilon_{AB} = \epsilon^{AB} = -\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = -\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \ , \ \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = -\epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -\epsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1$$

と定義することもできます。ようは、$\chi^1 = \chi_2$, $\chi^2 = -\chi_1$ を満たせばいいので

$$\chi^A = \epsilon^{AB}\chi_B \ , \ \chi_A = \chi^B\epsilon_{BA} \quad (\epsilon_{AB} = \epsilon^{AB} \ , \ \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1)$$

$$\chi^A = \epsilon^{AB}\chi_B \ , \ \chi_A = \epsilon_{AB}\chi^B \quad (\epsilon_{AB} = -\epsilon^{AB} \ , \ \epsilon_{12} = -\epsilon^{12} = -1)$$

のどちらも選べるということです。内積の計量の選び方が違うというだけなので、それぞれの上げ下げの規則に従えば同じ結果になります。

この表記の利点は ϵ^{AB} にあります。積は

$$\epsilon^{AB}\epsilon_{CB} = \epsilon^{A1}\epsilon_{C1} + \epsilon^{A2}\epsilon_{C2} = \delta^A_C$$

$$\epsilon^{AB}\epsilon_{BC} = \epsilon^{A1}\epsilon_{1C} + \epsilon^{A2}\epsilon_{2C} = -\delta^A_C$$

$$\epsilon_{\dot{B}\dot{C}}\epsilon^{\dot{B}\dot{A}} = \epsilon_{\dot{1}\dot{C}}\epsilon^{\dot{1}\dot{A}} + \epsilon_{\dot{2}\dot{C}}\epsilon^{\dot{2}\dot{A}} = \delta^A_C$$

$$\epsilon_{\dot{C}\dot{B}}\epsilon^{\dot{B}\dot{A}} = \epsilon_{\dot{C}\dot{1}}\epsilon^{\dot{1}\dot{A}} + \epsilon_{\dot{C}\dot{2}}\epsilon^{\dot{2}\dot{A}} = -\delta^A_C$$

となっていて

$$\epsilon_B^{\ A} = -\epsilon^A_{\ B} = \delta^A_B \ , \ \epsilon^{\dot{A}}_{\ \dot{B}} = -\epsilon_{\dot{B}}^{\ \dot{A}} = \delta^A_B$$

そして、下付きの添え字を上にする規則に従うと

$$\epsilon^{AB} = \epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\epsilon_{CD} \ , \ \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\epsilon^{\dot{C}\dot{A}}\epsilon^{\dot{D}\dot{B}}$$

となっています。このように ϵ^{AB} の添え字の上げ下げのときにマイナスがつきません。