Slavnov-Taylor 恒等式

BRS 不変性による Slavnov-Taylor 恒等式を導出します。可換ゲージ場 (QED) でのワード・高橋恒等式と同じように、Slavnov-Taylor 恒等式は非可換ゲージ場 (QCD) のくり込み可能性の証明に使われます。また、ここでの話はくり込まれた量を使っても同じことになります。
ラグランジアンは非可換ゲージ場のもので

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{eff} + A^a_\mu J^{a\mu} + \overline{\psi}\eta + \overline{\eta}\psi$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 - \overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a + \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \\ &= \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{matter}\end{aligned}$$

$$(D_\mu\eta)^a = \partial_\mu\eta^a + gf^{abc}A^b_\mu\eta^c\ ,\ D_\mu\psi = (\partial_\mu - igA^a_\mu\frac{\sigma^a}{2})\psi$$

物質場なしで作ったものも Slavnov-Taylor 恒等式と呼ばれていますが、物質場がある場合で見ていきます。発想はワード・高橋恒等式と同じで、理論に BRS 不変性があるなら生成汎関数は BRS 不変性を持っているはずだというものです。つまり、生成汎関数の源の項によって現れる余計な項は消えるべきだという条件を課すことで導出されるのが Slavnov-Taylor 恒等式です。
ここでの $\mathcal{L}_{eff}$ は前に見たように BRS 不変になっていて、BRS 変換は

$$\delta A^a_\mu = \lambda(D_\mu\eta)^a$$

$$\delta\eta^c = \frac{1}{2}\lambda g f^{abc}\eta^b\eta^c\lambda$$

$$\delta\overline{\eta}^a = -\frac{1}{\alpha}\lambda(\partial^\mu A^a_\mu)$$

$$\delta\psi = i\lambda g\eta^a t^a\psi$$

これを使用します。今の場合での生成汎関数を

$$Z[J,s,u,\xi,\overline{\xi}] = \int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + A^a_\mu J^{a\mu} + s^a\eta^a + u^a\overline{\eta}^a + \overline{\psi}\xi + \psi\overline{\xi})\Big]$$

このように設定します。$J^{a\mu}, s, u, \xi, \overline{\xi}$ がそれぞれの源に対応しています (s, u は反交換します)。ゴースト場の源の作りが、フェルミオン場とは違うようになっていますが、支障がないのでこの形で行います (フェルミオン場と同じように作っても結果は同じ)。
要求することは、これと BRS 変換を実行したあとの生成汎関数

$$Z'[J,s,u,\xi,\overline{\xi}] = \int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + A^{a\prime}_\mu J^{a\mu} + s^a\eta'^a + u^a\overline{\eta}^{a\prime} + \overline{\psi}'\xi + \psi'\overline{\xi})\Big]$$

が等しいということです (BRS 変換で積分測度は変わらない)。変換を

$$A_\mu^{a\prime} = A_\mu^a + \delta A_\mu^a \ , \ \eta' = \eta + \delta\eta \ , \ \overline{\eta}' = \overline{\eta} + \delta\overline{\eta} \ , \ \psi' = \psi + \delta\psi \ , \ \overline{\psi}' = \overline{\psi} + \delta\overline{\psi}$$

このように書けば、exp を展開することで

$$Z'[J, s, u, \xi, \overline{\xi}] = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi$$
$$(1 + \delta A_\mu^a J^{a\mu} + x\delta\eta + y\delta\overline{\eta} + \delta\overline{\psi}\xi + \overline{\xi}\delta\psi)\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + A_\mu^a J^{a\mu} + s^a\eta^a + u^a\overline{\eta}^a + \overline{\psi}\xi + \psi\overline{\xi})\Big]$$

なので $Z = Z'$ より

$$0 = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi(\delta A_\mu^a J^{a\mu} + s^a\delta\eta^a + u^a\delta\overline{\eta}^a + \delta\overline{\psi}\xi + \overline{\xi}\delta\psi)$$
$$\times \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + A_\mu^a J^{a\mu} + s^a\eta^a + u^a\overline{\eta}^a + \overline{\psi}\xi + \psi\overline{\xi})\Big] \tag{1}$$

この変換が BRS 変換だとして見ていくんですが、生成汎関数に新しい源による項を加えることでやり易くなります。加える項は

$$K^{a\mu}(D_\mu\eta)^a + v^a(-\frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c) + ig\eta^a t^a\overline{\omega}\psi + ig\eta^a t^a\overline{\psi}\omega$$

新しい源は $K^{a\mu}, v^a, \overline{\omega}, \omega$($K^{a\mu}$ がグラスマン数で他は通常の数) で、それぞれに対応しているのは A_μ^a, η, ψ の BRS 変換によって出てくるものです。これを加えることでラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{ex} = \mathcal{L}_{eff} + A_\mu^a J^{a\mu} + s^a\eta^a + u^a\overline{\eta}^a + \overline{\psi}\eta + \overline{\eta}\psi$$
$$+ K^{a\mu}(D_\mu\eta)^a + v^a(-\frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c) + ig\eta^a t^a\overline{\omega}\psi + ig\eta^a t^a\overline{\psi}\omega \tag{2a}$$

$$Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{ex})\Big] \tag{2b}$$

そしてこれに対して BRS 変換をすることで出てくる $\delta\mathcal{L}_{ex}$ は

$$\delta\mathcal{L}_{ex} = \delta A_\mu^a J^{a\mu} + s^a\delta\eta^a + u^a\delta\overline{\eta}^a + \delta\overline{\psi}\xi + \overline{\xi}\delta\psi$$

$\mathcal{L}_{eff}$ は BRS 不変であるので、源による項が出てきますが新しく加えた項は出てきません。これは BRS 変換のベキ零性によるものです (源は BRS 変換に対して変化しないとする)。実際に $D_\mu\eta$ は BRS 変換で 0 になるというのは前に見ましたし、残りも計算すれば 0 になるのが確かめられます

$$
\begin{aligned}
\delta(f^{abc}\eta^b\eta^c) &= f^{abc}(\delta\eta^b\eta^c + \eta^b\delta\eta^c) \\
&= -\frac{1}{2}gf^{abc}f^{bmn}\eta^m\eta^n\lambda\eta^c - \frac{1}{2}gf^{abc}f^{cmn}\eta^b\eta^m\eta^n\lambda \\
&= -\frac{1}{2}gf^{acb}f^{bmn}\eta^m\eta^n\eta^c\lambda - \frac{1}{2}gf^{abc}f^{cmn}\eta^m\eta^n\eta^b\lambda \\
&= -gf^{abc}f^{cmn}\eta^m\eta^n\eta^b\lambda \\
&= -\frac{1}{3}gf^{abc}f^{cmn}\eta^m\eta^n\eta^b\lambda - \frac{1}{3}gf^{abc}f^{cmn}\eta^b\eta^m\eta^n\lambda - \frac{1}{3}gf^{abc}f^{cmn}\eta^n\eta^b\eta^m\lambda \\
&= -\frac{1}{3}gf^{abc}f^{cmn}\eta^m\eta^n\eta^b\lambda - \frac{1}{3}gf^{amc}f^{cnb}\eta^m\eta^n\eta^b\lambda - \frac{1}{3}gf^{anc}f^{cbm}\eta^m\eta^n\eta^b\lambda \\
&= -\frac{1}{3}g(f^{abc}f^{cmn} + f^{amc}f^{cnb} + f^{anc}f^{cbm})\eta^m\eta^n\eta^b\lambda
\end{aligned}
$$

ここで、ヤコビ恒等式

$$
f^{abc}f^{cmn} = -f^{amc}f^{cnb} - f^{anc}f^{cbm}
$$

を使うことで 0 になっていることが確かめられます。残りの項も

$$
\begin{aligned}
\delta(\eta^a t^a\psi) &= \delta\eta^a t^a\psi + \eta^a t^a\delta\psi \\
&= -\frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c t^a\lambda\psi - ig\eta^a\eta^b t^a t^b\lambda\psi \\
&= -\frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c t^a\lambda\psi - \frac{i}{2}g\eta^a\eta^b t^a t^b\lambda\psi - \frac{i}{2}g\eta^b\eta^a t^b t^a\lambda\psi \\
&= -\frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c t^a\lambda\psi - \frac{i}{2}g\eta^a\eta^b t^a t^b\lambda\psi + \frac{i}{2}g\eta^a\eta^b t^b t^a\lambda\psi \\
&= g(-\frac{1}{2}f^{abc}t^a - \frac{i}{2}t^b t^c + \frac{i}{2}t^c t^b)\eta^b\eta^c\lambda\psi \\
&= g(-\frac{1}{2}f^{abc}t^a - \frac{i}{2}[t^b, t^c])\eta^b\eta^c\lambda\psi \\
&= g(-\frac{1}{2}f^{abc}t^a + \frac{1}{2}f^{bca}t^a)\eta^b\eta^c\lambda\psi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

というわけで使う式は、(1) を変更した

$$
0 = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi(\delta A^a_\mu J^{a\mu} + s^a\delta\eta^a + u^a\delta\overline{\eta}^a + \delta\overline{\psi}\xi + \overline{\xi}\delta\psi)\exp\left[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{ex})\right] \tag{3}
$$

となります。この式に含まれている $\delta A^a_\mu, \delta\eta, \delta\overline{\psi}, \delta\psi$ は新しく加えた源で Z を汎関数微分すれば出てき、$\delta\overline{\eta}$ は $J^{a\mu}$ による汎関数微分で出てきます。

$$
\begin{aligned}
\lambda\frac{\delta Z}{\delta K^a_\mu} = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i\lambda(D^\mu\eta)^a\exp\Big[i\int d^4x(&\mathcal{L}_{eff} + A^a_\mu J^{a\mu} + s^a\eta^a + u^a\overline{\eta}^a + \overline{\psi}\xi + \psi\overline{\xi} \\
&+K^{a\mu}(D_\mu\eta)^a + v^a(-\frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c) + ig\eta^a t^a\overline{\omega}\psi + ig\eta^a t^a\overline{\psi}\omega)\Big] \\
= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i\delta A^{a\mu}\exp\left[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{ex})\right]
\end{aligned}
$$

$$\lambda\frac{\delta Z}{\delta v^a}=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i(-\frac{1}{2}\lambda g f^{abc}\eta^b\eta^c)\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+\mathcal{L}_{ex})\Big]$$

$$=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i\delta\eta\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+\mathcal{L}_{ex})\Big]$$

$$\lambda\frac{\delta Z}{\delta\omega}=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i(i\lambda g\eta^a t^a\overline{\psi})\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+\mathcal{L}_{ex})\Big]$$

$$=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i(-\delta\overline{\psi})\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+\mathcal{L}_{ex})\Big]$$

$$\lambda\frac{\delta Z}{\delta\overline{\omega}}=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i\delta\psi\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+\mathcal{L}_{ex})\Big]$$

$$\frac{\lambda}{\alpha}\partial_\mu\frac{\delta Z}{\delta J^a_\mu}=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i(\frac{\lambda}{\alpha}\partial_\mu A^{a\mu})\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+\mathcal{L}_{ex})\Big]$$

$$=\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i(-\delta\overline{\eta})\exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff}+\mathcal{L}_{ex})\Big]$$

というわけで、(3) は

$$0=\lambda\int d^4x\Big(\frac{\delta Z}{\delta K^{a\mu}}J^{a\mu}+s^a\frac{\delta Z}{\delta v^a}-u^a\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\frac{\delta Z}{\delta J^a_\mu}+\frac{\delta Z}{\delta\omega}\xi-\overline{\xi}\frac{\delta Z}{\delta\overline{\omega}}\Big)$$

これを Z から W に変えれば ($Z=e^{iW}$)

$$0=\lambda\int d^4x\Big(\frac{\delta W}{\delta K^{a\mu}}J^{a\mu}+s^a\frac{\delta W}{\delta v^a}-u^a\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\frac{\delta W}{\delta J^a_\mu}+\frac{\delta W}{\delta\omega}\xi-\overline{\xi}\frac{\delta W}{\delta\overline{\omega}}\Big)$$

これが BRS 不変性を要求したときに現れる Slavnov-Taylor 恒等式です。ここからはよく使われている形に変形させていく作業になります。
まずは有効作用による形に変えます。ルジャンドル変換によって有効作用は

$$\Gamma[A,\eta,\overline{\eta},\psi,\overline{\psi};K,v,\omega,\overline{\omega}]=W[J,s,u,\xi,\overline{\xi},K,v,\omega,\overline{\omega}]$$

$$-\int d^4x(A^a_\mu J^{\mu a}+s^a\eta^a+u^a\overline{\eta}^a+\overline{\psi}\xi+\overline{\xi}\psi)\qquad(4)$$

有効作用での場は、W による関係

$$\frac{\delta W}{\delta J^a_\mu} = A^{\mu a}\ ,\ \frac{\delta W}{\delta s^a} = \eta^a\ ,\ \frac{\delta W}{\delta u^a} = \overline{\eta}^a\ ,\ \frac{\delta W}{\delta \xi} = -\overline{\psi}\ ,\ \frac{\delta W}{\delta \overline{\xi}} = \psi$$

によるものです。そして、有効作用 Γ の関係は

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A^a_\mu} = -J^{\mu a}\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a} = -s^a\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\eta}^a} = -u^a\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\psi}} = -\xi\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} = \overline{\xi}$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta K^a_\mu} = \frac{\delta W}{\delta K^a_\mu}\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} = \frac{\delta W}{\delta v^a}\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \omega} = \frac{\delta W}{\delta \omega}\ ,\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\omega}} = \frac{\delta W}{\delta \overline{\omega}}$$

これらを使うことで

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda \int d^4x \Big(-\frac{\delta \Gamma}{\delta K^{a\mu}}\frac{\delta \Gamma}{\delta A^a_\mu} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a}\frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\eta}^a}\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^{\mu a} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \omega}\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\psi}} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi}\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\omega}} \Big) \\
&= \lambda \int d^4x \Big(\frac{\delta \Gamma}{\delta K^{a\mu}}\frac{\delta \Gamma}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta^a}\frac{\delta \Gamma}{\delta v^a} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\eta}^a}\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^{\mu a} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \omega}\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\psi}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi}\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\omega}} \Big)
\end{aligned}$$

ここからさらに簡単な形に変更させます。生成汎関数 (2b) を $\overline{\eta}$ で汎関数微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Z}{\delta \overline{\eta}} &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ i(u^a - (\partial^\mu D_\mu \eta)^a) \\
&\qquad \times \exp\Big[i \int d^4x (\cdots - \overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu \eta)^a + A^a_\mu J^{a\mu} + s^a\eta^a + u^a\overline{\eta}^a + \overline{\psi}\xi + \psi\overline{\xi} \\
&\qquad\qquad + K^{a\mu}(D_\mu\eta)^a + v^a(-\frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c) + ig\eta^a t^a \overline{\omega}\psi + ig\eta^a t^a \overline{\psi}\omega) \Big] \\
&= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\ (iu^a - \partial^\mu \frac{\delta}{\delta K^{a\mu}}) \exp\Big[i \int d^4x (\mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{ex}) \Big] \\
&= iu^a Z - \partial^\mu \frac{\delta Z}{\delta K^{a\mu}}
\end{aligned}$$

これを W に変えれば

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Z}{\delta \overline{\eta}} &= iu^a Z - \partial^\mu \frac{\delta Z}{\delta K^{a\mu}} \\
\frac{\delta e^{iW}}{\delta \overline{\eta}} &= iu^a e^{iW} - \partial^\mu \frac{\delta e^{iW}}{\delta K^{a\mu}} \\
\frac{\delta W}{\delta \overline{\eta}} &= u^a - \partial^\mu \frac{\delta W}{\delta K^{a\mu}}
\end{aligned}$$

$\delta W/\delta\overline{\eta}$ は (4) を見ればわかるように 0 で、u^a は $-\delta\Gamma/\delta\overline{\eta}^a$、$\delta W/\delta K = \delta\Gamma/\delta K$ なので

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{\eta}^a} = -\partial^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta K^{a\mu}}$$

この関係を (5) に入れれば

$$
\begin{aligned}
0 &= \int d^4x\Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\mu}}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\upsilon^a}+\partial^\nu\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\nu}}\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^{\mu a}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}}\Big)\\
&= \int d^4x\Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\mu}}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\upsilon^a}+\partial^\nu\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\nu}}\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^{\mu a}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}}\Big)\\
&= \int d^4x\Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\mu}}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\upsilon^a}+\partial^\nu(\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\mu}}\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^{\mu a})-\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\nu}}\frac{\lambda}{\alpha}\partial^\nu\partial_\mu A^{\mu a}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}}\Big)\\
&= \int d^4x\Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\mu}}(\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu}-\frac{1}{\alpha}\partial^\mu\partial_\nu A^{\nu a})+\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\upsilon^a}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}}\Big)
\end{aligned}
$$

もう一つ記号として

$$\tilde{\Gamma}=\Gamma+\frac{1}{2\alpha}\int d^4x(\partial^\nu A^a_\nu)^2$$

というのを定義します。これによって

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta A^a_\mu}=\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu}-\frac{1}{\alpha}\int d^4x\partial^\mu\partial^\nu A^a_\nu$$

そして他の項は $\tilde{\Gamma}$ になっても変更されないので

$$\int d^4x\Big(\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K^{a\mu}}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta A^a_\mu}+\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\eta^a}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\upsilon^a}+\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\omega}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\overline{\psi}}+\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\psi}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\overline{\omega}}\Big)=0$$

この形で Slavnov-Taylor 恒等式はよく書かれています。もしくは、くり込み定数を使った形で書かれている場合もありますが、それは別のところで触れます。