確率過程量子化

量子化の方法の 1 つである確率過程量子化の導入部分を見ます。ここでの確率過程量子化は Parisi と Wu によって与えられたものです。
統計力学での「ブラウン運動」と「フォッカ・プランク方程式」での結果を使っています。ユークリッド化については「経路積分」を見てください。
主に「Stochastic Quantization」(Mikio Namiki 著) と「Stochastic Quantization of $(\lambda\phi^4)_d$ Scalar Theory: Generalized Langevin Equation with Memory Kernel」(arXiv:hep-th/0511224) を参考にしています。ちなみに「Stochastic Quantization」は入門用としては使いづらいです。

方針は確率論での方程式を使って他の量子化 (正準量子化、経路積分) の結果を再現するというものです。なので、準備として確率論の話からしていきます。ランジュバン方程式とフォッカー・プランク方程式を知っている人は飛ばしていいです。

ここで使うのはランジュバン方程式とフォッカー・プランク方程式です。ランジュバン方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \eta(t)$$

ブラウン運動で言えば、v は速度、t は時間です。γ は速度に比例する摩擦の係数で (第一項は外力)、η は揺動力です。η は統計平均として

$$\langle\eta(t)\rangle_\eta = 0\ ,\ \langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle_\eta = 2B\delta(t_1 - t_2)$$

に従うとします（B は揺動力の大きさを与える定数)。これはガウス分布

$$P = N^{-1}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt\ \eta^2(t)\Big]\ ,\ N = \int\mathcal{D}\eta\ \exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt\ \eta^2(t)\Big]$$

を使えば (N は確率の規格化定数)、ガウス積分によって実際に

$$\langle\eta(t)\rangle_\eta = N^{-1}\int\mathcal{D}\eta\ \eta(t)\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt\ \eta^2(t)\Big] = 0$$

$$\langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle_\eta = N^{-1}\int\mathcal{D}\eta\ \eta(t_1)\eta(t_2)\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt\ \eta^2(t)\Big] = 2B\delta(t_1 - t_2)$$

となります。これは

$$I[J] = N^{-1}\int\mathcal{D}\eta\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt\ \eta^2(t) + \int dt\ J(t)\eta(t)\Big]$$

というのを導入すれば簡単に求められます。$I[J]$ を J で汎関数微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta I}{\delta J(t)}\Big|_{J=0} &= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta \frac{\delta}{\delta J(t)} \exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t') + \int dt'\ J(t')\eta(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta \int dt' \frac{\delta J(t')}{\delta J(t)}\eta(t') \exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t') + \int dt'\ J(t')\eta(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta \int dt' \delta(t'-t)\eta(t') \exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t') + \int dt'\ J(t')\eta(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta\ \eta(t) \exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt\ \eta^2(t) + \int dt\ J(t)\eta(t)\Big]\Big|_{J=0} \\
&= \langle \eta(t) \rangle_\eta
\end{aligned}
$$

2 個あるときは

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta I}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\Big|_{J=0} &= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta \frac{\delta}{\delta J(t)} \exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t') + \int dt'\ J(t')\eta(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= N^{-1}\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\int \mathcal{D}\eta\ \eta(t_2) \exp[\cdots]\Big|_{J=0} \\
&= \langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle_\eta
\end{aligned}
$$

$I[J]$ の η 積分はガウス積分によって実行でき

$$
\begin{aligned}
I[J] &= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta \exp\Big[-\frac{1}{2}\int dt\ \frac{1}{2B}\eta^2(t) + \int dt\ J(t)\eta(t)\Big] \\
&= N^{-1} N \exp\Big[\frac{1}{2}\int dt'\ (\frac{1}{2B})^{-1} J^2(t')\Big] \\
&= \exp\Big[B\int dt'\ J^2(t')\Big]
\end{aligned}
$$

これはガウス積分

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp[\frac{b^2}{4a}]
$$

の多変数版です。これを J で汎関数微分すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta I}{\delta J(t)}|_{J=0} &= \frac{\delta}{\delta J(t)}\exp\Big[B\int dt'\ J^2(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= 2\int dt' J(t')\frac{\delta J(t')}{\delta J(t)}\exp\Big[B\int dt'\ J^2(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= 2BJ(t)\exp\Big[B\int dt'\ J^2(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2 個のときは

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2 I}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)}\Big|_{J=0} &= \frac{\delta}{\delta J(t_1)}\frac{\delta}{\delta J(t_2)}\exp\Big[B\int dt'\ J^2(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= 2B\frac{\delta}{\delta J(t_1)}J(t_2)\exp\Big[B\int dt'\ J^2(t')\Big]\Big|_{J=0} \\
&= 2B\delta(t_2-t_1)
\end{aligned}
$$

となるので、η の統計平均が求まります。

この揺動力の統計平均において v の関数 $f(v)$ の統計平均が

$$
\langle f(v)\rangle_\eta = N^{-1}\int \mathcal{D}\eta\ f(v)\exp[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')] = \int dv\ f(v)W(v,t)
$$

と書けるとして、v と t に依存する確率分布 $W(v,t)$ を導入します。$\langle f(v)\rangle_\eta$ を時間微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle f(v)\rangle_\eta &= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta\ \frac{d}{dt}f(v)\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big] \\
&= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta\ \frac{dv}{dt}\frac{df(v)}{dv(t)}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big]
\end{aligned}
$$

これにランジュバン方程式を入れると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle f(v)\rangle_\eta &= N^{-1}\int \mathcal{D}\eta\ \frac{1}{m}\big(-\gamma v(t)+\eta(t)\big)\frac{df(v)}{dv(t)}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big] \\
&= \langle\frac{-\gamma v}{m}\frac{df(v)}{dv}\rangle_\eta + N^{-1}\int \mathcal{D}\eta\frac{\eta}{m}\frac{df(v)}{dv(t)}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big] \\
&= \langle\frac{-\gamma v}{m}\frac{df(v)}{dv}\rangle_\eta + N^{-1}\int \mathcal{D}\eta\frac{1}{m}\Big(-2B\frac{\delta}{\delta\eta(t)}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big]\Big)\frac{df(v)}{dv(t)}
\end{aligned}
$$

最後は

$$
\frac{\delta}{\delta\eta(t)}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big] = -\frac{1}{4B}\int dt'\ 2\eta(t')\frac{\delta\eta(t')}{\delta\eta(t)} = -\frac{1}{2B}\eta(t)
$$

を使っています。また、ガウス積分において

$$
\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \frac{d}{dx}e^{-ax^2} = \big[e^{-ax^2}\big]_{-\infty}^{\infty} = 0
$$

であることを踏まえれば、部分積分によって

$$
\int \mathcal{D}\eta\frac{\delta}{\delta\eta(t)}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big]\frac{df(v)}{dv} = -\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big]\frac{\delta}{\delta\eta(t)}\frac{df(v)}{dv}
$$

となるので

$$\frac{d}{dt}\langle f(v)\rangle_\eta = \langle \frac{-\gamma v}{m}\frac{df(v)}{dv}\rangle_\eta + N^{-1}\int \mathcal{D}\eta \frac{2B}{m}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big]\frac{\delta}{\delta\eta(t)}\frac{df(v)}{dv(t)} \tag{1}$$

さらにランジュバン方程式の解は

$$v(t) = e^{-\gamma t/m}v(0) + \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')/m}\frac{\eta(t')}{m}$$

なので、$v(0)=0$ とし、階段関数 $\theta(t-t')$ を使うと

$$v(t) = \int_0^t dt' e^{-\gamma(t-t')/m}\frac{\eta(t')}{m} = \int_0^\infty dt'\theta(t-t')e^{-\gamma(t-t')/m}\frac{\eta(t')}{m}$$

階段関数なので $t'=t$ を超えると 0 になるために、無限大まで範囲を取れます。このとき階段関数の $\theta(0)$ を

$$\theta(0) = \frac{1}{2}$$

に設定します。そうすると

$$\begin{aligned}\frac{\delta v(t)}{\delta\eta(t)} &= \frac{\delta}{\delta\eta(t)}\int_0^\infty dt'\theta(t-t')e^{-\gamma(t-t')/m}\frac{\eta(t')}{m}\\ &= \int_0^\infty dt'\theta(t-t')e^{-\gamma(t-t')/m}\frac{1}{m}\delta(t'-t)\\ &= \theta(0)\frac{1}{m}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{m}\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\delta}{\delta\eta(t)}\frac{df(v)}{dv(t)} = \frac{\delta v(t)}{\delta\eta(t)}\frac{\partial}{\partial v(t)}\frac{df(v)}{dv(t)} = \frac{1}{2}\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v(t)}\frac{df(v)}{dv(t)}$$

これを (1) の第二項に入れて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle f(v)\rangle_\eta &= \langle \frac{-\gamma v}{m}\frac{df(v)}{dv}\rangle_\eta + N^{-1}\int \mathcal{D}\eta \frac{B}{m^2}\frac{\partial}{\partial v(t)}\frac{df(v)}{dv(t)}\exp\Big[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')\Big]\\ &= \langle \frac{-\gamma v}{m}\frac{df(v)}{dv}\rangle_\eta + \frac{B}{m^2}\langle\frac{\partial}{\partial v(t)}\frac{df(v)}{dv(t)}\rangle_\eta \end{aligned} \tag{2}$$

次にこれを確率分布 $W(v,t)$ を使って書くとどうなるか見ます。
　統計平均の取り方が

$$\langle f(v)\rangle_\eta = \int dv\ f(v)W(v,t)$$

で与えられているとすると、$\langle f(v)\rangle_\eta$ の時間微分は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle f(v)\rangle_\eta &= \frac{d}{dt}\int dv\ f(v)W(v,t)\\
&= \int dv\ \frac{dv}{dt}\frac{df(v)}{dv}W(v,t) + \int dv\ f(v)\frac{d}{dt}W(v,t)\\
&= \int dv\ \frac{dv}{dt}\frac{df(v)}{dv}W(v,t) + \int dv\ f(v)\frac{dv}{dt}\frac{\partial W(v,t)}{\partial v} + \int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial t}W(v,t)\\
&= \int dv\ (\frac{dv}{dt}\frac{df(v)}{dv}W(v,t) + f(v)\frac{dv}{dt}\frac{\partial W(v,t)}{\partial v}) + \int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial t}W(v,t)\\
&= \int dv\ \frac{dv}{dt}\big(\frac{df(v)}{dv}W(v,t) + f(v)\frac{\partial W(v,t)}{\partial v}\big) + \int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial t}W(v,t)\\
&= \int dv\ \big(-\frac{\gamma v}{m} + \frac{\eta}{m})(\frac{df(v)}{dv}W(v,t) + f(v)\frac{\partial W(v,t)}{\partial v}\big) + \int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial t}W(v,t)\\
&= -\int dv\ \frac{\gamma}{m}\big(\frac{\partial}{\partial v}(vf(v)W(v,t)) - f(v)W(v,t)\big) + \frac{\eta}{m}\int dv\ \frac{\partial}{\partial v}(f(v)W(v,t)) + \int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial t}W(v,t)
\end{aligned}$$

ここで確率分布 W には、v の両端で消えるとして

$$\int dv\ \frac{\partial}{\partial v}(F(v)W(v,t)) = 0$$

という境界条件があるとします ($F(v)$ は任意の v の関数)。そうすると

$$\frac{d}{dt}\langle f(v)\rangle_\eta = \int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial t}W(v,t) \tag{3}$$

(2) の第一項を W で書くと

$$\begin{aligned}
\frac{-\gamma}{m}\langle v\frac{df(v)}{dv}\rangle_\eta &= \frac{-\gamma}{m}\int dv\ v\frac{df(v)}{dv}W(v,t)\\
&= \frac{-\gamma}{m}\int dv\ \frac{\partial}{\partial v}(vf(v)W(v,t)) + \frac{\gamma}{m}\int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial v}(vW(v,t))\\
&= \frac{\gamma}{m}\int dv\ f(v)\frac{d}{dv}(vW(v,t))
\end{aligned} \tag{4}$$

第二項は

$$
\begin{aligned}
\frac{B}{m^2}\langle\frac{\partial}{\partial v(t)}\frac{df(v)}{dv(t)}\rangle_\eta &= \frac{B}{m^2}\int dv\ (\frac{\partial}{\partial v}\frac{df(v)}{dv})W(v,t)\\
&= \frac{B}{m^2}\int dv\ \frac{\partial}{\partial v}(\frac{df(v)}{dv}W(v,t)) - \frac{B}{m^2}\int dv\ \frac{df(v)}{dv}\frac{\partial}{\partial v}W(v,t)\\
&= \frac{B}{m^2}\int dv\ \frac{d}{dv}(\frac{df(v)}{dv}W(v,t)) - \frac{B}{m^2}\int dv\ \frac{d}{dv}(f(v)\frac{dW(v,t)}{dv}) + \frac{B}{m^2}\int dv\ f(v)\frac{d}{dv}\frac{\partial W(v,t)}{\partial v}\\
&= \frac{B}{m^2}\int dv\ f(v)\frac{\partial^2 W(v,t)}{\partial v^2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

最後に

$$
\int dv\ \frac{\partial}{\partial v}(F(v)\frac{\partial W}{\partial v}) = 0
$$

の境界条件も加えています。

(2) に (3)〜(5) をいれると

$$
\begin{aligned}
\int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial t}W(v,t) &= \frac{\gamma}{m}\int dv\ f(v)\frac{\partial}{\partial v}\big(vW(v,t)\big) + \frac{B}{m^2}\int dv\ f(v)\frac{\partial^2 W(v,t)}{\partial v^2}\\
f(v)\frac{\partial}{\partial t}W(v,t) &= \frac{\gamma}{m}f(v)\frac{\partial}{\partial v}\big(vW(v,t)\big) + \frac{B}{m^2}f(v)\frac{\partial^2 W(v,t)}{\partial v^2}\\
\frac{\partial}{\partial t}W(v,t) &= \frac{\gamma}{m}\frac{\partial}{\partial v}\big(vW(v,t)\big) + \frac{B}{m^2}\frac{\partial^2 W(v,t)}{\partial v^2}
\end{aligned}
$$

となって、確率分布 (速度分布)$W(v,t)$ に対するフォッカー・プランク方程式となります。というわけで

$$
\langle f(v)\rangle_\eta = N^{-1}\int \mathcal{D}\eta\ f(v)\exp[-\frac{1}{4B}\int dt'\ \eta^2(t')] = \int dv\ f(v)W(v,t)
$$

としたとき、$W(v,t)$ はフォッカー・プランク方程式に従います。$W(v,t)$ は t が無限大の極限（熱平衡極限）で

$$
W_{eq}(v,t=\infty) = C\exp[-\frac{m\gamma v^2}{2B}]
$$

となります (C は定数)。

これで準備ができたので本題の確率過程量子化に移ります。まず、ランジュバン方程式の形を少し一般化して

$$
\frac{d}{dt}v(t) = K(v) + \eta(t)
$$

とし、簡単にするために質量 m は 1 に取っています。揺動力の統計平均は同じで

$$
\langle\eta(t)\rangle_\eta = 0\ ,\ \langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle_\eta = 2B\delta(t_1-t_2)
$$

対応するフォッカー・プランク方程式は

$$\frac{\partial W(v,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial v}(K(v)W(v,t))+B\frac{\partial^2}{\partial v^2}W(v,t)$$

となるだけで、このときの熱平衡極限は

$$\frac{\partial}{\partial t}W_{eq}(v)=0$$

$$W_{eq}(v)=C\exp[\int dv\frac{K(v)}{B}]=C\exp[-\frac{V(v)}{B}]\quad (K=-\frac{\partial V(v)}{\partial v})$$

となります。ここで、統計平均が

$$\langle F(v)\rangle_\eta=\int dv\ F(v)W(v,t)$$

となっていることと、ユークリッド空間での経路積分による場の期待値 (n 点関数) が

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\rangle=\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots|0\rangle=N'\int\mathcal{D}\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\exp[-S_E]$$

で与えられることを見比べると、似ているのが分かります ($x=(x_0,\boldsymbol{x})$ で x_0 を $x_4=ix_0$ にしてユークリッド化している。S_E はユークリッド化された作用)。特に熱平衡極限では W は

$$W_{eq}(v)=C\exp[-\frac{V(v)}{B}]$$

となるので同じ形です。

この対応関係から、熱平衡極限において

$$\frac{V(v)}{B}\ \Leftrightarrow\ S_E \tag{6}$$

の置き換えができればいいのではないかと考えます。そのために、場 $\phi(x)$ に新しい時間依存性を加えて $\phi(x,\tau)$ とします。τ は $x^\mu=(x_0,\boldsymbol{x})$ の x_0 とは無関係な仮想的な時間です。で、この仮想的な時間に対して $\phi(x,\tau)$ はランジュバン方程式に従うようにします。つまり、ランジュバン方程式

$$\frac{d}{dt}v(t)=-\frac{\partial V(v)}{\partial v}+\eta(t)\ ,\ \exp[-\frac{V(v)}{B}]$$

$$\langle\eta(t)\rangle_\eta=0\ ,\ \langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle_\eta=2B\delta(t_1-t_2)$$

を場 $\phi(x,\tau)$ を使った式に書き換えることで、ユークリッド空間において

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(x,\tau)=-\frac{\delta S_E}{\delta\phi(x)}|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)}+\eta(x,\tau)\ ,\ \exp[-S_E]$$

$$\langle\eta(x,t)\rangle_\eta=0\ ,\ \langle\eta(x_1,t_1)\eta(x_2,t_2)\rangle_\eta=2\delta(\tau_1-\tau_2)\delta^4(x_1-x_2)$$

という対応した状況が作れます (S_E は汎関数なので汎関数微分になっている)。このとき n 点関数の統計平均は

$$\langle \phi(x_1,\tau)\phi(x_2,\tau)\cdots\rangle_\eta$$

として計算でき、これの熱平衡極限 $\tau\to\infty$ でユークリッド空間の経路積分による $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\rangle$ と一致することを要求します。これは (6) での対応関係から作っているので、そうでないと意味がないです。

何をしたのかをまとめると、

- ユークリッド空間で場 $\phi(x)$ に仮想的な時間 τ を加えて $\phi(x,\tau)$ とする
- $\phi(x,\tau)$ はランジュバン方程式に従う
- 統計平均 $\langle\phi(x_1,\tau)\phi(x_2,\tau)\cdots\rangle_\eta$ は熱平衡極限 ($\tau\to\infty$) で通常の n 点関数 $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\rangle$ と一致する

つまり、ランジュバン方程式を経由することで量子論で計算される n 点関数 $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\rangle$ が求まるということです。このように、場 $\phi(x,\tau)$ が確率論での方程式に従うようにして量子化する方法を確率過程量子化 (stochastic quantization) と言います。確率論を使う量子化は 1966 年の Nelson による話から始まっていて（確率論との対応はシュレーディンガーがすでに示していた)、ここでの仮想的な時間を場に加えることで量子化しようとする方法は 1981 年に Parisi と Wu によって与えられました。

具体的に実数スカラー場として、場の統計平均の熱平衡極限が通常の n 点関数と同じになるのを見ます。実数スカラー場なので作用は

$$iS=i\int d^4x\ (\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2)$$

を使います。これをユークリッド化 $x_0\to -ix_4$ して

$$S_E=\int d^4x_E\ (\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi+\frac{1}{2}m^2\phi^2)\quad(\exp[iS]\ \Rightarrow\ \exp[-S_E])$$

ユークリッド空間の内積は

$$x_\mu y_\mu=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+x_4y_4$$
$$\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi=(\frac{\partial\phi}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial x_2})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial x_3})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial x_4})^2$$

となっていて、添え字の上付き下付きの意味がなくなります。これに仮想的な時間 τ を加えて

$$\begin{aligned}S_E&=\int d^4x_Ed\tau\ \big(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x_E,\tau)\partial_\mu\phi(x_E,\tau)+\frac{1}{2}m^2\phi^2(x_E,\tau)\big)\\&=\int d^4x_Ed\tau\ \mathcal{L}_E\end{aligned}$$

とします。これをランジュバン方程式に入れます。ここから x_E を x と書いていきます。

$\delta S_E/\delta\phi$ は汎関数の意味でのラグランジアン密度によって

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_E}{\delta\phi(x,\tau)} &= \int d^4x'd\tau'\big(\frac{\delta\mathcal{L}_E[\phi(x',\tau'),\partial'\phi(x',\tau'))]}{\delta\phi(x,\tau)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_E[\phi(x',\tau'),\partial'\phi(x',\tau'))]}{\partial(\delta\partial_\mu\phi(x,\tau))}\big) \\
&= \int d^4xd\tau\big(m^2\phi(x',\tau')\delta^4(x'-x)\delta(\tau'-\tau) - \partial'_\mu\phi(x',\tau')\delta(\tau'-\tau)\partial_\mu\delta^4(x'-x)\big) \\
&= m^2\phi(x,\tau) - \partial_\mu\partial_\mu\phi(x,\tau)
\end{aligned}$$

デルタ関数の

$$\int dy\ f(y)\frac{d}{dy}\delta(y-z) = -\frac{d}{dz}f(z)$$

を使っています。もしくは汎関数微分が

$$F[\phi] = \int d^4y\ g(\phi(y))\ ,\ \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \int d^4y\frac{\partial g}{\partial\phi}\delta(y-x) = \frac{\partial g}{\partial x}$$

と定義されていることから、$\mathcal{L}$ を関数として

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_E}{\delta\phi(x,\tau)} &= \int d^4x'd\tau'\delta^4(x'-x)\delta(\tau'-\tau)\big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\big) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \\
&= m^2\phi(x,\tau) - \partial_\mu\partial_\mu\phi(x,\tau)
\end{aligned}$$

としても求まります。これをランジュバン方程式に入れると

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(x,\tau) = (\Box - m^2)\phi(x,\tau) + \eta(x,\tau) \qquad (\Box = \partial_\mu\partial_\mu)$$

として、場 $\phi(x,\tau)$ が従う方程式が求まります。これを解いて、$\phi(x,\tau)$ の統計平均を求めます。$\eta(x,\tau)$ の統計平均は当然

$$\langle\eta(x,t)\rangle_\eta = 0\ ,\ \langle\eta(x_1,t_1)\eta(x_2,t_2)\rangle_\eta = 2\delta(\tau_1-\tau_2)\delta^4(x_1-x_2) \tag{7}$$

と与えられています。

まず、$\phi(x,\tau),\eta(x,\tau)$ のフーリエ変換を

$$\phi(x,\tau) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\phi(k,\tau)e^{-ikx}\ ,\ \eta(x,\tau) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\eta(k,\tau)e^{-ikx}$$

これの kx はユークリッド空間での $k_E\cdot x_E$ で、ミンコフスキー空間の内積とは

$$k_E\cdot x_E = k_4x_4 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = k_0x_0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$$

となるようにしています。これを使って

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\phi(k,\tau)e^{-ikx} &= (\Box - m^2)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\phi(k,\tau)e^{-ikx} + \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\eta(k,\tau)e^{-ikx} \\
\frac{\partial}{\partial\tau}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\phi(k,\tau)e^{-ikx} &= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-k^2 - m^2)\phi(k,\tau)e^{-ikx} + \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\eta(k,\tau)e^{-ikx} \\
\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(k,\tau) &= -(k^2+m^2)\phi(k,\tau) + \eta(k,\tau) \\
(\frac{\partial}{\partial\tau} + k^2 + m^2)\phi(k,\tau) &= \eta(k,\tau)
\end{aligned}
$$

これは非同次方程式なので、特解と同次での一般解を足せば解になります。同次での

$$
(\frac{\partial}{\partial\tau} + k^2 + m^2)\phi(k,\tau) = 0
$$

の解はすぐに

$$
A\exp[-(k^2+m^2)\tau]
$$

と求まります。A は初期条件で決まる定数です。特解はグリーン関数 $G(\tau,x)$ を使えばいいです。グリーン関数は

$$
(\frac{\partial}{\partial\tau} + k^2 + m^2)G(k,\tau) = \delta(\tau)
$$

と定義します。グリーン関数による特解は

$$
\int_{-\infty}^{\infty}d\tau' G(k,\tau-\tau')\eta(k,\tau')
$$

で与えられるので、一般解は

$$
\phi(k,\tau) = A\exp[-(k^2+m^2)\tau] + \int_{-\infty}^{\infty}d\tau' G(k,\tau-\tau')\eta(k,\tau')
$$

ちゃんと解になっているのは

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial\tau} + k^2 + m^2)\phi(k,\tau) &= A(\frac{\partial}{\partial\tau} + k^2 + m^2)e^{-(k^2+m^2)\tau} + (\frac{\partial}{\partial\tau} + k^2 + m^2)\int_{-\infty}^{\infty}d\tau' G(k,\tau-\tau')\eta(k,\tau') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\delta(\tau-\tau')\eta(k,\tau') \\
&= \eta(k,\tau)
\end{aligned}
$$

から確かめられます。ここで $G(k,\tau)$ は τ による遅延グリーン関数として

$$G(k,\tau)=0 \quad (\tau<0)$$

という条件を入れます。そうすると、遅延グリーン関数は

$$G(k,\tau)=\theta(\tau)\exp[-(k^2+m^2)t]$$

と与えられます。階段関数の微分はデルタ関数になるので

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial\tau}+k^2+m^2)G(\tau,k) &= (\frac{\partial}{\partial\tau}+k^2+m^2)(\theta(\tau)e^{-(k^2+m^2)\tau}) \\
&= \delta(\tau)e^{-(k^2+m^2)\tau}-\theta(\tau)(k^2+m^2)e^{-(k^2+m^2)\tau}+\theta(\tau)(k^2+m^2)e^{-(k^2+m^2)\tau} \\
&= \delta(\tau)\exp[-(k^2+m^2)\tau]
\end{aligned}$$

デルタ関数は $\tau=0$ で値を持つことから exp 部分は 1 になって、右辺になります。
　初期条件を与えた A を決めます。初期条件として

$$\phi(k,\tau)|_{\tau=0}=\phi_0$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\phi_0=\phi(k,\tau)|_{\tau=0} &= A\exp[-(k^2+m^2)\tau]\big|_{\tau=0}+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau' G(k,\tau-\tau')\eta(k,\tau')\big|_{\tau=0} \\
&= A+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau' G(k,-\tau')\eta(k,\tau') \\
&= A+\int_{-\infty}^{0}d\tau' G(k,-\tau')\eta(k,\tau')
\end{aligned}$$

最後へは遅延グリーン関数なので、$G(k,-\tau')$ は τ' が負の値を持つ範囲でしか値を持たないからです。
　これで $\phi(k,\tau)$ は

$$
\begin{aligned}
\phi(k,\tau) &= \big(\phi_0 - \int_{-\infty}^{0} d\tau' G(k,-\tau')\eta(k,\tau')\big)e^{-(k^2+m^2)\tau} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' G(k,\tau-\tau')\eta(k,\tau') \\
&= \phi_0 e^{-(k^2+m^2)\tau} - \int_{-\infty}^{0} d\tau' G(k,-\tau')\eta(k,\tau')e^{-(k^2+m^2)\tau} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' G(k,\tau-\tau')\eta(k,\tau') \\
&= \phi_0 e^{-(k^2+m^2)\tau} - \int_{-\infty}^{0} d\tau' \theta(-\tau')e^{(k^2+m^2)\tau'}\eta(k,\tau')e^{-(k^2+m^2)\tau} \\
&\qquad\quad + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \theta(\tau-\tau')e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}\eta(k,\tau') \\
&= \phi_0 e^{-(k^2+m^2)\tau} - \int_{-\infty}^{0} d\tau' e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}\eta(k,\tau') + \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}\eta(k,\tau') \\
&= \phi_0 e^{-(k^2+m^2)\tau}\Big(\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' - \int_{-\infty}^{0} d\tau'\Big)e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}\eta(k,\tau') \\
&= \phi_0 e^{-(k^2+m^2)\tau}\Big(\int_{-\infty}^{0} d\tau' + \int_{0}^{\tau} d\tau' - \int_{-\infty}^{0} d\tau'\Big)e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}\eta(k,\tau') \\
&= \phi_0 e^{-(k^2+m^2)\tau} + \int_{0}^{\tau} d\tau' e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}\eta(k,\tau')
\end{aligned}
$$

下から 4 行目では $\theta(\tau-\tau')$ のために、τ' は $-\infty$ から τ までしか取れないので積分の上限を τ にしています。

$\phi(k,\tau)$ が求まったので、統計平均 $\langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta$ を計算します。$\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)$ は

$$
\begin{aligned}
&\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2) \\
&\quad= \Big(\phi_0 e^{-(k_1^2+m^2)\tau_1} + \int_0^{\tau_1} d\tau_1' e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')}\eta(k_1,\tau_1')\Big) \\
&\qquad\times\Big(\phi_0 e^{-(k_2^2+m^2)\tau_2} + \int_0^{\tau_2} d\tau_2' e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_2')}\eta(k_2,\tau_2')\Big) \\
&\quad= \phi_0^2 e^{-(k_1^2+m^2)\tau_1}e^{-(k_2^2+m^2)\tau_2} \\
&\qquad+ \phi_0 e^{-(k_2^2+m^2)\tau_2}\int_0^{\tau_1} d\tau_1' e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')}\eta(k_1,\tau_1') \\
&\qquad+ \phi_0 e^{-(k_1^2+m^2)\tau_1}\int_0^{\tau_2} d\tau_2' e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_2')}\eta(k_2,\tau_2') \\
&\qquad+ \int_0^{\tau_1} d\tau_1' \int_0^{\tau_2} d\tau_2' e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')}e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_2')}\eta(k_1,\tau_1')\eta(k_2,\tau_2')
\end{aligned}
$$

これの η による統計平均を取ります。統計平均の計算に引っかかるのは η だけなので、(7) から η を 1 個しか含まない項は統計平均を取ると消えます。そして、(7) をフーリエ変換すると

$$\langle\eta(x,\tau)\eta(x',\tau')\rangle_\eta = 2\delta(\tau'-\tau)\delta^4(x-x')$$

$$\int d^4xd^4x'e^{ikx}e^{ik'x'}\langle\eta(x,\tau)\eta(x',\tau')\rangle_\eta = 2\int d^4xd^4x'e^{ikx}e^{ik'x'}\delta(\tau'-\tau)\delta^4(x-x')$$

$$\langle\int d^4xd^4x'e^{ikx}e^{ik'x'}\eta(k,\tau)\eta(k',\tau')\rangle_\eta = 2\int d^4xe^{ikx}e^{ik'x}\delta(\tau-\tau')$$

$$\langle\eta(k,\tau)\eta(k',\tau')\rangle_\eta = 2(2\pi)^4\delta(k+k')\delta(\tau-\tau')$$

となるので、これを使って

$$\begin{aligned}
&\langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta \\
&\quad= \phi_0^2e^{-(k_1^2+m^2)\tau_1}e^{-(k_2^2+m^2)\tau_2} \\
&\qquad+\int_0^{\tau_1}d\tau_1'\int_0^{\tau_2}d\tau_2'e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')}e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_2')}\langle\eta(k_1,\tau_1')\eta(k_2,\tau_2')\rangle_\eta \\
&\quad= \phi_0^2e^{-(k_1^2+m^2)\tau_1}e^{-(k_2^2+m^2)\tau_2} \\
&\qquad+2(2\pi)^4\int_0^{\tau_1}d\tau_1'\int_0^{\tau_2}d\tau_2'e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')}e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_2')}\delta(k_1+k_2)\delta(\tau_1'-\tau_2') \\
&\quad= \phi_0^2e^{-(k_1^2+m^2)\tau_1}e^{-(k_2^2+m^2)\tau_2} \\
&\qquad+2(2\pi)^4\delta(k_1+k_2)\int_0^{\min(\tau_1,\tau_2)}d\tau'e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau')}e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau')}
\end{aligned}$$

最後の $\min(\tau_1,\tau_2)$ は τ_1 か τ_2 の小さい方の値を使うという意味です。τ_1' は 0 から τ_1 まで、τ_2' は 0 から τ_2 までになっていて、この範囲内でデルタ関数 $\delta(\tau_1'-\tau_2')$ での $\tau_1'-\tau_2'=0$ を満たす必要があります。なので、$\tau_1>\tau_2$ なら τ_2' で積分するとき τ_1' は最大で τ_2 まで取れて ($\tau_1>\tau_2$ から $\tau_2'=\tau_2$ の $\tau_1'-\tau_2=0$ での $\tau_1'=\tau_2$ が最大)、$\tau_1<\tau_2$ なら τ_1' は最大で τ_1 まで取れます ($\tau_1<\tau_2$ から $\tau_2'=\tau_1$ の $\tau_1'-\tau_1=0$ での $\tau_1'=\tau_1$ が最大)。よって、どちらの場合にも対応できるように $\min(\tau_1,\tau_2)$ と書いています。

これの第二項の積分は実行できます。デルタ関数がいるので、$k_1=-k_2$ としてしまい

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\min(\tau_1,\tau_2)}d\tau'e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')}e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_2-\tau')} \\
&\quad= \int_0^{\min(\tau_1,\tau_2)}d\tau'e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1+\tau_2)}e^{2(k_1^2+m^2)\tau'} \\
&\quad= e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1+\tau_2)}\frac{1}{2(k_1^2+m^2)}\big[e^{2(k_1^2+m^2)\tau'}\big]_0^{\min(\tau_1,\tau_2)} \\
&\quad= \frac{1}{2(k_1^2+m^2)}e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1+\tau_2)}\big(\exp\big[2(k_1^2+m^2)\tau\big|_{\min(\tau_1,\tau_2)}\big]-1\big) \\
&\quad= \frac{1}{2(k_1^2+m^2)}\big(\exp\big[-(k_1^2+m^2)(\tau_1+\tau_2-2\tau)\big|_{\min(\tau_1,\tau_2)}\big]-e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1+\tau_2)}\big)
\end{aligned}$$

min の部分 $(\tau_1+\tau_2-2\tau')\big|_{\min(\tau_1,\tau_2)}$ は

$$\tau_1+\tau_2-2\tau_1=-\tau_1+\tau_2=-(\tau_1-\tau_2)\quad(\tau_1<\tau_2)$$

$$\tau_1+\tau_2-2\tau_2=\tau_1-\tau_2\quad(\tau_1>\tau_2)$$

から

$$(\tau_1+\tau_2-2\tau')\big|_{\min(\tau_1,\tau_2)}=|\tau_1-\tau_2|$$

となるので

$$\begin{aligned}
&2(2\pi)^4\delta(k_1+k_2)\int_0^{\min(\tau_1,\tau_2)}d\tau' e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')}e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_2-\tau')}\\
&=(2\pi)^4\delta(k_1+k_2)\frac{1}{k_1^2+m^2}\big(e^{-(k_1^2+m^2)|\tau_1-\tau_2|}-e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1+\tau_2)}\big)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta=&\ \phi_0^2e^{-(k_1^2+m^2)\tau_1}e^{-(k_2^2+m^2)\tau_2}\\
&+(2\pi)^4\delta(k_1+k_2)\frac{1}{k_1^2+m^2}\big(e^{-(k_1^2+m^2)|\tau_1-\tau_2|}-e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1+\tau_2)}\big)
\end{aligned}\tag{8}$$

となります。

これで 2 点関数が求まりました。後は仮想的な時間を無限大にしたときに、通常の 2 点関数になるかです。そのために、$\tau=\tau_1=\tau_2$ として、τ を無限大にします。そうすると

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\infty}\langle\phi(k_1,\tau)\phi(k_2,\tau)\rangle_\eta=&\lim_{\tau\to\infty}\big(\phi_0^2e^{-(k_1^2+m^2)\tau}e^{-(k_2^2+m^2)\tau}\\
&\qquad+(2\pi)^4\delta(k_1+k_2)\frac{1}{k_1^2+m^2}\big(e^{-(k_1^2+m^2)|\tau-\tau|}-e^{-(k_1^2+m^2)(\tau+\tau)}\big)\big)\\
=&\ (2\pi)^4\delta(k_1+k_2)\frac{1}{k_1^2+m^2}
\end{aligned}$$

これはユークリッド空間でのクライン・ゴルドン方程式の 2 点関数です。なので

$$\lim_{\tau\to\infty}\langle\phi(k_1,\tau)\phi(k_2,\tau)\rangle_\eta=\langle\phi(k_1)\phi(k_2)\rangle$$

を満たしています。

$\langle\phi(x_1,\tau_1)\phi(x_2,\tau_2)\rangle_\eta$ も求めてみます。そのために τ もフーリエ変換します。τ を普通の時間と同じように

$$\phi(x,\tau)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\phi(k,\omega)e^{-ikx}e^{-i\omega\tau}\ ,\ \eta(x,\tau)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\eta(k,\omega)e^{-ikx}e^{-i\omega\tau}$$

と変換します。そうすると η の統計平均は

$$\begin{aligned}
\langle \eta(k,\tau)\eta(k',\tau')\rangle_\eta &= 2(2\pi)^4\delta^4(k+k')\delta(\tau-\tau') \\
\int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\tau' e^{i\omega\tau}e^{i\omega'\tau'}\langle \eta(k,\tau)\eta(k',\tau')\rangle_\eta &= 2(2\pi)^4\delta^4(k+k')\int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\tau'\delta(\tau-\tau')e^{i\omega\tau}e^{i\omega'\tau'} \\
\langle \eta(k,\omega)\eta(k',\omega')\rangle_\eta &= 2(2\pi)^4\delta^4(k+k')\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega+\omega')\tau} \\
\langle \eta(k,\omega)\eta(k',\omega')\rangle_\eta &= 2(2\pi)^5\delta^4(k+k')\delta(\omega+\omega')
\end{aligned}$$

このフーリエ変換から $\phi(k,\omega)$ のランジュバン方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}\int\frac{d^4kd\omega}{(2\pi)^5}\phi(k,\omega)e^{-ikx}e^{-i\omega\tau} &= (\Box-m^2)\int\frac{d^4kd\omega}{(2\pi)^5}\phi(k,\omega)e^{-ikx}e^{-i\omega\tau}+\int\frac{d^4kd\omega}{(2\pi)^5}\eta(k,\omega)e^{-ikx}e^{-i\omega\tau} \\
\int\frac{d^4kd\omega}{(2\pi)^5}(-i\omega)\phi(k,\omega)e^{-ikx}e^{-i\omega\tau} &= \int\frac{d^4kd\omega}{(2\pi)^5}(-k^2-m^2)\phi(k,\omega)e^{-ikx}e^{-i\omega\tau}+\int\frac{d^4kd\omega}{(2\pi)^5}\eta(k,\omega)e^{-ikx}e^{-i\omega\tau} \\
i\omega\phi(k,\omega) &= (k^2+m^2)\phi(k,\omega)+\eta(k,\omega) \\
(-i\omega+k^2+m^2)\phi(k,\omega) &= \eta(k,\omega)
\end{aligned}$$

このときのグリーン関数 $G(k,\omega)$ の式は

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial\tau}+k^2+m^2)G(k,\tau) &= \delta(\tau) \\
(\frac{\partial}{\partial\tau}+k^2+m^2)\int\frac{d\omega}{2\pi}G(k,\omega)e^{-i\omega\tau} &= \int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega\tau} \\
\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega\tau}(-i\omega+k^2+m^2)G(k,\omega) &= \int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega\tau} \\
(-i\omega+k^2+m^2)G(k,\omega) &= 1
\end{aligned}$$

となるので

$$G(k,\omega)=\frac{1}{-i\omega+k^2+m^2}$$

これを使って $\phi(k,\omega)$ は

$$\phi(k,\omega)=\frac{\eta(k,\omega)}{-i\omega+k^2+m^2}$$

ここから ω を τ に戻せば

$$
\begin{aligned}
\phi(k,\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\phi(k,\tau)e^{-i\omega\tau} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{\eta(k,\omega)}{-i\omega+k^2+m^2}e^{-i\omega\tau} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\frac{\eta(k,\tau')}{-i\omega+k^2+m^2}e^{-i\omega(\tau-\tau')} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\ \eta(k,\tau')\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{-i\omega+k^2+m^2}e^{-i\omega(\tau-\tau')}
\end{aligned}
$$

ω 積分部分は

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{-i\omega+k^2+m^2}e^{-i\omega(\tau-\tau')} &= \int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{-i(\omega+i(k^2+m^2))}e^{-i\omega(\tau-\tau')} \\
&= i\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{\omega+i(k^2+m^2)}e^{-i\omega(\tau-\tau')}
\end{aligned}
$$

と変形すればはっきりするように、$\tau>\tau'$ のときにジョルダンの補題から下半円の積分経路を付け足すことができ、その経路内に極を含みます。なので、$\omega=-i(k^2+m^2)$ で極を持つことから、留数定理を使って (反時計周りを正)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{-i\omega+k^2+m^2}e^{-i\omega(\tau-\tau')} &= i\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{\omega+i(k^2+m^2)}e^{-i\omega(\tau-\tau')} \\
&= i(-2\pi i)\exp\big[-i(-i(k^2+m^2))(\tau-\tau')\big] \\
&= 2\pi e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}\qquad(\tau>\tau')
\end{aligned}
$$

よって、$\tau>\tau'$ から τ' の積分の上限を τ にして

$$
\phi(k,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}d\tau'\ \eta(k,\tau')e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}
$$

見て分かるように τ を $-\infty$ にしたとき、$\phi(k,\tau)$ が 0 になります。このため、$\tau\to-\infty$ での $\exp[-(k^2+m^2)\tau]$ 部分による発散が起きないようになっています。これは $\phi(k,\tau)$ に

$$
\lim_{\tau\to-\infty}\phi(k,\tau)=0
$$

という条件が付いていることになり、そのまま $\phi(k,\tau)$ の初期条件になります。この場合での $\langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta$ は

$$
\begin{aligned}
&\langle\phi(k_1,\tau_1)\phi(k_2,\tau_2)\rangle_\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_1' \int_{-\infty}^{\tau_2} d\tau_2' e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')} e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_2')} \langle\eta(k_1,\tau_1)\eta(k_2,\tau_2)\rangle_\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_1' \int_{-\infty}^{\tau_2} d\tau_2' e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')} e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_2')} \langle\eta(k_1,\tau_1)\eta(k_2,\tau_2)\rangle_\eta \\
&= 2(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2) \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_1' \int_{-\infty}^{\tau_2} d\tau_2' e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')} e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_2')} \delta(\tau_1-\tau_2) \\
&= 2(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2) \int_{-\infty}^{\min(\tau_1,\tau_2)} d\tau_1' \ e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')} e^{-(k_2^2+m^2)(\tau_2-\tau_1')} \\
&= 2(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2) \int_{-\infty}^{\min(\tau_1,\tau_2)} d\tau_1' \ e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_1')} e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_2-\tau_1')} \\
&= 2(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2) \int_{-\infty}^{\min(\tau_1,\tau_2)} d\tau_1' \ \exp\big[-(k_1^2+m^2)(\tau_1+\tau_2-2\tau_1')\big] \\
&= (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2) \frac{1}{k_1^2+m^2} \exp\big[-(k_1^2+m^2)|\tau_1-\tau_2|\big]
\end{aligned}
$$

この結果は $\exp[-(k^2+m^2)\tau]$ が $\tau=-\infty$ のときに出てこないように初期条件を入れたことから求まっているので、(8) の結果で $\exp[-(k^2+m^2)\tau]$ が出てこないものになっています。

$\langle\phi(k_1,\omega_1)\phi(k_2,\omega_2)\rangle_\eta$ のフーリエ変換から $\langle\phi(x_1,\tau_1)\phi(x_2,\tau_2)\rangle_\eta$ を求めると

$$
\begin{aligned}
&\langle\phi(x_1,\tau_1)\phi(x_2,\tau_2)\rangle_\eta \\
&\quad= \int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \int \frac{d^4k_2 d\omega_2}{(2\pi)^5} \langle\phi(k_1,\omega_1)\phi(k_2,\omega_2)\rangle_\eta e^{-ik_1x_1} e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-ik_2x_2} e^{-i\omega_2\tau_2} \\
&\quad= \int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \int \frac{d^4k_2 d\omega_2}{(2\pi)^5} \langle \frac{\eta(k_1,\omega_1)}{-i\omega_1 + k_1^2 + m^2} \frac{\eta(k_2,\omega_2)}{-i\omega_2 + k_2^2 + m^2} \rangle_\eta e^{-ik_1x_1} e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-ik_2x_2} e^{-i\omega_2\tau_2} \\
&\quad= \int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \int \frac{d^4k_2 d\omega_2}{(2\pi)^5} \frac{1}{-i\omega_1 + k_1^2 + m^2} \frac{1}{-i\omega_2 + k_2^2 + m^2} \\
&\qquad \times \langle\eta(k_1,\omega_1)\eta(k_2,\omega_2)\rangle_\eta e^{-ik_1x_1} e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-ik_2x_2} e^{-i\omega_2\tau_2} \\
&\quad= 2(2\pi)^5 \int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \int \frac{d^4k_2 d\omega_2}{(2\pi)^5} \\
&\qquad \times \frac{1}{-i\omega_1 + k_1^2 + m^2} \frac{1}{-i\omega_2 + k_2^2 + m^2} e^{-ik_1x_1} e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-ik_2x_2} e^{-i\omega_2\tau_2} \delta^4(k_1+k_2)\delta(\omega_1+\omega_2) \\
&\quad= 2\int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \frac{1}{-i\omega_1 + k_1^2 + m^2} \frac{1}{i\omega_1 + k_1^2 + m^2} e^{-ik_1x_1} e^{-i\omega_1\tau_1} e^{ik_1x_2} e^{i\omega_1\tau_2} \\
&\quad= 2\int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \frac{1}{-i\omega_1 + k_1^2 + m^2} \frac{1}{i\omega_1 + k_1^2 + m^2} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-i\omega_1(\tau_1-\tau_2)} \\
&\quad= 2\int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \frac{1}{-i\omega_1 + k_1^2 + m^2} \frac{1}{i\omega_1 + k_1^2 + m^2} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-i\omega_1(\tau_1-\tau_2)} \\
&\quad= 2\int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \frac{i}{\omega_1 + i(k_1^2 + m^2)} \frac{-i}{\omega_1 - i(k_1^2 + m^2)} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-i\omega_1(\tau_1-\tau_2)}
\end{aligned}
$$

このとき $\tau_1 > \tau_2$ とすれば、下半円をつければいいことから

$$
\begin{aligned}
\langle\phi(x_1,\tau_1)\phi(x_2,\tau_2)\rangle_\eta &= 2\int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \frac{1}{\omega_1 + i(k_1^2 + m^2)} \frac{1}{\omega_1 - i(k_1^2 + m^2)} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-i\omega_1|\tau_1-\tau_2|} \\
&= 2\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^5} \frac{-2\pi i}{-i(k_1^2 + m^2) - i(k_1^2 + m^2)} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-i(-i(k_1^2+m^2))|\tau_1-\tau_2|} \\
&= 2\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^5} \frac{\pi}{k_1^2 + m^2} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-(k_1^2+m^2)|\tau_1-\tau_2|} \\
&= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2 + m^2} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-(k_1^2+m^2)|\tau_1-\tau_2|}
\end{aligned}
$$

$\tau_1 < \tau_2$ では上半円をつけることになって

$$
\begin{aligned}
\langle\phi(x_1,\tau_1)\phi(x_2,\tau_2)\rangle_\eta &= 2\int \frac{d^4k_1 d\omega_1}{(2\pi)^5} \frac{1}{\omega_1 + i(k_1^2 + m^2)} \frac{1}{\omega_1 - i(k_1^2 + m^2)} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{i\omega_1|\tau_1-\tau_2|} \\
&= 2\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^5} \frac{2\pi i}{2i(k_1^2 + m^2)} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-(k_1^2+m^2)|\tau_1-\tau_2|} \\
&= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_1^2 + m^2} e^{-ik_1(x_1-x_2)} e^{-(k_1^2+m^2)|\tau_1-\tau_2|}
\end{aligned}
$$

というわけで、どちらも同じ結果になるので

$$\langle\phi(x_1,\tau_1)\phi(x_2,\tau_2)\rangle_\eta=\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_1^2+m^2}e^{-ik_1(x_1-x_2)}e^{-(k_1^2+m^2)|\tau_1-\tau_2|}$$

これの $\tau_1=\tau_2$ で通常の 2 点関数になります。よって

$$\lim_{\tau\to\infty}\langle\phi(x_1,\tau)\phi(x_2,\tau)\rangle_\eta=\langle\phi(x_1,\tau)\phi(x_2,\tau)\rangle$$

を満たします。

ここではユークリッド空間で行いましたが、ミンコフスキー空間で行うこともできます。これは対応関係が

$$\exp[-\frac{V(v)}{B}]\ \Leftrightarrow\ \exp[iS]$$

になることから、ランジュバン方程式を

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(x,\tau)&=i\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}|_{\phi(x)=\phi(x,\tau)}+\eta(x,\tau)\\&=i(-\partial_\mu\partial^\mu-m^2+i\epsilon)\phi(x,\tau)+\eta(x,\tau)\end{aligned}$$

と変更するだけです (S,x_μ,∂_μ はミンコフスキー空間のもの)。ミンコフスキー空間なので収束因子の $i\epsilon$ を付けています。この場合も熱平衡極限でミンコフスキー空間の 2 点関数を再現出来ます ($i\epsilon$ はそのためにも必要)。第一項に虚数がいるために場は複素数になるので (η は実数のままにしている)、実部 $\mathrm{Re}\phi$ と虚部 $\mathrm{Im}\phi$ による 2 つの方程式になります。

ユークリッド空間と異なるのは、このランジュバン方程式からフォッカー・プランク方程式の熱平衡極限の確率分布 W_{eq} が $\exp[iS]$ の形にならないことです。結果だけを書くと (面倒な計算を行うと出てくる)、ミンコフスキー空間の場合、熱平衡極限で確率分布は

$$W_{eq}[\phi]=\exp\Big[-\epsilon\int d^4k\Big(|\phi_R(k)|^2+\big(1+\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+q^2}\big)|\phi_I(k)|^2-2\frac{\epsilon}{q}\phi_R(k)\phi_I(-k)\Big)\Big]$$

となります。k_μ は 4 元運動量、$q=k^2-m^2,\ \mathrm{Re}\phi=\phi_R,\ \mathrm{Im}\phi=\phi_I$ としています。見て分かるように、明らかに $\exp[iS]$ ではありません。しかし、これは通常のミンコフスキー空間の 2 点関数を再現できます。ユークリッド空間では $\exp[-S_E]$ となることはすぐ確かめられます (元々そうなるように作った)。

確率分布がこんなよく分からない形になっていますが、利点があります。それは確率分布が実数になっている点です。例えば、lattice シミュレーションを行うとき、ミンコフスキー空間では $\exp[iS]$ となっていて虚数が邪魔なので、ユークリッド空間に移して $\exp[-S_E]$ を使って数値計算します。しかし、今はミンコフスキー空間での n 点関数を計算するのに必要な確率分布が実数になっています。これは数値計算を行う上での利点になります。