

自発的対称性の破れ

$U(1)$ のゲージ不変性を維持したままゲージ場に質量を与えるヒッグス機構について見ていきます。
ここでの話は古典場の段階です。

ゲージ場の質量項があるとゲージ不変性はなくなるため、不変性と質量項は両立できません。しかし、質量を持つゲージ場 (ベクトル場) が必要になるので、ゲージ不変性を維持したまま質量を持たせる必要性が出てきます (「電弱相互作用」参照)。最初は簡単な場合を用いてどうするのかを見ていき、最後に $U(1)$ のゲージ場 (可換なゲージ場) を見ます。また、ここでの話が重要になってくるのは非可換ゲージ場での場合ですが、ここでは触れません。

古典的な実数スカラー場での ϕ^4 理論のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)$$

これは変換 $\phi \rightarrow -\phi$ に対して対称 (不変) です。ここでの m を質量と考えずに適当なパラメータと思ってしまい、ポテンシャルを

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))^2 - V_0(\phi), \quad V_0(\phi) = +\frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)$$

このときのポテンシャルは図 1 の左側です。ここで、 $m^2 \rightarrow -\mu^2 (\mu^2 > 0)$ と変えて

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (1)$$

第 2 項は符号が逆なので質量項にはなれません。なので、このラグランジアンは質量 0 のスカラー場が相互作用しているものになっています。そして、これも $\phi \rightarrow -\phi$ で対称です。第 2 項と第 4 項でポテンシャルとして

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi), \quad V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

まず知りたいのはポテンシャル $V(\phi)$ の形がどうなっているのかです。このポテンシャルの最小値は

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = -\mu^2\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = 0$$

このときの ϕ は $\phi = 0$ と

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \frac{6}{\lambda}\mu^2 \\ \phi &= \pm \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu \\ &= \pm v \end{aligned}$$

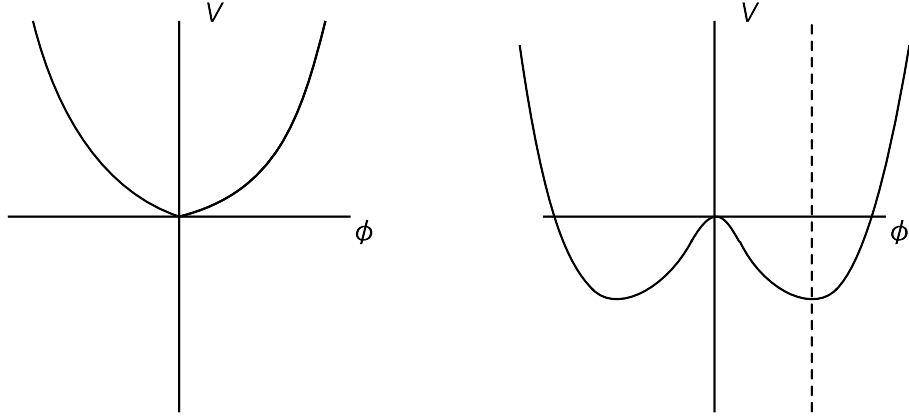


図 1: ポテンシャルの形

となる 3 つの地点で極値を持ち、図 1 の右側です。ワインボトル型やメキシカンハット型と呼ばれます。 $-\mu^2$ でも $\phi = 0$ で極値を持っていますが最小値なのは $\pm v$ の地点です。ちなみに、 $+m^2$ では極値として $\phi = 0$ しかもなく、そこが最小値です。

これによって何がどうなるのか見るために、このポテンシャルの底周りで考えます。どちらも同じなので $+v$ だけ使います。最小値 v 周りとするために

$$\phi(x) = v + \sigma(x)$$

これを (1) のラグランジアンに入れば

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(v + \sigma(x)))^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v + \sigma(x))^2 - \frac{\lambda}{4!}(v + \sigma(x))^4 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v^2 + \sigma^2 + 2v\sigma) - \frac{\lambda}{4!}(v^4 + 6v^2\sigma^2 + \sigma^4 + 4v\sigma^3 + 4v^3\sigma) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v^2 + \sigma^2 + 2v\sigma) - \frac{\lambda}{4!}\left(\left(\frac{6}{\lambda}\right)^2\mu^4 + 6\frac{6}{\lambda}\mu^2\sigma^2 + \sigma^4 + 4\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu\sigma^3 + 4\frac{6}{\lambda}\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu^3\sigma\right) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2 + 2\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu\sigma) - \frac{\lambda}{4!}\left(\frac{36}{\lambda}\mu^2\sigma^2 + \sigma^4 + 4\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu\sigma^3 + 4\frac{6}{\lambda}\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu^3\sigma\right) + const \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2 + \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu^3\sigma - \left(\frac{36}{24}\mu^2\sigma^2 + \frac{\lambda}{24}\sigma^4 + \frac{\lambda}{6}\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu\sigma^3 + \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu^3\sigma\right) + const \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \mu^2\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4 + const\end{aligned}$$

スカラー場のラグランジアンにさらに似させるなら

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{24}\sigma^4 + const$$

$const$ は v のみの項で、オイラー・ラグランジュ方程式には寄与しない項です。 σ^3 以上の項は相互作用項です。第 2 項が質量項になっています (場 σ の 2 乗があり符号がマイナス)。つまり、最小値周りで質量を持つスカラー場が現れます。そして、このラグランジアンは $\phi(x) = v + \sigma(x)$ としたただけなので、もとのラグランジアンと物理的に同等です。

このように、質量のないスカラー場から何かを加えなくても質量 $\sqrt{2\mu^2}$ を持つ σ が現れます。一方で、このラグランジアンはもとのラグランジアンでの場の変換 $\phi \rightarrow -\phi$ (ここでは $\sigma \rightarrow -\sigma$) に対する対称性がなくなっています (図1の右側の点線が中心になるため。 $v + \sigma$ から $v - \sigma$ になり、 $V(v + \sigma) \neq V(v - \sigma)$)。このように元々持っていた対称性がなくなる (見えなくなる) ことを、自発的対称性の破れ (spontaneous symmetry breaking) と呼び、それによって質量が生成されます。自発的対称性の破れは超伝導でのマイスナー効果に対する発想から始まっていて、ここでの話はそれの相対論的な場合です。

もう少し単純に今の話を言っておきます。分かりやすくするために場でなく、 $U(x) = x^2$ とします。この最小値は $x = 0$ の地点で、ここを中心に左右対称です。左右対称なので x を $-x$ にしても $U(x)$ は変更されません。ここで大事なのは、 $x = 0$ を中心に左右対称だという点です。つまり、 $x = 0$ でない地点を中心にしたら左右対称ではないです。

このことは原点をずらせばいいだけで、原点を x 軸方向に a だけ動かしたとき

$$U(x) = (x + a)^2$$

となります。これは明らかに x を $-x$ にしたら不変になりません。このように、ポテンシャルの形は変わっていないのに、見方を変えることで元々あった不変性が見えなくなります。これが上で話した話です。

しかし、この状況では $x = 0$ 以外の点で左右対称でなくなっているので特別な地点がありません。それを変更するために、ポテンシャルを (1) の形にすることで最小値となる地点で対称性が見えなくなると言えるようになります。

今見てきたポテンシャルの最小値は、量子論的に考えれば基底状態の値なので真空期待値によって

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \langle \phi \rangle_0 = \pm v$$

これは真空期待値が 0 にならないことを表します (下の補足 1 も参照)。これは真空の定義をしなおしたと言えます。このとき重要なのは、 $\pm v$ に対応する真空は

$$\langle 0_+ | \phi | 0_+ \rangle = v, \quad \langle 0_- | \phi | 0_- \rangle = -v$$

というように異なった真空として与えられる点です (真空が縮退している)。 $|0_+\rangle$ と $|0_-\rangle$ は直交させます ($\langle 0_- | 0_+ \rangle = 0$)。特に、演算子としての ϕ の変換を $Z^{-1} \phi Z = -\phi$ としたとき

$$\langle 0_+ | Z^{-1} \phi Z | 0_+ \rangle = -\langle 0_+ | \phi | 0_+ \rangle = -v \neq \langle 0_+ | \phi | 0_+ \rangle$$

もしくは、 Z は片方の最小値の位置をもう片方にする変換の生成子なので $Z|0_+\rangle = |0_-\rangle$ となることから

$$\langle 0_+ | Z^{-1} \phi Z | 0_+ \rangle = \langle 0_- | \phi | 0_- \rangle = -v$$

これが重要で (Z はユニタリー演算子)、この真空期待値 $\langle 0_+ | \phi | 0_+ \rangle$ はラグランジアンが持っている $\phi \rightarrow -\phi$ の対称性を持っていません。

$\phi(x) = v + \sigma(x)$ は最小値の v を真空期待値とし、ここからのズレ (ゆらぎ) を摂動的 (基底状態を基準に考える) に加えたものとも言えます。基底状態の値 v に足しているのが、 $\sigma(x)$ は古典的な量から励起した状態への変化を表す物理的な場、もしくは量子効果による揺らぎと見れます (ようはただの実数スカラー場による準古典近似)。ちなみに、 $\langle \phi \rangle_0 = v$ の真空に対しては、演算子化したときの $\sigma(x)$ の真空期待値は 0 です。

このような基底状態で対称性が破れる例はよくあり、例えば強磁性体なんかがそうになっています。これは高温ではスピンの任意の方向を向いているために回転対称性を持ちますが、基底状態ではスピンの方向が揃ってしまうために回転対称性がなくなるというものです。ただし、スピンの方向が異なっている基底状態へは回転によっていけるために、見かけ上破れていると言えます。これは今見てきた話では $\pm v$ という 2 つの基底があることに対応します (言い換えれば、基底状態が縮退しており、その中から特別な状態を選んだせいで対称性が破れて見えるということ)。こういったことから破れた対称性のことを隠された対称性と表現する場合もあり、そちらのほうが確かな表現です。

磁性体の例だと分かりづらいかもしれないので、もっと直感的に分かりやすい例として使われるものを言っておきます。例えば、ボールペンのペン先を下にして机の上にながら立ってたとします。これは横から見ると 360 度同じ形をしているはずですが (細かい形状は無視)。なので、回転不変性を持っています。しかし、この状態は相当不安定です。もっと安定した状態にするためにボールペンを倒してしまいます。そうすると、この倒れた状態は安定しますが、回転不変性はなくなっています (倒れたボールペンは見る方向によって形が変わる)。これが自発的対称性の破れと同じようなものです。安定な状態が真空に対応します。このことは、状態はエネルギーの低い安定な状態へ向かっていくということからも想像しやすいものだと思います。

次に連続的な対称性である大域的位相変換の場合を見ます。不変にするためには場は複素スカラー場 $\phi(x)$ にして

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi^*(x)\phi(x) - \lambda(\phi^*(x)\phi(x))^2$$

複素平面 (ϕ_1, ϕ_2) で考えることにして、 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x))$$

と分解します (下の補足 2 で極形式での計算を示している)。 ϕ_1, ϕ_2 は実数場 ($\sqrt{2}$ がつくのは計算上の理由)。このラグランジアンは α を定数として大域的位相変換

$$\phi \Rightarrow e^{i\alpha} \phi$$

に対して不変です。最初と同じように質量をパラメータ扱いして、 $-\mu^2$ におきかえて

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) + \mu^2 \phi^*(x)\phi(x) - \lambda(\phi^*(x)\phi(x))^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) - V(\phi^* \phi) \end{aligned} \quad (2)$$

ポテンシャルの最小値の地点 ϕ_0 は

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi^* + 2\lambda \phi^*(\phi^* \phi) = 0$$

から

$$|\phi_0|^2 = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

なので

$$|\phi_0|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} = v^2$$

ϕ_1, ϕ_2 による複素平面の円上が最小値です。極形式にすれば

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} v e^{i\theta}$$

θ は複素平面の任意の角度です。

真空期待値として見るなら

$$\langle 0_\theta | \phi | 0_\theta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v e^{i\theta}$$

と選べます。つまり、今度は連続的な数である θ によって真空は区別され、 $\theta_1 \neq \theta_2$ なら $\langle 0_{\theta_1} | 0_{\theta_2} \rangle = 0$ となります (真空が無限個に縮退している)。なので、基底状態はポテンシャルの底の半径 v の円に沿って無限に存在しています。

最小値の位置を $\phi_1 = +v, \phi_2 = 0$ と選び、そこからのズレを2つの実数場 $\eta(x), \xi(x)$ として加えることで

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x) + i\xi(x))$$

$\eta(x)$ と $\xi(x)$ を物理的な場として扱います。これをラグランジアン (2) に入れて

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) + \mu^2 \phi^*(x) \phi(x) - \lambda (\phi^*(x) \phi(x))^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu (v + \eta(x) + i\xi(x))) (\partial^\mu (v + \eta(x) - i\xi(x))) \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2} (v + \eta(x) - i\xi(x)) (v + \eta(x) + i\xi(x)) - \frac{\lambda}{4} ((v + \eta(x) - i\xi(x)) (v + \eta(x) + i\xi(x)))^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{\mu^2}{2} ((v + \eta)^2 + \xi^2) - \frac{\lambda}{4} ((v + \eta)^2 + \xi^2)^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{\mu^2}{2} (v^2 + \eta^2 + 2v\eta + \xi^2) - \frac{\lambda}{4} (v^2 + \eta^2 + 2v\eta + \xi^2)^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{\mu^2}{2} (\eta^2 + 2v\eta + \xi^2) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} (6v^2\eta^2 + \eta^4 + 4v\eta^3 + 4v^3\eta + 2\xi^2(v^2 + \eta^2 + 2v\eta) + \xi^4) + const \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{\mu^2}{2} (\eta^2 + 2v\eta + \xi^2) \\
&\quad - \frac{\lambda}{4} (6\frac{\mu^2}{\lambda} \eta^2 + \eta^4 + 4v\eta^3 + 4\frac{\mu^3}{\lambda} \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \eta + 2\xi^2(\frac{\mu^2}{\lambda} + \eta^2 + 2v\eta) + \xi^4) + const \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{\mu^2}{2} (\eta^2 + 2v\eta + \xi^2) \\
&\quad - (\frac{3}{2} \mu^2 \eta^2 + \frac{\lambda}{4} \eta^4 + \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \mu \eta^3 + \mu^3 \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \eta + \frac{1}{2} \xi^2 \mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \xi^2 \eta^2 + \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \mu \eta \xi^2 + \frac{\lambda}{4} \xi^4) + const \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 - \mu^2 \eta^2 - (\frac{\lambda}{4} \eta^4 + \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \mu \eta^3 + \frac{1}{2} \lambda \xi^2 \eta^2 + \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \mu \eta \xi^2 + \frac{\lambda}{4} \xi^4) + const \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 - \frac{1}{2} (2\mu^2) \eta^2 - \frac{1}{2} \lambda \xi^2 \eta^2 - \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \mu \eta \xi^2 - \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \mu \eta^3 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\lambda}{4} \xi^4 + const
\end{aligned}$$

ここでも手で何かを加えなくても場 η は正しい符号で質量 $\sqrt{2\mu^2}$ を持ちます。場 ξ は ξ^2 のみの項がない (η と混ざった項しかない) ので質量を持ちません。つまり、質量を持つ場と質量を持たない場が作られたことになり、その質量 0 のスカラー場をゴールドストーンボソン (Goldstone boson) と呼びます。このことは、場 η による変化にはエネルギーが必要なのに対して (複素平面の動径方向へ動かすため)、場 ξ による変化はポテンシャルの底の円を動くだけなのでエネルギーが必要ないことを反映しています (基底状態の縮退)。そして、ラグランジアンから大域的位相変換の不変性もなくなっています。つまり、連続的な対称性が自発的対称性の破れを起こすとき、質量 0 のスカラー場であるゴールドストーンボソンが作られるということです。このことをゴールドストーンの定理と言います。

ついでにもう 1 つ、ワインボトル型のポテンシャルでの構造に触れておきます。 $\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$ では見てきたように、場が質量を獲得し、質量のないゴールドストーンボソンが現われます。これに対してもう 1 つの極値 $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$ となる地点では質量は $-\mu^2$ に対応します、つまり、虚数質量を持つので、これはタキオン (tachyon) です (虚数質量を持つものをタキオンと呼ぶ)。そして、ポテンシャルの形を見ると、この地点は明らかに不安定なので、タキオンは安定な真の基底へ向かって落ちていきます。

N 個の実スカラー場としても同様のことができます。ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i)^2 - \frac{1}{2} m^2 (\phi_i)^2 - \frac{\lambda}{4} ((\phi_i)^2)^2$$

これは N 個の場合 ($i = 1, 2, \dots, N$) が相互作用しているもので、添え字の i に対して和をとります。この手の形をしたラグランジアンを線形シグマモデル (linear sigma model) と言います (名前の由来は真空期待値を σ としてシグマメソンを当てたことから。「線形シグマモデル」参照)。これは ϕ_i を $N \times 1$ 行列と見れば、直交行列 R_{ij} によって

$$\phi'_i \phi'_i = (\phi'^T)_i \phi'_i = (R\phi)^T_i (R_{ij} \phi_j) = (R^T)_{ki} R_{ij} \phi_k \phi_j = \phi_k \phi_k$$

このように、 i による行列に対する不変性を持っており、直交行列を回転行列とすれば、これは連続的な変換です。ポテンシャルは

$$V(\phi_i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi_i)^2 + \frac{\lambda}{4}((\phi_i)^2)^2$$

となり、最小値は

$$(\phi_i)^2 = (\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + \dots + (\phi_N)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} = v^2$$

そうすると、最小値の地点は

$$\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, \dots, \phi_N = v$$

と選べます。後は同じ手続きを踏んでいけばよく

$$\phi_1(x) = \eta_1(x), \phi_2(x) = \eta_2(x), \dots, \phi_N(x) = v + \sigma(x)$$

として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta_j)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 + \dots \quad (j = 1, 2, \dots, N-1)$$

1 個の質量を持つ場 σ と、 $N-1$ 個の質量 0 の場 η_j が出てきます。

ここで起きたやっかいな問題は質量 0 のゴールドストーンボソンというよくわからない粒子が出てきたことです。これをどうにかしないと、いくら質量を持たせられたからと言っても理論として成立しません。なので、ゴールドストーンボソンに意味のある解釈を与えます。

本題のゲージ場について見ていきます。複素スカラー場 ϕ による $U(1)$ の局所的ゲージ変換で不変なラグランジアンを使います。 $U(1)$ のゲージ場は電磁場なので、電磁場が質量を持つのはおかしいですが、質量を持たせたいとします。局所的ゲージ変換は A_μ を電磁場として

$$\phi \Rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi, A_\mu \Rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

e は素電荷です。複素スカラー場でもディラック場と同様に成立するので、ゲージ不変なラグランジアンは

$$(D_\mu \phi(x))(D^\mu \phi(x))^* - m^2 \phi^*(x)\phi(x) - \lambda(\phi^*(x)\phi(x))^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

共変微分 D_μ と $F_{\mu\nu}$ は電磁場を A_μ として

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

これも $m^2 \rightarrow -\mu^2$ として

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (D_\mu \phi)(D^\mu \phi)^* + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= (D_\mu \phi)(D^\mu \phi)^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi^* \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

スカラー場によるポテンシャルの最小値の地点 ϕ_0 は (2) と同じなので

$$|\phi_0|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} = v^2$$

最小値周りを

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\xi(x))$$

そうすると (3) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(D_\mu(v + \eta(x) + i\xi(x)))(D^\mu(v + \eta(x) - i\xi(x))) + \frac{1}{2}\mu^2(v + \eta(x) - i\xi(x))(v + \eta(x) + i\xi(x)) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4}\left((v + \eta(x) - i\xi(x))(v + \eta(x) + i\xi(x))\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}((\partial_\mu + ieA_\mu)(v + \eta(x) + i\xi(x)))(\partial^\mu - ieA^\mu)(v + \eta(x) - i\xi(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2 - \frac{1}{2}\lambda\xi^2\eta^2 - \lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\mu\eta\xi^2 - \lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\mu\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 - \frac{\lambda}{4}\xi^4 + const \end{aligned}$$

第 2 項は

$$\begin{aligned}
& (\partial_\mu(\eta + i\xi) + ieA_\mu(v + \eta + i\xi))(\partial^\mu(\eta - i\xi) - ieA^\mu(v + \eta - i\xi)) \\
&= \partial_\mu(\eta + i\xi)\partial^\mu(\eta - i\xi) - ieA^\mu(v + \eta - i\xi)\partial_\mu(\eta + i\xi) \\
&\quad + ieA_\mu(v + \eta + i\xi)\partial^\mu(\eta - i\xi) + e^2A_\mu A^\mu((v + \eta)^2 + \xi^2) \\
&= \partial_\mu(\eta + i\xi)\partial^\mu(\eta - i\xi) - ieA^\mu(v + \eta - i\xi)(\partial_\mu\eta + i\partial_\mu\xi) \\
&\quad + ieA_\mu(v + \eta + i\xi)(\partial^\mu\eta - i\partial^\mu\xi) + e^2A_\mu A^\mu((v + \eta)^2 + \xi^2) \\
&= \partial_\mu(\eta + i\xi)\partial^\mu(\eta - i\xi) - ieA^\mu(v\partial_\mu\eta + \eta\partial_\mu\eta - i\xi\partial_\mu\eta + iv\partial_\mu\xi + i\eta\partial_\mu\xi + \xi\partial_\mu\xi) \\
&\quad + ieA_\mu(v\partial^\mu\eta + \eta\partial^\mu\eta + i\xi\partial^\mu\eta - iv\partial^\mu\xi - i\eta\partial^\mu\xi + \xi\partial^\mu\xi) + e^2A_\mu A^\mu((v + \eta)^2 + \xi^2) \\
&= \partial_\mu(\eta + i\xi)\partial^\mu(\eta - i\xi) + 2eA^\mu(v + \eta)\partial_\mu\xi + e^2A_\mu A^\mu((v + \eta)^2 + \xi^2) \\
&= (\partial_\mu\eta)^2 + (\partial_\mu\xi)^2 + 2eA^\mu(v + \eta)\partial_\mu\xi + e^2A_\mu A^\mu((v + \eta)^2 + \xi^2)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 + eA^\mu(v + \eta)\partial_\mu\xi + \frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu((v + \eta)^2 + \xi^2) \\
&\quad - \frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2 - \frac{1}{2}\lambda\xi^2\eta^2 - \lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\mu\eta\xi^2 - \lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\mu\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 - \frac{\lambda}{4}\xi^4 + const \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 + 2e\left(\frac{\mu^2}{\lambda} + \eta\right)A^\mu\partial_\mu\xi + \frac{1}{2}e^2\left(\frac{\mu^2}{\lambda} + \eta^2 + 2\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\eta + \xi^2\right)A_\mu A^\mu \\
&\quad - \frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2 - \frac{1}{2}\lambda\xi^2\eta^2 - \lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\mu\eta\xi^2 - \lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\mu\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 - \frac{\lambda}{4}\xi^4 + const
\end{aligned} \tag{4}$$

質量項は

$$\frac{1}{2}\frac{e^2\mu^2}{\lambda}A_\mu A^\mu, \quad -\frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2$$

このため、電磁場 A_μ 、スカラー場 η が質量を持ち、 ξ は質量を持たなく、

$$m_A = ev = e\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad m_\eta = \sqrt{2\mu^2}, \quad m_\xi = 0$$

A_μ が質量を持てましたが、ここでも質量 0 のスカラー粒子であるゴールドストーンボソンが出てきています。現在考えられている質量 0 の粒子は、ニュートリノも質量 0 とすれば、スピン 1/2 のニュートリノ、スピン 1 の光子とグルーオン、スピン 2 の重力子です。なので、スピン 0 の質量 0 粒子は理論の中でも考えられてなく、観測もされていません。なので、今求められたラグランジアン (4) に現われている全ての場が本当に物理的に意味があるのかということになります。

最小値周りの $\phi(x)$ は

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi)$$

$\eta, \xi \ll v$ としているので、 ξ の最低次で

$$\phi \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)(1 + i\frac{\xi}{v}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v}$$

$\exp$ 内にしか ξ がなく、もとのラグランジアンはゲージ不変性を持っているので、 ξ を消すように局所的ゲージ変換を行えます。実際に、変換によって

$$\phi \Rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{-i\xi/v}e^{i\xi/v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta) \quad (\alpha(x) = -\frac{\xi(x)}{v})$$

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\xi(x)$$

となり、 ξ は除去されます。そうすると (3) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}((\partial_\mu + ieA_\mu)(v + \eta)(\partial^\mu - ieA^\mu)(v + \eta)) + \frac{1}{2}\mu^2(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta + ieA_\mu(v + \eta))(\partial^\mu\eta - ieA^\mu(v + \eta)) + \frac{1}{2}\mu^2(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}e^2(v + \eta)^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\mu^2(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}e^2(v^2 + \eta^2 + 2v\eta)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\mu^2(v^2 + \eta^2 + 2v\eta) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4}(v^4 + \eta^4 + 6v^2\eta^2 + 4v\eta^3 + 4v^3\eta) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}e^2(v^2 + \eta^2 + 2v\eta)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\mu^2v^2 + \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \mu^2v\eta \\ &\quad - \frac{\lambda}{4}(v^4 + \eta^4 + 6v^2\eta^2 + 4v\eta^3 + 4v^3\eta) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}e^2(v^2 + \eta^2 + 2v\eta)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \mu^2v\eta \\ &\quad - \frac{\lambda}{4}\eta^4 - \frac{3\lambda}{2}v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \lambda v^3\eta - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + const \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}e^2(v^2 + \eta^2 + 2v\eta)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \mu^2\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\eta \\ &\quad - \frac{\lambda}{4}\eta^4 - \frac{3\mu^2}{2}\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \mu^2\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}\eta - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + const \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}e^2(v^2 + \eta^2 + 2v\eta)A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + const \end{aligned}$$

このようにゴールドストーンボソンはいなくなり、 A_μ と η の質量は m_A, m_η のままです。

ゴールドストーンボソンはゲージ変換によって消せるので、物理的に意味のある場ではないことになります。しかし、何の影響も残さずに消えるというわけではないです。自由度を考えると、最初は複素スカラー場による2つの質量を持ったスカラー粒子と、質量0の光子がいたので、自由度は $2 + 2 = 4$ です(光子は偏極の自由度2を持つ)。そこから出来上がったのは、質量を持ったスカラー粒子が1つと、質量を持った光子なので、自由度は $1 + 3 = 4$ (質量のある光子は縦波の自由度も持てるので3)となり、自由度の数はあっています。このことから、ゴールドストーンボソンの自由度を光子が食べて(eat)、縦偏極の自由度を得て質量を作り出していると言えます。このようにして、ゲージ場(ベクトル場)が質量を得る仕組みのことをヒッグス機構(Higgs mechanism)と呼びます。

ヒッグス機構における質量を持つスカラー場 η 、もしくは ϕ をヒッグス場と呼びます。ただし、実際の粒子としてのヒッグス粒子に対応するのは、 $U(1)$ でなく $SU(2)$ でのスカラー場です(「電弱相互作用」参照)。ヒッグス粒子が本当に存在するかどうかは素粒子物理の問題でしたが、2012年にLHCの実験で質量が約126[GeV]の新しい粒子が見つかり、それが予想されていたヒッグス粒子でした。

ちなみに、自発的対称性の破れにも種類があり、1つは今見てきたヒッグス場(秩序パラメーター(order parameter)となるもの)をラグランジアンに入れることで対称性が破れるものと、ヒッグス場のようなものを加えなくても対称性が破れるものとがあります。後者のことを力学的対称性の破れ(dynamical symmetry breaking)と呼んでいます。QCDでのカイラル対称性と呼ばれるものが、これに関連しています。このときはゴールドストーンボソンはパイオンの理想状態と考えられています。さらに、これは二段構造になっていて、基底状態(真空)のカイラル対称性の破れによって質量0のパイオンが作られ、さらにQCDラグランジアンに含まれているクォーク質量項によるカイラル対称性の破れによってパイオンは質量を獲得することになると考えられています。ここら辺は現在でもグチャグチャしている領域です。

最後に対称性の破れについての補足的な注意をしておきます。量子論においては、物理的に異なった状態は異なった真空(基底状態)によって与えられるので、対称性の変換に対して縮退している真空があれば起きます。これは見てきた例から分かることです。しかし、注意すべきなのは、ここでは何の断りもなしに話を進めてきましたが、体積を無限大にしなければいけないという点です(例えば場 $\phi(x)$ の展開が和でなく積分)。具体的に示しませんが、体積を無限大にとることで真空の縮退が起きます。これは重要なことで、有限の体積では真空の縮退がないために、対称性の破れはおきません(ただし、運動量に制限をかければ真空の縮退をおこせる)。言い換えると、素粒子物理における対称性の破れを起こすには無限大の自由度が必要ということです。

・補足 1

真空の対称性がどうなるのかを簡単に示しておきます。複素スカラー場のラグランジアンで考えることにします。演算子との区別をしていますが、多分混乱しないと思います(交換関係や真空に作用している場合は演算子)。

複素スカラー場での大域的変換 $e^{i\alpha}$ は

$$\phi(x) \Rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x)$$

微小な α の1次までで

$$\phi'(x) = \phi(x) + i\alpha\phi(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

$$\phi'^{\dagger}(x) = \phi^{\dagger}(x) - i\alpha\phi^{\dagger}(x) = \phi^{\dagger}(x) + \delta\phi^{\dagger}(x)$$

変換に対するネーターカレントは(「クライン・ゴールドン場～複素スカラー場～」参照)

$$J_{\mu}(x) = i\alpha(\phi(x)\partial^{\mu}\phi^{\dagger}(x) - \phi^{\dagger}(x)\partial^{\mu}\phi(x))$$

保存電荷 Q は

$$Q = \int d^3x J_0 = i\alpha \int d^3x (\phi \dot{\phi}^\dagger - \phi^\dagger \dot{\phi})$$

Q と場の交換関係は

$$[Q, \phi(x)] = \alpha \phi(x) = -i\delta\phi(x)$$

$$[Q, \phi^\dagger(x)] = -\alpha \phi^\dagger(x) = -i\delta\phi^\dagger(x)$$

これが場の演算子の変化を表す式になり (「生成子・ポアンカレ群」参照)、 Q は変換に対する変化分を作る生成子です。マイナスがつくのが気持ち悪かったら Q の符号を反転して定義すればいいだけです。

複素スカラー場を実部と虚部に分けて

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x))$$

$\phi_{1,2}$ に対する変換は

$$\phi(x) + \delta\phi = \phi(x) + i\alpha\phi(x)$$

と

$$\phi(x) + \delta\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + \delta\phi_1 + i(\phi_2(x) + \delta\phi_2))$$

から

$$i\alpha\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\phi_1 + i\delta\phi_2)$$

こうなればいいので

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta\phi_1 + i\delta\phi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha'\phi_2 + i\alpha'\phi_1) = \frac{i\alpha'}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

よって

$$\delta\phi_1 = -\alpha\phi_2, \quad \delta\phi_2 = \alpha\phi_1$$

カレントと保存電荷は

$$\begin{aligned}
J_\mu &= i\alpha \frac{1}{2} ((\phi_1 + i\phi_2)\partial_\mu(\phi_1 - i\phi_2) - (\phi_1 - i\phi_2)\partial_\mu(\phi_1 + i\phi_2)) \\
&= i\alpha \frac{1}{2} (-i\phi_1\partial_\mu\phi_2 + i\phi_2\partial_\mu\phi_1 - i\phi_1\partial_\mu\phi_2 + i\phi_2\partial_\mu\phi_1) \\
&= \alpha(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1) \\
Q &= \alpha \int d^3x (\phi_1\dot{\phi}_2 - \phi_2\dot{\phi}_1)
\end{aligned}$$

ϕ_1, ϕ_2 のラグランジアンは

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (\partial^\mu \phi^\dagger(x))(\partial_\mu \phi(x)) - m^2 \phi^\dagger(x)\phi(x) - \lambda(\phi^\dagger(x)\phi(x))^2 \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1(x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2(x))^2 - \frac{m^2}{2}(\phi_1^2(x) + \phi_2^2(x)) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2(x) + \phi_2^2(x))^2
\end{aligned}$$

2 つの実スカラー場による形なので、共役な場 $\pi_{1,2} = \dot{\phi}_{1,2}$ との同時刻交換関係として

$$\begin{aligned}
[\phi_1(t, \mathbf{x}), \pi_1(t, \mathbf{y})] &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi_2(t, \mathbf{x}), \pi_2(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
[\phi_1(t, \mathbf{x}), \pi_2(t, \mathbf{y})] &= 0
\end{aligned}$$

そうすると、 Q との交換関係は

$$\begin{aligned}
[Q, \phi_1(y)] &= \alpha \int d^3x [(\phi_1\pi_2 - \phi_2\pi_1), \phi_1(\mathbf{y}, t)] \\
&= -\alpha \int d^3x \phi_2(x) [\pi_1(x), \phi_1(\mathbf{y}, t)] \\
&= i\alpha \int d^3x \phi_2(x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= i\alpha \phi_2(y)
\end{aligned}$$

ϕ_2 でも同様なので

$$\begin{aligned}
[Q, \phi_1(x)] &= i\alpha \phi_2 = -i\delta \phi_1(x) \\
[Q, \phi_2(x)] &= -i\delta \phi_2(x)
\end{aligned}$$

これらを真空中に適用します。

ϕ の真空期待値を

$$\langle 0|\phi|0\rangle = 0$$

とすれば

$$\langle 0|[Q, \phi]|0\rangle = -i\langle 0|\delta\phi|0\rangle = \alpha\langle 0|\phi|0\rangle = 0$$

なので Q が真空へ作用すると $Q|0\rangle = 0$ です。これに対して

$$\langle 0|\phi|0\rangle = v \Rightarrow \langle 0|\phi_1|0\rangle = v, \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0$$

となっていると

$$\langle 0|[Q, \phi_2]|0\rangle = -i\langle 0|\delta\phi_2|0\rangle = -i\alpha\langle 0|\phi_1|0\rangle \neq 0$$

よって、 Q の真空への作用は $Q|0\rangle \neq 0$ です。このように真空期待値が 0 でないと Q の真空への作用の仕方が変わります。

Q は対称性に対する生成子なので、これは真空中で Q の対称性 (大局的変換に対する不変性) がなくなっていることを意味します。例えば、古典的な場の変換 $e^{i\alpha}$ に対応する場の演算子の変換 (α を Q の外に出しています)

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \phi(x) + \delta\phi \\ &= \phi(x) - i\alpha[Q, \phi(x)] \\ &= e^{-i\alpha Q}\phi(x)e^{i\alpha Q} \quad (e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \cdots)\end{aligned}$$

に対して真空が不変なら $e^{i\alpha Q}|0\rangle = |0\rangle$ となっているはずなので

$$e^{i\alpha Q}|0\rangle = |0\rangle + i\alpha Q|0\rangle$$

から、 $Q|0\rangle = 0$ となる必要があるためです。

このように、ポテンシャルの最小値のときと同様に、ラグランジアンで成立していた対称性が真空中で成立しなくなります。

・補足 2

複素スカラー場の場合を ϕ に別の形を与えて計算します。ラグランジアンは同じで

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) + \mu^2 \phi^*(x)\phi(x) - \lambda(\phi^*(x)\phi(x))^2$$

ϕ を 2 つの実数場 α, θ によって

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha(x)e^{i\theta(x)/v} \quad (\phi_0 = \langle\phi\rangle_0, |\phi_0|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2})$$

と与えます (複素数の極形式)。これをラグランジアンに入れば、第一項は

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta(x)/v}\partial_\mu\alpha + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{v}\alpha(x)e^{i\theta(x)/v}\partial_\mu\theta \\ \partial_\mu\phi^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta(x)/v}\partial_\mu\alpha - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{v}\alpha(x)e^{-i\theta(x)/v}\partial_\mu\theta\end{aligned}$$

から

$$(\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi^*(x)) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\alpha)^2 + \frac{1}{2v^2}\alpha^2(\partial_\mu\theta)^2$$

となるので

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\alpha)^2 + \frac{1}{2v^2}\alpha^2(\partial_\mu\theta)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\alpha^2 - \frac{\lambda}{4}\alpha^4$$

$\alpha(x) = v + \eta(x)$ として虚数方向にはズラさないことにすれば (η の質量項がどうなっているのかだけを見るため)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2v^2}(v + \eta)^2(\partial_\mu\theta)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\theta)^2 + \frac{1}{2v^2}(\eta^2 + 2v\eta)(\partial_\mu\theta)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4\end{aligned}$$

第 4 項と第 5 項は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mu^2(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v^2 + 2v\eta) - \frac{\lambda}{4}(v^4 + \eta^4 + 4v^3\eta + 4v\eta^3 + 6v^2\eta^2) \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}\mu^2(v^2 + 2v\eta) - \frac{\lambda}{4}(v^4 + \eta^4 + 4\frac{\mu^2}{\lambda}v\eta + 4v\eta^3 + 6\frac{\mu^2}{\lambda}\eta^2) \quad (v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 - \frac{3}{2}\mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}\mu^2v^2 + \mu^2v\eta - \mu^2v\eta - \frac{\lambda}{4}(v^4 + \eta^4 + 4v\eta^3) \\ &= -\mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}\mu^2v^2 - \frac{\lambda}{4}(v^4 + \eta^4 + 4v\eta^3) \\ &= -\frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2 + \frac{1}{2}\mu^2v^2 - \frac{\lambda}{4}(v^4 + \eta^4 + 4v\eta^3)\end{aligned}$$

となって、 η の質量が $\sqrt{2\mu^2}$ となります。 $\theta = 0 + \xi$ として η と ξ の 1 次まで取り出せば $\alpha e^{i\theta/v} \simeq v + \eta + i\xi$ となり、 $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ と同じ形になります ($\xi \simeq \alpha\theta/v$)。