

Unruh 効果

場の理論での真空での粒子生成を示す Unruh 効果について見ていきます。Unruh 効果はブラックホールでのホーキング輻射の平坦時空版と言うこともできます。

ここで出てくる Rindler 空間は慣性系ではないので一般座標変換のように行いますが、空間自体は曲がっていない平坦な空間です。

空間構造にはあまり触れずに話を進めていきます。

ミンコフスキー空間ではローレンツ変換から、静止している観測者と速度 v で動いている観測者の間の関係を作れます。これをさらに発展させて、速度が変化する観測者の場合ではどうなるのかを見ていきます。速度は定数の加速度によって変化するとします。速度が変化するので慣性系ではなくなります。

まずは、定数の加速度 a を持つ座標系を作ります。そのためにミンコフスキー空間での加速度について見ておきます。静止している系を A とし、系 A での粒子の速度を $v = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ で与えたとします。このとき、粒子の 4 元速度ベクトル u_μ は x_μ を $ds = \sqrt{1-v^2}dt$ で微分した

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt} \quad (\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}, v^2 = |\mathbf{v}|^2)$$

となっています。 x 方向に動かしているとして、 $u = u_x, x = x_1$ として x 方向のみを考えます。これに対応する加速度 a はさらに s で微分した

$$a = \frac{du}{ds} = \gamma \frac{du}{dt}$$

となります。これは積分することで

$$at = \gamma u + C = \gamma^2 v + C \quad (v = \frac{u}{\gamma})$$

$u(0) = 0$ とすれば、 $C = 0$ なので

$$at = \frac{v^2}{1-v^2}$$

$$a^2 t^2 = \frac{v^2}{1-v^2}$$

$$(1+a^2 t^2)v^2 - a^2 t^2 = 0$$

$$v^2 = \frac{a^2 t^2}{(1+a^2 t^2)}$$

$$v = \frac{at}{\sqrt{1+a^2 t^2}}$$

符号は速度 v が正になるように選んでいます ($a > 0$)。これを t で積分すると

$$v = \frac{dx}{dt}$$

から

$$\begin{aligned}x &= \int v dt = \int dt \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2}} \\ &= \frac{1}{a} \int d\alpha \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{1+a^2t^2} + C\end{aligned}$$

x は位置なので、適当に原点を動かせば $C = 0$ とできるので

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{1}{a^2}(1+a^2t^2) \\ x^2 - t^2 &= \frac{1}{a^2}\end{aligned}\tag{1}$$

という関係が出てきます。これは特殊相対論での基本的な話ですが、粒子の代わりに座標系 (観測者がいる座標系) と思えば、系 A から見て加速している系とできます。つまり、ミンコフスキー計量から座標変換によって $x^2 - t^2$ が定数になる座標系にすることで、 x 方向に加速度を与えられます。

というわけで、(1) を満たすようにミンコフスキー空間から

$$t = \rho \sinh \eta, \quad z = \rho \cosh \eta \quad (\rho > 0)\tag{2}$$

と変換します (ρ は定数ではない)。 z 方向に動かしています。この変換によって

$$dt = \sinh \eta d\rho + \rho \cosh \eta d\eta, \quad dz = \cosh \eta d\rho + \rho \sinh \eta d\eta$$

となるので、計量は

$$\begin{aligned}ds^2 &= (\sinh \eta d\rho + \rho \cosh \eta d\eta)^2 - (\cosh \eta d\rho + \rho \sinh \eta d\eta)^2 - dx^2 - dy^2 \\ &= \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2 - dx^2 - dy^2\end{aligned}$$

この計量を Rindler 計量と言い、これによる空間を Rindler 空間と呼びます。 ρ が定数 ρ_0 とすると (正確には x, y も定数)

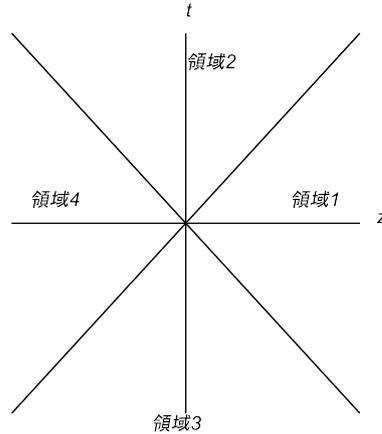
$$z^2 - t^2 = \rho_0^2(\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) = \rho_0^2$$

これに (1) を踏まえることで、定数の加速度 a によって

$$\rho_0^2 = a^{-2}$$

となります。つまり、Rindler 空間において、 ρ が一定となる世界線上の観測者 ($ds^2 = \rho_0^2 d\eta^2$ から固有時間が $a^{-1}\eta$) は実際に z 方向に加速度 a を受けていることになります。

ミンコフスキー空間での tz 面を分割した領域と (2) の変換は対応しています。 $t = \pm z$ の線で tz 面を 4 分割すると、 $|t| < z$ の領域を right Rindler wedge、 $|t| < -z$ を left Rindler wedge と言います。また、 $t > |z|$ を expanding degenerate Kasner universe、 $t < -|z|$ を contracting degenerate Kasner universe と言ったりもします。right Rindler wedge を領域 1、expanding degenerate Kasner universe を領域 2、contracting degenerate Kasner universe を領域 3、left Rindler wedge を領域 4 とします。図にすると



領域 1~4 は $z_{\pm} = z \pm t$ によって区別すると分かりやすく、 t と z の大小関係を考えると

$$\text{領域 1 : } z_+ > 0, z_- > 0$$

$$\text{領域 2 : } z_+ > 0, z_- < 0$$

$$\text{領域 3 : } z_+ < 0, z_- > 0$$

$$\text{領域 4 : } z_+ < 0, z_- < 0$$

となっています。(2) の変換は $z > |t|$ の領域である領域 1 に対応し、(2) の符号を反転させれば領域 4 に対応します ($z < |t|$)。これは

$$\cosh \eta = \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2}, \quad \sinh \eta = \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2}$$

での $\cosh \eta$ と $\sinh \eta$ の大小関係から分かります ($z^2 > t^2$)。つまり、Rindler 空間はミンコフスキー空間全体に対応してなく、領域 1 と領域 2 に制限されています。

Rindler 空間の特徴を簡単に見ておきます。 η を定数とすると (C_1, C_2 は定数)

$$t = \rho C_1, \quad z = \rho C_2$$

なので、 η が定数のとき、 tz 面の領域 1 において直線になります。これに対して、 ρ を一定にとると (C は定数)

$$z^2 - t^2 = C$$

であることから、 tz 面の領域 1 において双曲線を描きます (この線上にいる観測者が加速度 a を受ける)。この双曲線は $z = \pm t$ の線 (光円錐の時間的と空間的を区切るヌルの線) に漸近的に近づくだけで、 $z = \pm t$ の線を突破することは出来ません。分かりやすくするためにヌル座標 u, v を導入すると

$$u = t - z = \rho(\sinh \eta - \cosh \eta) = \rho\left(\frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} - \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2}\right) = -\rho e^{-\eta}$$

$$v = t + z = \rho(\sinh \eta + \cosh \eta) = \rho e^{\eta}$$

となり、 $u, v = 0$ が $z = \pm t$ の線になります (一般相対性理論の「シュバルツシルト解~クルスカール座標~」の補足参照)。なので、 $\eta \rightarrow \infty$ で $u = 0$ 、 $\eta \rightarrow -\infty$ で $v = 0$ の線に近づいていきます (もしくは $\rho = 0$)。このように、領域 1 にいる ρ が定数の線はヌルの線を超えられません。この性質をブラックホールの事象の地平面に対応させると、ヌルの線を地平線と考えることが出来ます。このことから、Rindler 空間はブラックホールの近似的な空間とみなされます。また、領域 1 と 4 は空間的 (space-like) に分離しているので、領域 4 で起きたことは因果律のために領域 1 から見れません。

計量はもっと便利な形にできます。 $z > |t|$ として領域 1 で

$$\rho = a^{-1}e^{a\lambda}, \quad \eta = a\tau$$

$$d\rho = e^{a\lambda}d\lambda, \quad d\eta = ad\tau \quad (t = a^{-1}e^{a\lambda} \sinh(a\tau), \quad z = a^{-1}e^{a\lambda} \cosh(a\tau))$$

とさらに変換します。この変換によって計量は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = e^{2a\lambda}d\tau^2 - e^{2a\lambda}d\lambda^2 - dx^2 - dy^2 \quad (3)$$

τ と λ の範囲は制限されていないので、 $-\infty < \tau, \lambda < \infty$ となっています。具体的な計算はこの計量を使っていきます。上での話と同じように、 λ を定数 λ_0 とすると

$$z^2 - t^2 = a^{-2}e^{2a\lambda_0}$$

なので、この世界線上にいる観測者 (固有時間は $e^{a\lambda_0}\tau$) での加速度は

$$\alpha = ae^{-a\lambda_0}$$

となります。 ρ_0 に直せば加速度 α は a になるので、 a を加速度と呼んでいきます。

この座標変換に対応する領域 4 での変換は、 $|t| < -z$ なので、 t と z の符号を反転させた

$$\rho = -a^{-1}e^{a\bar{\lambda}}, \quad \eta = a\bar{\tau} \quad (t = -a^{-1}e^{a\bar{\lambda}} \sinh(a\bar{\tau}), \quad z = -a^{-1}e^{a\bar{\lambda}} \cosh(a\bar{\tau}))$$

となります (計量の形は同じ)。領域が違うので $\bar{\tau}, \bar{\lambda}$ と区別しましたが、 $\bar{\tau}, \bar{\lambda}$ の範囲自体は τ, λ と同じで計量の形も同じなので、領域 1, 4 両方で τ, λ を使うことにします。

座標系の準備ができたので、質量 0 でのスカラー場を考えます。4 次元でなく 2 次元としても話は同じなので 2 次元にしてしまい、時空は (t, x) とし、添え字は $a = 1, 2$ のようにします。加速の方向は x です。スカラー場のラグランジアン密度の形は座標変換のもとで不変にするために

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial^a \phi \partial_a \phi$$

これによる作用は t, x と τ, λ の変換で不変になっています。このことは座標変換

$$g_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi = \frac{\partial x'^i}{\partial x^a} \frac{\partial x'^j}{\partial x^b} g'_{ij} \frac{\partial x^a}{\partial x'^k} \frac{\partial x^b}{\partial x'^l} \partial'^k \phi \partial'^l \phi = g'_{ij} \partial'^i \phi \partial'^j \phi$$

と ($\phi'(x') = \phi(x)$ 、スカラーの偏微分はベクトルとして変換される)、 $d^4x\sqrt{-g}$ は座標変換に対して不変になるように作られているために $d^4x\sqrt{-g} = d^4x'\sqrt{-g'}$ となっていることから分かります。

最初にミンコフスキー空間を使って後で必要なものを出しておきますミンコフスキー空間でのクライン・ゴルドン方程式は

$$g_{ab}\partial^a\partial^b\phi(t,x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(t,x) = 0 \quad (4)$$

この $\phi(t,x)$ は

$$\phi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (a_k f(t,x) + a_k^\dagger f^*(t,x))$$

と展開でき、 a_k はミンコフスキー空間の真空 $|0\rangle_M$ に対して

$$a_k|0\rangle_M = 0$$

と作用します。 $f(t,x)$ は正エネルギー、 $f^*(t,x)$ は負エネルギーに対応し

$$f(t,x) = Ae^{-iEt+kx} \quad (E = |k|)$$

となっています(「伝播関数について」参照)。 A は規格化定数です。この $f(t,x)$ を正エネルギー解と呼ぶことにします。これは時間微分によって

$$i\frac{\partial}{\partial t}f(t,x) = Ef(t,x)$$

となっており、正エネルギー解の定義です。一般時空を考慮するなら、正確にはキリングベクトルを使って定義されますが、ここでは別の方法で定義します(Rindler 空間は静的なので、同じように $i\partial/\partial\tau$ と $e^{-iE\tau}$ で正エネルギー解を定義できる。「曲がった時空でのスカラー場」参照)。正エネルギー解は、 $k > 0$ の場合

$$f(t,x) = Ae^{-iEt+kx} = Ae^{-iE(t-x)} = Ae^{+iEx-}$$

と書けます。このとき、 x_- の複素平面を考え絶対値を取ってみると

$$|e^{iEx_-}|^2 = \exp[iE((\text{Re}x_- + i\text{Im}x_-) - (\text{Re}x_- - i\text{Im}x_-))] = \exp[-E\text{Im}x_-]$$

これから $\text{Im}x_- > 0$ では発散せずにどこかの値に収束するのが分かります。数学用語では有界 (bounded) と言います。 $k < 0$ では

$$f(t,x) = Ae^{-iEt-kx} = Ae^{-iE(t+x)} = Ae^{-iEx+}$$

なので

$$|e^{-iEx_+}|^2 = \exp[-iE((\text{Re}x_- + i\text{Im}x_-) - (\text{Re}x_- - i\text{Im}x_-))] = \exp[E\text{Im}x_+]$$

となって、 $\text{Im}x_+ < 0$ で収束します。つまり、正エネルギー解は x_{\pm} の実数域全体で解析的で、 x_- の複素平面の上半面、 x_+ の複素平面の下半面で有界という性質を持っています。

Rindler 空間に話を移します。Rindler 空間 (領域 1) でのクライン・ゴールドン方程式は (3) から

$$\begin{aligned} g_{ab}\partial^a\partial^b\phi_R(\tau, \lambda) &= e^{2a\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\phi_R(\tau, \lambda) = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)\phi_R(\tau, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となって、同じ形になります。これはミンコフスキー空間の計量と Rindler 空間の計量とが共形変換になっていることから分かります。ミンコフスキー空間と違う点は τ, λ が領域 1 に制限されているところだけで、後は同じです。というわけで、量子化の手続きも変わらないので、ミンコフスキー空間と同じようにできます。

領域 1 での $\phi_R(\tau, \lambda)$ は、ミンコフスキー空間での t, x を τ, λ に置き換えればいだけなので

$$\phi_R(\tau, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (R_k g_k^R(\tau, \lambda) + R_k^\dagger g_k^{R*}(\tau, \lambda))$$

と展開した形で書け、 $g_k^R(\tau, \lambda)$ はミンコフスキー空間と同じように

$$g_k^R(\tau, \lambda) = N e^{-i(E\tau - k\lambda)} \quad (E = |k|)$$

$g_k^R(\tau, \lambda)$ は正エネルギー解になっています (この場合は τ で微分する)。 N は規格化定数です。そして、これは領域 1 での $g_k^R(\tau, \lambda)$ なので、領域 4 では $g_k^R(\tau, \lambda) = 0$ です。また、領域 1 と 4 は x_+ と x_- の符号が反転しているので、 $x_+ = x_- = 0$ で分断されています (滑らかに繋がっていない)。

領域 4 でも同様に

$$\phi_L(\tau, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (L_k g_k^L(\tau, \lambda) + L_k^\dagger g_k^{L*}(\tau, \lambda))$$

と展開できますが、領域 4 は領域 1 の t と x の符号を反転させたものなので、時間の方向が逆になっています。そのため、正エネルギー解の定義は

$$-i\frac{\partial}{\partial\tau}g_k^L = E g_k^L$$

となるので、領域 4 での正エネルギー解 g_L は

$$g_k^L(\tau, \lambda) = N e^{i(E\tau + k\lambda)} \quad (E = |k|)$$

領域 1 では $g_k^L(\tau, \lambda) = 0$ です。

というわけで、 g_k^R と g_k^L は

$$g_k^R(\tau, \lambda) = N e^{-i(E\tau - k\lambda)} \quad (\text{領域 4 では } 0)$$

$$g_k^L(\tau, \lambda) = N e^{i(E\tau + k\lambda)} \quad (\text{領域 1 では } 0)$$

注意すべきなのは、 $u_{\pm} = \lambda \pm \tau$ としたとき、領域 1 では

$$x_+ = x + t = \rho \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} + \rho \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} = \rho e^{\eta} = a^{-1} e^{a\lambda + a\tau} = a^{-1} e^{au_+}$$

$$x_- = x - t = \rho \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} - \rho \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} = \rho e^{-\eta} = a^{-1} e^{a\lambda - a\tau} = a^{-1} e^{au_-}$$

から、ミンコフスキー空間の座標と

$$x_{\pm} = a^{-1} e^{au_{\pm}} \quad (\text{領域 1}) \quad (6)$$

という関係になっているのに対して、領域 4 では

$$x_+ = x + t = \rho \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} + \rho \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} = \rho e^{\eta} = -a^{-1} e^{a\lambda + a\tau} = -a^{-1} e^{au_+}$$

$$x_- = x - t = \rho \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} - \rho \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} = \rho e^{-\eta} = -a^{-1} e^{a\lambda - a\tau} = -a^{-1} e^{au_-}$$

なので

$$x_{\pm} = -a^{-1} e^{au_{\pm}} \quad (\text{領域 4}) \quad (7)$$

となっていることです。これは同じ記号で書いたための弊害ですが、そんなに混乱しないと思います。

これで Rindler 空間での ϕ は

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (R_k g_k^R + R_k^{\dagger} g_k^{R*} + L_k g_k^L + L_k^{\dagger} g_k^{L*}) \quad (8)$$

と書け、生成、消滅演算子が作れますが、2種類あるために

$$R_k |0\rangle_R = 0, \quad L_k |0\rangle_L = 0$$

という2つの真空が出てきます。この2つの真空は、 g_k^R, g_k^L の形から明らかに同一視できません。しかし、真空が2つあろうと定義はできるので Rindler 空間上ではこれでいいとします。問題なのはミンコフスキー空間 (慣性系) から見て、何が起きているのかが分からないことです。これをどうにかするために、ミンコフスキー空間の真空 $|0\rangle_M$ に作用する生成、消滅演算子を作ります。これはボゴリューボフ (Bogoliubov) 変換を使うことでも求め

られますが (ボゴリューボフ変換は 2 種類の生成、消滅演算子を混ぜて新しい生成、消滅演算子を作る変換)、違う方法を使います。

Rindler 空間はミンコフスキー空間を 4 分割したもののなので、4 分割した領域全てに対応できる解を作ればミンコフスキー空間の解に対応する、という発想を使います。このときに、正エネルギー解と負エネルギー解が混ざっていると、真空に作用させても 0 にならないので、正エネルギー解に対応するものを求めます。そんな解は g_k^R と g_k^L の線形結合

$$U^{(1)} = g_k^R + e^{-\pi E/a} g_{-k}^{L*}, \quad U^{(2)} = g_{-k}^{R*} + e^{\pi E/a} g_k^L$$

によって作られます。 $U^{(1)}$ は $E = k > 0$ として (6) と (7) を使ってミンコフスキー空間の座標で書くと

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= e^{-iE(\tau-\lambda)} + e^{-iE(\tau-\lambda)} \\ &= e^{iEu_-} + e^{-\pi E/a} e^{iEu_-} \\ &= \exp[iE \log[ax_-]/a] + e^{-\pi E/a} \exp[iE \log[-ax_-]/a] \\ &= (ax_-)^{iE/a} + e^{-\pi E/a} (-ax_-)^{iE/a} \\ &= (ax_-)^{iE/a} + e^{-\pi E/a} e^{\pi E/a} (ax_-)^{iE/a} \\ &= 2(ax_-)^{iE/a} \end{aligned}$$

u_{\pm} と x_{\pm} の関係が g_k^R と g_k^L で違うことに注意してください。規格化をし直さなければいけないので、規格化定数は省いています。途中で、 $()^{iE/a}$ での多価関数を 1 価関数にするために、 x_- の複素平面において $\log(-1) = -i\pi$ となるように制限 (分枝) をかけています ($0 \leq \arg x_- \leq \pi$)。これがなんでミンコフスキー空間での解になれるのかは、領域 1 と 4 の結合であり、 x_- ($-\infty < x_- < \infty$) に依存するように書いているために、 $x_- = x_+ = 0$ でも切断されないからです (領域 2,3 へは元から切断されていない)。さらに複素平面での制限のために

$$\begin{aligned} (ax_-)^{iE/a} &= \exp[ia^{-1}E \log[ax_-]] = \exp[ia^{-1}E(\log a + \log |x_-| + i \arg x_-)] \\ |(ax_-)^{iE/a}|^2 &= \exp[-a^{-1}E \arg x_-] \end{aligned}$$

からミンコフスキー空間での正エネルギー解の性質である上半面で有界を持っているので、これは正エネルギー解になっています。他の場合でも同様ですが、 x_+ に対しては下半面になるように制限をかけることで ($\log(-1) = i\pi$)、 $U^{(1)}, U^{(2)}$ は正エネルギー解になっているのが分かります (x_{\pm} の実数域全体で解析的で、複素平面 x_- の上半面と x_+ の下半面で有界)。よって、 $U^{(1)}, U^{(2)}$ でミンコフスキー空間に対応させられることになります。他の場合の計算もしておく

- $U^{(1)}, k < 0$

$$\begin{aligned}
U^{(1)} &= e^{-iEu_+} + e^{-\pi E/a} e^{-iEu_+} \\
&= \exp[-iE \log[a^{-1}x_+]/a] + e^{-\pi E/a} \exp[-iE \log[-a^{-1}x_+]/a] \\
&= (a^{-1}x_+)^{-iE/a} + e^{-\pi E/a} (-a^{-1}x_+)^{-iE/a} \\
&= (a^{-1}x_+)^{-iE/a} + e^{-\pi E/a} e^{\pi E} (a^{-1}x_+)^{-iE/a} \\
&= 2(a^{-1}x_+)^{-iE/a}
\end{aligned}$$

- $U^{(2)}, k > 0$

$$\begin{aligned}
U^{(2)} &= e^{iEx_+} + e^{\pi E/a} e^{iEx_+} \\
&= \exp[ia^{-1}E \log[ax_+]] + e^{\pi E/a} \exp[ia^{-1}E \log[-ax_+]] \\
&= (ax_+)^{iE/a} + e^{\pi E/a} (-ax_+)^{iE/a} \\
&= (ax_+)^{iE/a} + e^{\pi E/a} e^{-\pi E/a} (ax_+)^{iE/a} \\
&= 2(ax_+)^{iE/a}
\end{aligned}$$

- $U^{(2)}, k < 0$

$$\begin{aligned}
U^{(2)} &= e^{-iEx_-} + e^{\pi E/a} e^{-iEx_-} \\
&= \exp[-ia^{-1}E \log[ax_-]] + e^{\pi E/a} \exp[-ia^{-1}E \log[-ax_-]] \\
&= (ax_-)^{-iE/a} + e^{\pi E/a} (-ax_-)^{-iE/a} \\
&= (ax_-)^{-iE/a} + e^{\pi E/a} e^{-\pi E/a} (ax_-)^{-iE/a} \\
&= 2(ax_-)^{-iE/a}
\end{aligned}$$

まとめると (係数 2 はどうでもいいので省いて)

$$\begin{aligned}
U^{(1)} &= (ax_-)^{iE/a} \quad (k > 0) \\
&= (ax_+)^{-iE/a} \quad (k < 0) \\
U^{(2)} &= (ax_+)^{iE/a} \quad (k > 0) \\
&= (ax_-)^{-iE/a} \quad (k < 0)
\end{aligned}$$

というわけで、ミンコフスキー空間の真空中に作用させると 0 になる消滅演算子を使った形は、 $U^{(1)}$ と $U^{(2)}$ を使って

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (b_k^{(1)} U_k^{(1)} + b_k^{(2)} U^{(2)} + b_k^{(1)\dagger} U_k^{(1)\dagger} + b_k^{(2)\dagger} U^{(2)\dagger}) \quad (9)$$

と書けます。後は規格化定数を決めれば良いです。

スカラー場の内積は

$$(f_1, f_2) = i \int dx (f_1^*(t, x) \frac{\partial}{\partial t} f_2(t, x) - f_2(t, x) \frac{\partial}{\partial t} f_1^*(t, x))$$

$$f_i(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2EL}} e^{-i(Et-kx)}$$

として (L は 1 次元体積)、規格化を

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij}$$

と与えます。Rindler 座標でも構造は一緒なので、 g_k^R, g_k^L を

$$(g_{k_1}^R, g_{k_2}^R) = \delta(k_1 - k_2), \quad (g_{k_1}^L, g_{k_2}^L) = \delta(k_1 - k_2), \quad (g_{k_1}^R, g_{k_2}^L) = 0$$

と定義できます。規格化されたものを $U^{(i)'} = \sqrt{C_{1,2}} U^{(i)}$ とすると、 $U^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} (U^{(1)'}, U^{(1)'}) &= C_1 (U^{(1)}, U^{(1)}) \\ &= C_1 (g_{k_1}^R + e^{-\pi E_1/a} g_{-k_2}^{L*}, g_{k_1}^R + e^{-\pi E_2/a} g_{-k_2}^{L*}) \\ &= C_1 (g_k^R, g_k^R) + C_1 e^{-2\pi(E_1+E_2)/a} (g_{-k_2}^{L*}, g_{-k_2}^{L*}) \\ &= C_1 \delta(k_1 - k_2) - C_1 e^{-2\pi(E_1+E_2)/a} \delta(k_2 - k_1) \\ &= C_1 (1 - e^{-2\pi E/a}) \delta(k_1 - k_2) \quad (E = E_1 = E_2) \end{aligned}$$

4 行目の第二項は内積に複素共役がついているのでマイナスになっています。これが $\delta(k_1 - k_2)$ になれば良いので、 C_1 は

$$C_1 = (1 - e^{-2\pi E/a})^{-1} = e^{\pi E/a} (e^{\pi E/a} - e^{-\pi E/a})^{-1} = \frac{e^{\pi E/a}}{2 \sinh(\pi E/a)}$$

$U^{(2)}$ では

$$\begin{aligned}
(U^{(2)'}, U^{(2)'}) &= C_2(U^{(2)}, U^{(2)}) \\
&= C_2(g_{-k}^{R*} + e^{\pi E/a} g_k^L, g_{-k}^{R*} + e^{\pi E/a} g_k^L) \\
&= C_2(g_{-k}^{R*}, g_{-k}^{R*}) + C_2 e^{2\pi(E_1+E_2)/a} (g_{k_2}^L, g_{k_2}^L) \\
&= -C_2 \delta(k_1 - k_2) + C_2 e^{2\pi(E_1+E_2)/a} \delta(k_1 - k_2) \\
&= C_2(-1 + e^{2\pi E/a}) \delta(k_1 - k_2) \quad (E = E_1 = E_2)
\end{aligned}$$

なので

$$C_2 = (-1 + e^{2\pi E/a})^{-1} = e^{-\pi E/a} (e^{\pi E/a} - e^{-\pi E/a})^{-1} = \frac{e^{-\pi E/a}}{2 \sinh(\pi E/a)}$$

よって

$$\begin{aligned}
U^{(1)'} &= \sqrt{C_1} U^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi E/a)}} (e^{\pi E/2a} g_k^R + e^{-\pi E/2a} g_{-k}^{L*}) \\
U^{(2)'} &= \sqrt{C_2} U^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi E/a)}} (e^{\pi E/2a} g_k^L + e^{-\pi E/2a} g_{-k}^{R*})
\end{aligned}$$

となり、規格化こみで (U' を U と書きます)

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (b_k^{(1)} U^{(1)} + b_k^{(2)} U^{(2)} + b_k^{(1)\dagger} U^{(1)*} + b_k^{(2)\dagger} U^{(2)*}) \quad (10)$$

ミンコフスキー空間の真空に対しては

$$b_k^{(1)} |0\rangle_M = b_k^{(2)} |0\rangle_M = 0$$

となります。 R, L と $b^{(1)}, b^{(2)}$ の演算子での同時刻交換系は

$$\begin{aligned}
[R_{k_1}, R_{k_2}^\dagger] &= \delta(k_1 - k_2), \quad [L_{k_1}, L_{k_2}^\dagger] = \delta(k_1 - k_2) \\
[b_{k_1}^{(i)}, b_{k_2}^{(j)}] &= \delta_{ij} \delta(k_1 - k_2)
\end{aligned}$$

とし、他のは 0 になるとします。後は Rindler 空間での生成、消滅演算子を b を使って書き換えてやればいいです。

(8) と (10) を比較することで

$$\begin{aligned}
R_k &= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi E/a)}} (e^{\pi E/2a} b_k^{(1)} + e^{-\pi E/2a} b_{-k}^{(2)\dagger}) \\
L_k &= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi E/a)}} (e^{\pi E/2a} b_k^{(2)} + e^{-\pi E/2a} b_{-k}^{(1)\dagger})
\end{aligned}$$

これは実際に入れてみれば

$$\begin{aligned}
\phi &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (R_k g_k^R + R_k^\dagger g_k^{R*} + L_k g_k^L + L_k^\dagger g_k^{L*}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi E/a)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} [e^{\pi E/2a} b_k^{(1)} + e^{-\pi E/2a} b_{-k}^{(2)\dagger}] g_k^R + (e^{\pi E/2a} b_k^{(1)\dagger} + e^{-\pi E/2a} b_{-k}^{(2)}) g_k^{R*} \\
&\quad + (e^{\pi E/2a} b_k^{(2)} + e^{-\pi E/2a} b_{-k}^{(1)\dagger}) g_k^L + (e^{\pi E/2a} b_k^{(2)\dagger} + e^{-\pi E/2a} b_{-k}^{(1)}) g_k^{L*}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi E/a)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} (b_k^{(1)} e^{\pi E/2a} g_k^R + b_{-k}^{(1)} e^{-\pi E/2a} g_k^{L*} + b_k^{(2)} e^{\pi E/2a} g_k^L + b_{-k}^{(2)} e^{-\pi E/2a} g_k^{R*} + \dots)
\end{aligned}$$

となり (\dots はエルミート共役部分)、 k の全空間積分があるために k の符号を反転させても問題ないので、一致します。

これでミンコフスキー空間の真空に R を作用させられるので、領域 1 での粒子数演算子 $R^\dagger R$ を作用させると

$$\begin{aligned}
{}_M \langle 0 | R^\dagger R | 0 \rangle_M &= \frac{1}{2 \sinh(\pi E/a)} {}_M \langle 0 | (e^{\pi E/2a} b_k^{(1)\dagger} + e^{-\pi E/2a} b_{-k}^{(2)}) (e^{\pi E/2a} b_k^{(1)} + e^{-\pi E/2a} b_{-k}^{(2)\dagger}) | 0 \rangle_M \\
&= \frac{1}{2 \sinh(\pi E/a)} {}_M \langle 0 | e^{\pi E/a} b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)} + e^{-\pi E/a} b_{-k}^{(2)} b_{-k}^{(2)\dagger} | 0 \rangle_M \\
&= \frac{1}{2 \sinh(\pi E/a)} {}_M \langle 0 | e^{-\pi E/a} b_{-k}^{(2)} b_{-k}^{(2)\dagger} | 0 \rangle_M \\
&= \frac{e^{-\pi E/a}}{2 \sinh(\pi E/a)} {}_M \langle 0 | [b_{-k}^{(2)}, b_{-k}^{(2)\dagger}] + b_{-k}^{(2)\dagger} b_{-k}^{(2)} | 0 \rangle_M \\
&= \frac{e^{-\pi E/a}}{2 \sinh(\pi E/a)} \delta(0) {}_M \langle 0 | 0 \rangle_M \\
&= e^{-\pi E/a} (e^{\pi E/a} - e^{-\pi E/a})^{-1} \delta(0) \\
&= \frac{1}{e^{2\pi E/a} - 1} \delta(0)
\end{aligned}$$

$b_k^{(i)\dagger} b_k^{(i)}$ は粒子数演算子なので真空 $|0\rangle_M$ に作用すれば 0 になります。この結果での $(e^{2\pi E/a} - 1)^{-1}$ はボソンの分布関数の形をしています。このことと、有限温度の場の理論での「補足：実時間の伝播関数」の最初の方での、熱浴があるときの粒子数演算子の熱的平均が (T は温度、 k_B はボルツマン定数、 $\langle \rangle_\beta$ は熱的平均)

$$\langle a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \rangle_\beta = \frac{1}{e^{\hbar E/k_B T} - 1}$$

と与えられていることを比較すると、固有時間が $a^{-1}\eta$ の観測者の加速度 a が (c, \hbar, k_B を 1 としないで書くと)

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{ac} &= \frac{\hbar}{k_B T} \\
a &= \frac{2\pi c k_B T}{\hbar}
\end{aligned}$$

もしくは温度が

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \quad (11)$$

となっていると言えます。つまり、定数加速している観測者はミンコフスキー空間の真空に対して熱的な粒子を観測するとみなせます。これが Unruh 効果です (Unruh はアンルーとかウンルーとか)。統計力学の言葉で言えば、定数加速している観測者にとってミンコフスキー空間の真空は温度 (11) を持ったカノニカルアンサンブルの構造 (熱浴) になっていると言えます。Unruh 効果による温度は、例えば $a = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$ としたとき、

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ (Js)}$$

$$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ (J/K)}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

を使うと

$$T \simeq 2 \times 10^{-19} \text{ (K)}$$

となり、相当低い温度です。K はケルビンです。

ここでは質量 0 の相互作用なしのスカラー場という単純な場合で見えてきましたが、電荷を持っている場合や相互作用がある場合になると格段に複雑になり、理論的に完全に理解できているという状況ではないようです (ちなみに Unruh がこの効果を発表したのは 1976 年、physical review D14 (1976) 870)。この話の中では実験は可能だと思えますが、検出方法にいろいろと問題があるらしく確定していないようです。

・補足

シュバルツシルト計量から Rindler 計量を出すこともできます。シュバルツシルト計量は

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - 2m/r} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

m は自然単位系 (幾何学単位系) で質量の次元を持つ定数で、 $r = 2m$ がシュバルツシルト半径 (地平面の位置) です。 $\bar{r} = r - 2m$ として、 r が $2m$ 付近として $r' \ll 2m$ とすると

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\bar{r}}{\bar{r} + 2m} dt^2 - \frac{\bar{r} + 2m}{\bar{r}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &\Rightarrow \frac{\bar{r}}{2m} dt^2 - \frac{2m}{\bar{r}} dr^2 - (2m)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

さらに

$$\rho = \sqrt{8m\bar{r}}, \quad d\rho^2 = \frac{2m}{\bar{r}} d\bar{r}^2 \quad (d\bar{r} = dr)$$

とすれば

$$\frac{\bar{r}}{2m} dt^2 - \frac{2m}{\bar{r}} dr^2 = \frac{\rho^2}{16m^2} dt^2 - d\rho^2 = \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2 \quad (\eta = \frac{1}{4m}t)$$

なので、線素は

$$ds^2 = \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2 - (2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

最後に $\theta \simeq 0$ とすれば

$$(2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = (2m)^2 (d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2)$$

なので、極座標での $\theta \simeq 0$ を取った

$$x = 2m\theta \cos \varphi, \quad y = 2m\theta \sin \varphi$$

を使うことで

$$dx^2 + dy^2 = (2m)^2 (d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2)$$

$$(dx = 2m \cos \varphi d\theta - 2m\theta \sin \varphi d\varphi, \quad dy = 2m \sin \varphi d\theta + 2m\theta \cos \varphi d\varphi)$$

となるので、Rindler 計量

$$ds^2 = \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2 - dx^2 - dy^2$$

が出てきます。このように、シュバルツシルト計量の $r = 2m$ 付近で角度 θ が微小な領域において Rindler 計量が出てきます。

ちなみに、 ρ を Rindler 計量にするために置いただけのように見えますが

$$\rho = \int_{2m}^r dr' \sqrt{g_{11}} = \int_{2m}^r dr' \sqrt{\frac{r'}{r' - 2m}}$$

という意味も持っています。これは固有時間

$$\tau = \int dt \sqrt{g_{00}}$$

の 11 成分版です。それを $2m$ から動径座標 r まで積分しています (地平面からの距離で積分している)。積分すれば (公式扱いにします)

$$\rho = \int_{2m}^r dr' \sqrt{\frac{r'}{r' - 2m}} = \sqrt{r(r - 2m)} - m \log \left| \frac{\sqrt{r - 2m} - \sqrt{r}}{\sqrt{r - 2m} + \sqrt{r}} \right|$$

となって、これの $r \simeq 2m$ ($\epsilon = r - 2m \simeq 0$) を取れば

$$\sqrt{r(r-2m)} = \sqrt{(2m+\epsilon)\epsilon} \simeq \sqrt{2m\epsilon} = \sqrt{2m(r-2m)}$$

対数の項は簡単に求められるように変形します。単純に変形させると

$$\begin{aligned} -\log \left| \frac{\sqrt{r-2m} - \sqrt{r}}{\sqrt{r-2m} + \sqrt{r}} \right| &= \log \left| \frac{\sqrt{r-2m} + \sqrt{r}}{\sqrt{r-2m} - \sqrt{r}} \right| = \log \left| \frac{2r - 2m + 2\sqrt{r(r-2m)}}{-2m} \right| \\ &= \log \left| -\frac{r-m + \sqrt{r(r-2m)}}{m} \right| \end{aligned}$$

これは逆双曲線関数での

$$\sinh^{-1} z = \log[z + \sqrt{z^2 + 1}]$$

を使うことで

$$\begin{aligned} 2 \sinh^{-1} \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} &= 2 \log \left[\sqrt{\frac{r-2m}{2m}} + \sqrt{\frac{r}{2m}} \right] \\ &= \log \left[\frac{r-2m}{2m} + \frac{r}{2m} + \frac{2}{2m} \sqrt{r(r-2m)} \right] \\ &= \log \left[\frac{r-m + \sqrt{r(r-2m)}}{m} \right] \end{aligned}$$

と書けます ($r > 2m$)。 \sinh^{-1} の展開は

$$\sinh^{-1} z \simeq z$$

なので

$$-\log \left| \frac{\sqrt{r-2m} - \sqrt{r}}{\sqrt{r-2m} + \sqrt{r}} \right| = 2 \sinh^{-1} \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \simeq 2 \sqrt{\frac{r}{2m} - 1}$$

となります。よって

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{r(r-2m)} - m \log \left| \frac{\sqrt{r-2m} - \sqrt{r}}{\sqrt{r-2m} + \sqrt{r}} \right| \\ &\simeq \sqrt{2m(r-2m)} + 2m \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} \\ &= \sqrt{2m(r-2m)} + \sqrt{2m(r-2m)} \\ &= \sqrt{8m(r-2m)} \end{aligned}$$

となって、上での ρ と一致します。