

加速度による対称性の回復

ϕ^4 理論を使って破れている対称性が Rindler 空間での加速度によって回復することを見ます。かなりマイナーな話で、使いどころがあるのかもよく分かりません。

ここでの話は「Symmetry Restoration By Acceleration」(arXiv:1207.3677[hep-th]) に従っています。これはかなりテキトーに書かれていて、途中計算や使っている関係がほとんど載っていないです。なので、こっちの勘違いで間違いがあるかもしれないです。

途中で周期性があるときのユークリッド化をしています。細かいことは有限温度の場の理論の「虚時間法」、「虚時間法～クライン・ゴルドン場～」、「ファインマン則～虚時間法～」を見てください。

特殊関数の関係を使っていますが証明なんかしていないので、適当な数学の本を見てください。

ここでの目的は、実数スカラー場による ϕ^4 理論での $\phi \rightarrow -\phi$ に対する対称性の破れが Rindler 空間上でどうなるのか求めるというものです。なので、「1 ループでの有効ポテンシャル」での計算を Rindler 空間上で行い、質量項がどうなるのか見ます。

曲がった時空中での ϕ^4 理論の作用は、minimal coupling で

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right)$$

と与えられます。 $g = \det g_{\mu\nu}$ 、 ∇^μ は共変微分です。これから有効ポテンシャルに持っていきます。流れは「有効作用と有効ポテンシャル」と同じで、作用を古典場 ϕ_c 周りで展開して、生成汎関数 $Z[J]$ からルジャンドル変換で有効作用に持っていくというものです。生成汎関数は漸近的な始状態、終状態と適切な積分測度が与えられれば書けるので、曲がった時空中でも定式化できます。というわけで、曲がった時空中であろうと同じ手順で有効ポテンシャルを出せます。

I を古典場 ϕ_c によって

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu (\phi_c + \phi) \nabla^\nu (\phi_c + \phi) - \mathcal{L}_{int}(\phi_c + \phi) + J(\phi_c + \phi) \right)$$
$$\mathcal{L}_{int}(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

源 J の項も加えています。 ϕ_c はラグランジアン

$$\mathcal{L}(\phi_c) = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi_c \nabla^\nu \phi_c - \mathcal{L}_{int}(\phi_c) + J\phi_c \right)$$

での、運動方程式

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi_c + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}(\phi_c)}{\partial \phi_c} = J$$

を満たすとします (計量の共変微分は 0)。表面積分は平坦な場合と同様に消せて

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi &= \int d^4x (\nabla^\mu (\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \phi \nabla^\nu \phi) - \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi) \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \phi \nabla^\mu \nabla^\nu \phi \end{aligned}$$

と変形できるので、「有効作用と有効ポテンシャル」の計算に $\sqrt{-g}$ がついていただけになって

$$Z[J] = \exp \left[-i \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \phi_c g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi_c + \mathcal{L}_{int}(\phi_c) - J\phi_c \right) \right] \\ \times \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \phi (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{int}(\phi_c)}{\partial \phi_c^2}) \phi \right] \quad (1)$$

と出てきます。これも平坦な場合の結果を minimal coupling の手続きで変更した形になっています。 $\sqrt{-g}$ は ϕ を含んでいないので (C は定数)、

$$\int \mathcal{D}\phi \exp[-i \int d^4x \phi D\phi] = C(\det D)^{-\frac{1}{2}}$$

がそのまま使えて

$$Z[J] = \det[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \mathcal{L}_{int}'']^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-i \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \phi_c g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi_c + \mathcal{L}_{int}(\phi_c) - J\phi_c \right) \right]$$

「 $'$ 」は ϕ_c による微分です。

ルジャンドル変換で有効作用にするために、 $Z[J]$ から $W[J]$ を

$$W[J] = -i \log Z \\ = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \phi_c g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi_c + \mathcal{L}_{int}(\phi_c) - J\phi_c \right) + \frac{i}{2} \log \det[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \mathcal{L}_{int}'']$$

と定義します。第一項の共変微分部分を表面積分で元に戻せば作用 I の形になるので

$$W[J] = I[\phi_c] + \int d^4x \sqrt{-g} J\phi_c + \frac{i}{2} \log \det[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \mathcal{L}_{int}'']$$

ルジャンドル変換することで有効作用は

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x \sqrt{-g} J\phi_c = I[\phi_c] + \frac{i}{2} \log \det[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \mathcal{L}_{int}'']$$

というわけで、平坦な場合とほぼ同じ結果になりますが、ここから問題になるのが共変微分を含んでいる $\log \det$ の計算です。「有効作用と有効ポテンシャル」でも触れたように、この計算はユークリッド化したほうが数学的に安定するので、後でユークリッド化します。

平坦時空の場合ではフーリエ変換を利用して微分演算子を対角化された運動量表示に変えることで計算できますが、一般時空ではこれができません。理由は、運動量表示へのフーリエ変換は並進不変性があるときに使えるからです。「曲がった時空でのスカラー場」でも少し触れたように、一般時空では時空の並進不変性 (時間と空間の並進不変性) がないです。なので、別の手段で計算する必要があります。

$\log \det$ は $\text{tr} \log$ と変形できて、このとき

$$\int_0^z \frac{dx}{a+x} = \int_a^{a+z} \frac{dx'}{x'} = \log x' = \log[a+z] - \log a$$

を利用することで、 S を微分演算子を含む部分として

$$\text{tr} \log[S + M] = \text{tr} \int_0^M \frac{dx}{S+x}$$

という形式的な変形を行えます。ここで必要なのは M を含んでいる項なので、含んでいない項は無視しています。この変形を今の場合で行うために

$$\begin{aligned}\log \det[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + \mathcal{L}_{int}''] &= \text{tr} \log[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + M^2] \quad (M^2 = \frac{\partial^2}{\partial \phi_c^2}(\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2) \\ &= \text{tr} \log D^{-1}\end{aligned}$$

と変形します。 D^{-1} は質量が M^2 のクライン・ゴールドン方程式の演算子部分

$$(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + M^2)\phi = D^{-1}\phi = 0$$

に対応します。なので、これの逆としてグリーン関数 D を

$$(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + M^2)D(x, x') = \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^4(x - x')$$

と定義します。右辺の $1/\sqrt{-g}$ はこうしたほうが便利だからです (スカラー密度 $\sqrt{-g}$ で割ることで $D(x, x')$ をスカラーで定義するというのもあります)。そうすると、 $\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + M^2)$ の逆 D によって

$$\begin{aligned}\text{tr} \log D^{-1} &= \int d^4x \log D^{-1}(x, x) \\ &= \int d^4x \log[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + M^2] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \int_0^{M^2} \frac{dq^2}{\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + q^2)} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \int_0^{M^2} D(x, x; q^2) dq^2\end{aligned}$$

これによって、有効作用は

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_c] &= I[\phi_c] + \frac{i}{2} \log \det[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + \mathcal{L}_{int}''] \\ &= I[\phi_c] + \frac{i}{2} \text{tr} \log D^{-1} \\ &= I[\phi_c] + \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \int_0^{M^2} D(x, x; q^2) dq^2\end{aligned}$$

そして、 ϕ_c を定数 ϕ_0 にして時空の体積で割ることで有効ポテンシャル $V(\phi_0)$ は

$$\begin{aligned}V(\phi_0) &= -\frac{\Gamma(\phi_0)}{\mathcal{V}} \quad (\mathcal{V} = \int d^4x \sqrt{-g}) \\ &= -\mathcal{V}^{-1} I_{cl} - \frac{i}{2} \mathcal{V}^{-1} \int d^4x \sqrt{-g} \int_0^{M^2} dq^2 D(x, x; q^2) \quad (M^2|_{\phi_0} = m^2) \\ &= -\mathcal{V}^{-1} I_{cl} - \frac{i}{2} \int_0^{M^2} dq^2 D(x, x; q^2)\end{aligned} \tag{2}$$

となります。\$I_{cl}\$ は \$\phi_0\$ が定数なので元の作用 \$I\$ から

$$I_{cl} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_0^4 \right)$$

となっています。後は、Rindler 空間でのクライン・ゴールドン方程式のグリーン関数を入れれば、Rindler 空間での 1 ループまでの有効ポテンシャルになります。

Rindler 空間として計算していくので、その情報を並べておきます (細かいことは「Unruh 効果」参照)。\$z\$ 方向に加速を受けているとして、right Rindler wedge で見ることにして (left Rindler wedge でも話は同じ)、計量を

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2 - dx^2 - dy^2 \quad (\rho > 0, -\infty < \eta < \infty)$$

と与えます。\$x^0 = \eta, x^1 = \rho, x^2 = x, x^3 = y, g_{00} = \rho^2, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\$ となっています。このとき \$\rho\$ が定数 \$\rho_0\$ になるのは固有時間 \$\tau\$ が \$\tau = \rho_0 \eta\$ の観測者で (\$x, y\$ は定数)、\$\rho_0^2 = a^{-2}\$ となる \$a\$ が定数加速度となります。

求めたいのは Rindler 空間でのクライン・ゴールドン方程式に対するグリーン関数 \$D\$ です。なので、まずはクライン・ゴールドン方程式

$$\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + M^2)\phi = \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \sqrt{-g}M^2\phi = 0$$

に対して Rindler 空間の計量を入れます。\$\rho\$ は \$\eta\$ に依存していないので

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) + \sqrt{-g}M^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \rho\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \rho M^2 \quad (g^{00} = \rho^{-2}, \sqrt{-g} = \rho)$$

これからクライン・ゴールドン方程式は

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \rho\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \rho M^2\right)\phi = 0$$

Rindler 空間では \$\eta\$ 成分と \$x, y\$ 成分に対してはフーリエ変換ができるので (静的なので時間方向のキリングベクトルがあり、\$x, y\$ はミンコフスキー空間と同じだから)

$$\phi(\eta, \rho, \mathbf{x}_\perp) = \int \frac{d\omega d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{-i(\omega\eta - \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp)} \phi(\omega, \rho, \mathbf{k}_\perp) \quad (\mathbf{x}_\perp = (x, y), \mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y))$$

これを入れることで

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \rho\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \rho M^2\right)\phi(\eta, \rho, \mathbf{x}_\perp) \\ &= \int \frac{d\omega d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} e^{-i(\omega\eta - \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp)} \left(-\frac{\omega^2}{\rho} - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \rho(k_x^2 + k_y^2) + \rho M^2\right)\phi(\omega, \rho, \mathbf{k}_\perp) \end{aligned}$$

よってクライン・ゴールドン方程式は

$$\begin{aligned}
0 &= \left(-\frac{\omega^2}{\rho} - \rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \mathbf{k}_\perp^2 + \rho M^2\right) \phi(\omega, \rho, \mathbf{k}_\perp) \\
&= (-\omega^2 - \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho^2 (\mathbf{k}_\perp^2 + M^2)) \phi(\omega, \rho, \mathbf{k}_\perp) \\
&= (\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - (\alpha^2 \rho^2 - \omega^2)) \phi(\omega, \rho, \mathbf{k}_\perp) \quad (\alpha = \sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 + M^2})
\end{aligned} \tag{3}$$

となります。この形を見るとベッセル方程式

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0$$

の形になっているのが分かります。この解は第 2 種変形ベッセル関数 (modified bessel function of second kind) $K_\nu(x)$ で与えられているので、この方程式に対する固有関数は

$$\phi(\omega, \rho, \mathbf{k}_\perp) = C K_{i\omega}(\alpha \rho) \tag{4}$$

となります。これは後で使います。 C は規格化定数で、規格化は $K_\nu(x)$ での

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} K_{i\omega_1}(x) K_{i\omega_2}(x) = \frac{\delta(\omega_1 - \omega_2)}{2\omega_2 \sinh(\pi\omega_2)}$$

という関係を利用して

$$\int_0^\infty d\rho \frac{1}{\rho} \phi(\omega_1, \rho) \phi(\omega_2, \rho) = \delta(\omega_1 - \omega_2)$$

で与えます。これによって C は

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d\rho \frac{1}{\rho} \phi(\omega_1, \rho) \phi(\omega_2, \rho) &= \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} C^2 K_{i\omega_1}(\alpha \rho) K_{i\omega_2}(\alpha \rho) \\
&= C^2 \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} K_{i\omega_1}(\alpha \rho) K_{i\omega_2}(\alpha \rho) \\
&= C^2 \int_0^\infty \frac{d\rho'}{\rho'} K_{i\omega_1}(\rho') K_{i\omega_2}(\rho') \quad (\rho' = \alpha \rho) \\
&= C^2 \frac{\pi^2 \delta(\omega_1 - \omega_2)}{2\omega_2 \sinh(\pi\omega_2)}
\end{aligned}$$

から

$$C = \frac{1}{\pi} \sqrt{2\omega \sinh(\pi\omega)}$$

となります。

同じように計量を与えれば Rindler 空間での有効ポテンシャルになります。しかし、このまま計算するのではなく、ミンコフスキー時空でもそうだったようにユークリッド化したほうが数学的に安定するので、Rindler 空間をユークリッド化します。Rindler 空間は静的なので、単純に

$$\eta \Rightarrow -i\eta'$$

によってユークリッド化できます。そうすると線素の形は

$$ds^2 = \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2 - dx^2 - dy^2 \Rightarrow ds_E^2 = \rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 + dx^2 + dy^2$$

ここからの η はユークリッド化したものだとします。ここで、3次元円筒座標の線素

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

を見ると、 $\rho = r$ 、 $\eta = \theta$ になっているのが分かります。このことから、 η は

$$0 \leq \eta < 2\pi$$

として周期 2π を持たせます。数学的に細かいことを言うと、conical singularity (円錐の先端での特異点) を回避するために周期性を持たせています。 $r^2 d\theta^2$ において角度が $\theta = \theta + 2\pi$ を持たないと欠損角 (deficit angle) が出てきます。

このように時間成分に対応する η に周期性を持たせると、有限温度での久保-Martin-Schwinger の関係と同じように、 ϕ に対して

$$\phi(\eta + \beta) = \phi(\eta) \quad (\beta = 2\pi)$$

という周期性が出てきます。ちなみに、有限温度では温度 T の逆数 $1/T$ による周期なので、時間を t とすれば $\phi(t - i/T) = \phi(t)$ という関係になっています。そして、 η 成分はフーリエ変換ができるので、ユークリッド化された ω は周期性によって離散化されて

$$\omega \Rightarrow i\omega_n = i \frac{2n\pi}{\beta} = in \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

となります。

ユークリッド化された状況での有効ポテンシャルをまともに求めるなら (1) に戻って積分を

$$-i \int d^4x \sqrt{-g} \Rightarrow - \int ds d^3x \sqrt{g_E} \quad (t = -is)$$

として、 $g_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu$ も $t = -is$ の置き換えをしたところから始めればいいです (g_E は正と定義されている)。このときは、 W は Z の $\exp$ 内の i が落ちているために

$$W = \log Z$$

となることに気をつけて同じようにしていけば、ユークリッド化した有効ポテンシャルが出てきます。しかし、この手順の結果として、有効ポテンシャルのユークリッド化は単に $p_0 = ip_4$ の変数変換をするだけで同じになるのが分かります。ようは、運動量表示に持って行って、運動量表示でのユークリッド化 $p_0 = ip_4$ をするという事です (「1 ループでの有効ポテンシャル」と同じことをしている)。なので、有効ポテンシャルのユークリッド化は

$$D(\omega, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp) \Rightarrow D = (ip_4, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp) = D_E(p_4, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp)$$

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \Rightarrow i \int \frac{dp_4}{2\pi}$$

とすればいいです。そして、今は離散化するので、 p_4 を離散的な ω_n にして

$$D(\omega, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp) \Rightarrow D_E(\omega_n, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp)$$

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \Rightarrow \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

と置き換えることになります。

これで状況は整ったので、ここからグリーン関数を求めます。グリーン関数 $D(x, x')$ の方程式は $(\eta, \rho, \mathbf{x}_\perp$ で書くのは面倒なので x を使います)

$$(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + M^2) D(x, x') = \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^4(x - x')$$

$$\sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + M^2) D(x, x') = \delta^4(x - x')$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \rho M^2 \right) D(x, x') = \delta^4(x - x')$$

これはまだユークリッド化されていません。これをフーリエ変換すると、 ρ 以外が変換されるので、右辺は ρ 以外のデルタ関数がなくなります。フーリエ変換した後の ϕ の式 (3) と同じにするために、フーリエ変換後に $-\rho$ を両辺にかけて

$$(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - (\alpha^2 \rho^2 - \omega^2)) D(\omega, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp) = -\rho \delta(\rho - \rho')$$

とします。これを求めた後に

$$D(\omega, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp) \Rightarrow D(i\omega_n, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp) = D_E(\omega_n, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp)$$

と ω を置き換えることで、有効ポテンシャル (2) の第二項はユークリッド化されます。

一応まとめておくと、求めるのはユークリッド化する前での (3) に対応するグリーン関数で、方程式は

$$(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \alpha^2 \rho^2 + \omega^2) \phi(\omega, \rho, \mathbf{k}_\perp) = 0$$

$$(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \alpha^2 \rho^2 + \omega^2) D(\omega, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp) = -\rho \delta(\rho - \rho')$$

と与えられています。これを求めるには、スツルム・リウビル系の方程式でのグリーン関数の導出方法を使えばいいです。一応簡単に見ておきます (スツルム・リウヴィル系の性質の証明は省きます)。

ϕ に対する方程式は、スツルム・リウヴィル系の固有関数と固有値の式と見て、固有関数を u_j 、固有値を Ω_j として

$$(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \alpha^2 \rho^2 + \Omega_j^2) u_j(\rho) = 0$$

と書けます。このとき、 $\Omega_j = \Omega$ ($0 \leq \Omega \leq \infty$) が分かっているので、連続な固有値 Ω 、固有関数 u_Ω と書き直して

$$(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \alpha^2 \rho^2 + \Omega^2) u_\Omega(\rho) = 0$$

これに対応する方程式として

$$(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \alpha^2 \rho^2 + \lambda) u(\rho) = g(\rho) \quad (5)$$

というのを作ったとき、任意の関数 $u(\rho)$ は固有関数 u_Ω によって

$$u(\rho) = \int_0^\infty d\Omega f_\Omega u_\Omega(\rho), \quad f_\Omega = \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u(\rho) u_\Omega(\rho) \quad (6)$$

と展開できます。 u_Ω の規格化は

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_{\Omega'}(\rho) u_\Omega(\rho) = \delta(\Omega - \Omega')$$

で与えられています。

ここで、 $g(\rho)$ を

$$g(\rho, \rho_1) = -\rho \delta(\rho - \rho_1)$$

として、(5) の方程式が求めたいグリーン関数の方程式になるようにします。見やすくするために

$$L = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \alpha^2 \rho^2$$

とすれば、2つの方程式は

$$L u_\Omega(\rho) = -\Omega^2 u_\Omega(\rho), \quad L u(\rho, \rho_1) + \lambda u(\rho, \rho_1) = -\rho \delta(\rho - \rho_1)$$

これらから

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u(\rho, \rho_1) L u_\Omega(\rho) &= -\Omega^2 \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u(\rho, \rho_1) u_\Omega(\rho) \\ \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_\Omega(\rho) L u(\rho, \rho_1) &= -\lambda \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_\Omega(\rho) u(\rho, \rho_1) - \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_\Omega(\rho) \rho \delta(\rho - \rho_1) \end{aligned}$$

左辺は同じになるので、二つを引くことで

$$\begin{aligned}
-\Omega^2 \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u(\rho, \rho_1) u_\Omega(\rho) + \lambda \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_\Omega(\rho) u(\rho, \rho_1) &= - \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_\Omega(\rho) \rho \delta(\rho - \rho_1) \\
(\lambda - \Omega^2) \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u(\rho, \rho_1) u_\Omega(\rho) &= - \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_\Omega(\rho) \rho \delta(\rho - \rho_1) \\
(\lambda - \Omega^2) \int_0^\infty d\Omega' f_{\Omega'} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_{\Omega'}(\rho) u_\Omega(\rho) &= - \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} u_\Omega(\rho) \rho \delta(\rho - \rho_1) \\
(\lambda - \Omega^2) f_\Omega &= - \int_0^\infty d\rho u_\Omega(\rho) \delta(\rho - \rho_1) \\
f_\Omega &= - \frac{1}{\lambda - \Omega^2} u_\Omega(\rho_1)
\end{aligned}$$

これを $u(\rho, \rho_1)$ の展開 (6) に入れると

$$u(\rho, \rho_1) = \int_0^\infty d\Omega f_\Omega u_\Omega(\rho) = - \int_0^\infty d\Omega \frac{u_\Omega(\rho) u_\Omega(\rho_1)}{\lambda - \Omega^2}$$

よって、 $u(\rho, \rho_1)$ が固有関数と固有値によって展開できるのが分かります。

$u(\rho, \rho_1)$ が今求めたいグリーン関数なので、記号を合わせることで $D(\rho, \rho')$ は

$$D(\rho, \rho') = - \int_0^\infty d\Omega \frac{\phi(\Omega, \rho) \phi(\Omega, \rho')}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$\phi(\Omega, \rho)$ は (4) です。後はこれをユークリッド化 $\omega = ip_4$ して離散化 $i\omega_n$ すれば $D_E(\omega_n, \rho, \rho')$ になるので

$$D_E(\omega_n, \rho, \rho') = - \int_0^\infty d\Omega \frac{\phi(\Omega, \rho) \phi(\Omega, \rho')}{(i\omega_n)^2 - \Omega^2} = \int_0^\infty d\Omega \frac{C^2 K_{i\Omega}(\alpha\rho) K_{i\Omega}(\alpha\rho')}{\omega_n^2 + \Omega^2}$$

となります。

これでグリーン関数が求まったので有効ポテンシャルの計算に戻ります。まず、有効ポテンシャルは、上で求めた (2) での第二項を Rindler 空間でのフーリエ変換を行った形にして

$$V(\phi_0) = -\mathcal{V}^{-1} I_{cl} - \frac{i}{2} \int_0^{M^2} dq^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} D(\omega, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp; q^2)$$

このユークリッド化は $\omega = ip_4$ となり、 η の周期性のために積分は ω_n に対する離散的な和になるので

$$V(\phi_0) = -\mathcal{V}^{-1} I_{cl} + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^\infty \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} D_E(\omega_n, \rho, \rho', \mathbf{k}_\perp; q^2)$$

ここからの計算は観測者の固有時間として行っていきます ($\rho = \rho' = a^{-1}$)。そうすると ρ は定数 a^{-1} になるので

$$\begin{aligned}
V(\phi_0) &= -\mathcal{V}^{-1}I_{cl} + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \sum_n \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{C^2 K_{i\Omega/a}^2(\frac{\alpha}{a})}{\omega_n^2 + \omega^2} \\
&= -\mathcal{V}^{-1}I_{cl} + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \sum_n \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega' \frac{1}{a} \frac{2a^{-1} \Omega' \sinh(\pi \Omega'/a)}{\pi^2} \frac{K_{i\Omega'/a}^2(\frac{\alpha}{a})}{\omega_n^2 + \Omega'^2/a^2} \quad (\Omega' = a\Omega) \\
&= -\mathcal{V}^{-1}I_{cl} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\pi^2 a} \sum_n \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega}{a} \sinh(\frac{\pi \omega}{a}) \frac{K_{i\Omega/a}^2(\frac{\alpha}{a})}{\omega_n^2 + \Omega^2/a^2} \\
&= -\mathcal{V}^{-1}I_{cl} + \frac{1}{2\pi^3 a} \sum_n \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega}{a} \sinh(\frac{\pi \Omega}{a}) \frac{K_{i\Omega/a}^2(\frac{\alpha}{a})}{\omega_n^2 + \Omega^2/a^2}
\end{aligned}$$

和の計算は、 $\omega_n = n$ なので

$$\sum_n \frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{\pi}{x} \left(1 + \frac{2}{e^{2\pi x} - 1}\right)$$

を使うことで

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi^3 a} \sum_n \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega}{a} \sinh(\frac{\pi \Omega}{a}) \frac{K_{i\Omega/a}^2(\frac{\alpha}{a})}{\omega_n^2 + \Omega^2/a^2} \\
&= \frac{1}{2\pi^3 a} \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega}{a} K_{i\Omega/a}^2(\frac{\alpha}{a}) \sinh(\frac{\pi \Omega}{a}) \frac{\pi a}{\Omega} \left(1 + \frac{2}{e^{2\pi \Omega/a} - 1}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi^3 a} \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega}{a} K_{i\Omega/a}^2(\frac{\alpha}{a}) \sinh(\frac{\pi \Omega}{a}) \frac{\pi a}{\Omega} \coth(\frac{2\pi \Omega}{2a}) \\
&= \frac{1}{2\pi^2 a} \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega K_{i\Omega/a}^2(\frac{\alpha}{a}) \sinh(\frac{\pi \Omega}{a}) \coth(\frac{\pi \Omega}{a}) \\
&= \frac{1}{2\pi^2 a} \int_0^{M^2} dq^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega K_{i\Omega/a}^2(\frac{\alpha}{a}) \cosh(\frac{\pi \Omega}{a})
\end{aligned}$$

途中で

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2} \coth(\frac{1}{2}x)$$

によって $\coth$ にしています。

ここでの目的は有効ポテンシャルをくり込みを含めて求めることではないので、必要な部分を計算します。知りたいのは対称性がどうなるのかなので、質量がどうなるか調べます。そのために、質量のくり込みを持ち込みます。ミンコフスキー空間での質量のくり込みは「1 ループでの有効ポテンシャル」で見たように

$$\frac{\partial V_M}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = \frac{1}{2} m_R^2$$

によって与えられ、 m_R がくり込まれた質量です ($V_M = V(a=0)$)。定義の問題でしかないですが

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 2\phi \frac{\partial V}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0} = 2 \frac{\partial V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0} + 2\phi \frac{\partial}{\partial \phi^2} \frac{\partial V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0} = 2 \frac{\partial V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0}$$

なので、 $1/2$ がついています。実際に、作用 I_{cl} では

$$\mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I_{cl}}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = \frac{1}{2} m^2$$

となっているので、 $1/2$ がついています (くり込みはラグランジアン上での質量をくり込まれた m_R にする)。同様に考えることで、今の場合も質量のくり込みは

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = \frac{1}{2} m_R^2(a)$$

と与えます。加速度 a がパラメータとして残るので、 $m_R^2(a)$ としています。
有効ポテンシャルを ϕ_0^2 で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{1}{2\pi^2 a} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{\partial}{\partial \phi_0^2} \int_0^{M^2} dq^2 K_{i\Omega/a}^2 \left(\frac{\alpha}{a} \right) \cosh\left(\frac{\pi\Omega}{a}\right) \Big|_{\phi_0=0} \\ &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{1}{2\pi^2 a} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{\lambda}{2} K_{i\Omega/a}^2 \left(\frac{\sqrt{k^2 + M^2}}{a} \right) \cosh\left(\frac{\pi\Omega}{a}\right) \Big|_{\phi_0=0} \\ &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{\lambda}{4\pi^2 a} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega K_{i\Omega/a}^2 \left(\frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{a} \right) \cosh\left(\frac{\pi\Omega}{a}\right) \quad (M^2 \Big|_{\phi_0=0} = m^2) \\ &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{\lambda}{4\pi^2 a} 2\pi \int_0^\infty \frac{dk |\mathbf{k}|}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega K_{i\Omega/a}^2 \left(\frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{a} \right) \cosh\left(\frac{\pi\Omega}{a}\right) \\ &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{\lambda}{8\pi^3 a} \int_0^\infty dk |\mathbf{k}| \int_0^\infty d\Omega K_{i\Omega/a}^2 \left(\frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{a} \right) \cosh\left(\frac{\pi\Omega}{a}\right) \end{aligned}$$

a に比べて質量 m が小さいとする、ベッセル関数の関係 (Γ はガンマ関数)

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dx K_m(\alpha x) K_n(\alpha x) x^l \\ &= 2^{l-2} \alpha^{-l-1} \Gamma^{-1}(l+1) \Gamma\left(\frac{l+m+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+m-n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l-m+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l-m-n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk K_{i\Omega/a}^2 k &= 2^{-1} (a^{-1})^{-2} \Gamma^{-1}(2) \Gamma\left(\frac{2+2i\Omega/a}{2}\right) \Gamma(1) \Gamma(1) \Gamma\left(\frac{2-2i\Omega/a}{2}\right) \\ &= \frac{a^2}{2} \Gamma\left(1 + \frac{i\Omega}{a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{i\Omega}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi a \Omega}{\sinh(\pi \Omega/a)} \end{aligned}$$

最後へはガンマ関数の関係

$$\Gamma(1 + \frac{i\Omega}{a}) = \frac{i\Omega}{a} \Gamma(\frac{i\Omega}{a})$$

$$\Gamma(1 + \frac{i\Omega}{a})\Gamma(1 - \frac{i\Omega}{a}) = \frac{i\Omega}{a} \Gamma(\frac{i\Omega}{a})\Gamma(1 - \frac{i\Omega}{a}) = \frac{i\Omega}{a} \frac{\pi}{\sin(i\pi\Omega/a)} = \frac{i\Omega}{a} \frac{\pi}{i \sinh(\pi\Omega/a)} = \frac{\Omega}{a} \frac{\pi}{\sinh(\pi\Omega/a)}$$

を使っています。よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{\lambda}{8\pi^3 a} \int_0^\infty d\Omega \cosh(\frac{\pi\Omega}{a}) \int_0^\infty dk |\mathbf{k}| K_{i\Omega/a}^2(\frac{k}{a}) \\ &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{\lambda}{8\pi^3 a} \int_0^\infty d\Omega \cosh(\frac{\pi\Omega}{a}) \frac{1}{2} \frac{\pi a \Omega}{\sinh(\pi\Omega/a)} \\ &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{\lambda}{8\pi^2} \int_0^\infty d\Omega \Omega \frac{1}{2} \coth(\frac{\pi\Omega}{a}) \\ &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{\lambda}{8\pi^2 a^2} \int_0^\infty d\Omega \Omega \frac{1}{2} (1 + \frac{2}{e^{2\pi\Omega/a} - 1}) \\ &= \mathcal{V}^{-1} \frac{\partial I}{\partial \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} + \frac{\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty d\Omega \Omega (1 + \frac{2}{e^{2\pi\Omega/a} - 1}) \end{aligned}$$

第二項の積分内の第一項は発散しますが、この発散はくり込みで処理できて、適当な有限の値になるはずで (a = 0 のときに同様の積分が出てくる)。なので、この項からの寄与は無視します。よって

$$\frac{m_R^2(a)}{2} = \frac{m_R^2}{2} + \frac{\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty d\Omega \frac{2\Omega}{e^{2\pi\Omega/a} - 1}$$

第二項の積分は

$$2 \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega}{e^{2\pi\Omega/a} - 1} = 2 \frac{1}{6} (\frac{a\pi}{2\pi})^2 = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

となるので

$$\frac{m_R^2(a)}{2} = \frac{m_R^2}{2} + \frac{\lambda a^2}{192\pi^2}$$

これが欲しかった結果です。

ここで「対称性の自発的破れ」の話を持ち込みます。ここまで見てきたラグランジアンは

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

で与えられていて、これは $\phi \rightarrow -\phi$ の対称性を持っています。この対称性を破るために質量項の符号を反転させて

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

にしたとします ($\mu^2 > 0$)。このとき、今求めた 1 ループまでの量は

$$m_R^2(a) = -\mu_R^2 + \frac{\lambda a^2}{96\pi^2}$$

となり、 $a = 0$ では $m_R^2(a)$ は負なので、 $\phi \rightarrow -\phi$ の対称性は破れたままです（質量項の符号が反転されたままなので、ポテンシャルの形がワインボトル型）。これはミンコフスキー空間での結果と同じです。しかし、今は第二項があるので、 a を大きくしていき $m_R^2(a)$ が 0 より大きくなれば、 $\phi \rightarrow -\phi$ の変換に対して対称性を持つようになります（ポテンシャルの形が U 字型になる）。つまり、加速度が

$$\mu_R^2 < \frac{\lambda a^2}{96\pi^2}$$

$$a^2 > \frac{96\pi^2}{\lambda} \mu_R^2$$

となったとき、対称性が回復します。なので、加速度によって対称性が回復するという現象が現れます（固有時間 τ の観測者に張り付いている粒子において）。さらに、ここで Unruh 効果による温度 T_U を

$$T_U = \frac{a}{2\pi}$$

によって入れてみると

$$T_U^2 = \frac{24}{\lambda} \mu_R^2$$

という対称性が破れているか回復しているかの臨界温度が出てきて、これよりも高い温度

$$T_U^2 > \frac{24}{\lambda} \mu_R^2$$

では対称性が回復していると言えます。

これと比較するために有限温度での結果を持ってきます。結果だけを持ってきてもいいですが、有限温度の場の理論での「対称性の回復」で複素スカラー場による

$$(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi^*(x)\phi(x) - \lambda'(\phi^*(x)\phi(x))^2$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda'}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2))$$

を計算しているので、これを今の場合に対応させます。今の I_{cl} に対応するポテンシャル部分は

$$\frac{1}{2}\mu^2\phi_0^2 - \frac{\lambda'}{4}\phi_0^4$$

となっています。これから λ' と実数スカラー場での λ とは、 $6\lambda' = \lambda$ と対応しています。後は有効ポテンシャルの計算において ϕ_2 からの寄与を消せばいいです。これは、例えば「対称性の回復」での質量のくり込みのところで

$$\left. \frac{d^2 m_1^2}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = 6\lambda', \quad \left. \frac{d^2 m_2^2}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = 2\lambda'$$

$$\left. \frac{d^2 V_1^{T'}}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = \frac{6+2}{24}\lambda' T'^2 = \frac{1}{3}\lambda' T'^2$$

という計算部分で、 m_2^2 からの寄与である $2\lambda'$ を消してやればいいです。そうすると、実数スカラー場としたときの温度 T とは

$$\frac{1}{3}\lambda'T'^2 = \frac{1}{4}\lambda'T^2$$

と対応するので

$$\frac{4}{3}T'^2 = T^2$$

となります。よって、「対称性の回復」での複素スカラー場での臨界温度の結果

$$T'^2 > \frac{3\mu_R^2}{\lambda'}$$

は、実数スカラー場では

$$\frac{4}{3}T'^2 > \frac{4}{3}6\frac{3\mu_R^2}{6\lambda'}$$

$$T^2 > \frac{4}{3}6\frac{3\mu_R^2}{\lambda}$$

$$T^2 > \frac{24}{\lambda}\mu_R^2$$

となります。これは T_U と同じ臨界温度になっています。つまり、Rindler 空間における加速度による対称性の回復が、Unruh 効果を踏まえることで、ミンコフスキー空間での対称性の回復する温度に対応します。これは、ミンコフスキー空間の真空が熱浴に見えるという Unruh 効果の解釈に従えば、予想通りの結果とも言えます。しかし、Unruh 効果自体よく分からないと言えばよく分からないものなので、この結果をどのように解釈するのかという問題はあります。

同じことは南部・Jona-Lasinio モデルでも求められていて、「Dynamical chiral symmetry breaking and its restoration for an accelerated observer」(hep-th/0407067) によれば、同じように有限温度の場合と一致するようです。南部・Jona-Lasinio モデルの場合、臨界温度 T_c (カイラル対称性に対する臨界温度) を

$$T_c = 100 \sim 200 \text{ (MeV)}$$

あたりに設定し、これを T_U と見なせば対応する加速度 a_c は、ケルビン K での温度

$$T_c \sim 10^{12} \text{ (K)}$$

から

$$a_c \sim 10^{34} \text{ (cm/s}^2\text{)} \quad (T_U = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c})$$

となります (1eV は約 11600K)。これがそうそう存在しない加速度であることは、中性子星の重力加速度が約 $10^{10} \text{ (cm/s}^2\text{)}$ (地球は約 $10^3 \text{ (cm/s}^2\text{)})$ だとされていることから分かります。