

真空のエネルギー密度

「クライン・ゴールドン方程式～実スカラー場～」とかでは運動量を連続に取っていましたが、ここでは離散的な場合を考えます。そのついでに、プレートに挟まれた真空のエネルギー密度を求めます。

質量 0 の実数スカラー場を考えます。質量を 0 にするのは簡単にするためと、後で電磁場の場合に変更しやすくするためです。なので、場 $\phi(x)$ は、質量 0 のクライン・ゴールドン方程式

$$\square\phi(x) = 0 \quad (1)$$

に従うとします。この解を求めますが、運動量を連続値にしないために、長さ L の範囲に限定します。これによって、境界 L で境界条件が必要になるので、周期的境界条件

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{n}L) = \phi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3))$$

を与えます。 n_i は整数です。これのもとで (1) を解けば、当然、平面波の解

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = C e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|, \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n})$$

が出てきます。規格化定数 C は通常通り粒子密度 (電荷密度) ρ を使って、3 次元体積 V の領域で

$$\int_V d^3x \rho = 1$$

とすることで決めます (空間体積 V の中に 1 つ粒子がいるという規格化)。共変的な規格化にするなら右辺を $2E$ にすればいいです (「規格化について」参照)。スカラー場の粒子密度は

$$\rho = i(\phi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \phi(x) - \phi(x) \frac{\partial}{\partial t} \phi^*(x))$$

なので

$$i \int_V d^3x (f_{\mathbf{k}}^* \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} - f_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^*}{\partial t}) = -iV(i\omega_{\mathbf{k}}C^2 + i\omega_{\mathbf{k}}C^2) = 2\omega_{\mathbf{k}}VC^2$$

よって、規格化定数は

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}}$$

となります。ちなみに、「クライン・ゴールドン場～複素スカラー場～」で定義したように、(1) の解 g に対する関数の内積

$$\langle g_1, g_2 \rangle = i \int d^3x (g_1^*(x) \frac{\partial}{\partial t} g_2(x) - g_2(x) \frac{\partial}{\partial t} g_1^*(x))$$

と同じです。内積記号を使えば、直交性を

$$\langle f_{\mathbf{k}}, f_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

と書けます ($\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ で 0 になるのはすぐに分かります)。 $\mathbf{k}$ は離散化されているので、クロネッカーデルタになります。

$\phi(\mathbf{x}, t)$ の展開は、離散化されているので積分でなく和になって

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t))$$

共役量 π との同時刻交換関係を

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi)$$

とすれば

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t)) (-i\omega_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) + i\omega_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t)) \\ &\quad - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (-i\omega_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) + i\omega_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t)) (a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t)) \\ &= - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} i\omega_{\mathbf{k}'} (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) - a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t)) \\ &\quad - a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t) + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} i\omega_{\mathbf{k}'} (a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) - a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t) f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t)) \\ &\quad + a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) - a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t) \\ &= i\omega_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} ([a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}] f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) + [a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t)) \\ &\quad + [a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}] f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) - [a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}] f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t) \end{aligned}$$

このとき、 $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}$ の交換関係を

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad , \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad , \quad [a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0 \quad (2)$$

とすることで

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} i\omega_{\mathbf{k}'} (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}', t) + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}', t)) \\
&= \sum_{\mathbf{k}} i\omega_{\mathbf{k}} (f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}', t) + f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) f_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}', t)) \\
&= \sum_{\mathbf{k}} i\omega_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}} V} (e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}) \\
&= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{i\omega_{\mathbf{k}}}{2\omega_{\mathbf{k}} V} (e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}) \\
&= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')
\end{aligned}$$

$2\pi/L$ で離散化された運動量 $\mathbf{k}$ での、連続極限としての積分

$$\sum_{\mathbf{k}} \Rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} (\Delta k)^3 \Rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (\Delta k = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3)$$

を使っています。よって、 $a^\dagger, a$ は交換関係 (2) を満たす生成、消滅演算子です。

ハミルトニアンを求めるには

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right)$$

に今の結果入れればいいですが、「クライン・ゴールドン場～実スカラー場～」と同じ計算なので

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger) \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger]) \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}) \tag{3}
\end{aligned}$$

3次元全運動量でも同様に

$$K = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$$

となります。

これで運動量が離散化している場合での基本的な話は終わりです。次にこれを使って真空のエネルギー密度を求めてみます。真空 $|0\rangle$ のエネルギーは物理的な状況を考える限り 0 とし、それに合わせるためにハミルトニアン (3) の第二項 (零点エネルギー) を測定の基準として無視しますが、それを計算してみます。

状況を設定します。まず、3次元空間上に z 軸方向の差が a となるように平行に 2 つプレート置きます。プレートの長さは L で、2次元面です。3次元座標で書けば、 $(x, y, 0)$ と (x, y, a) にプレートを置くということです。このとき、 a は L に比べて小さいとします。2つのプレート上での ϕ はプレートの静止系において同じ値を持っているとします。

真空のエネルギーは真空の状態 $|0\rangle$ でハミルトニアンを挟めばいいので

$$\langle 0|H|0\rangle$$

そうすると、当然真空の粒子数は 0 なので、ハミルトニアンの第一項は消えて第二項だけが残る

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}$$

今はプレートに挟まれた空間を考えているので、プレート間の体積 aL^2 で割ってエネルギー密度 ϵ にすると

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{aL^2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}$$

3次元運動量 $\mathbf{k}$ は全方向に対して周期的境界条件をとっているなら、 $n_{x,y,z}$ を整数として

$$k_{x,y} = \frac{2\pi}{L} n_{x,y}, \quad k_z = \frac{2\pi}{a} n_z$$

となるので $\omega_{\mathbf{k}}$ は

$$\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}| = \left(\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2) + \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 n_z^2 \right)^{1/2}$$

しかし、今はプレートの間に閉じ込めておきたいので、 z 方向に対しては境界で 0 になるという条件

$$\phi(z=0) = \phi(z=a) = 0$$

を使います。この境界条件では

$$k_z = \frac{\pi}{a} n_z$$

となるので、これに置き換えて

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2} = \left(\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2) + \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 n_z^2 \right)^{1/2}$$

このとき、 $n_{x,y}$ は $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ですが、 n_z は $1, 2, 3, \dots$ です。

計算したい和の形を見ると明らかに発散しているので、このままでは計算できません。なので、

$$\epsilon(a) = -\frac{1}{2} \frac{1}{aL^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{d\mu} \sum_{\mathbf{k}} e^{-\mu \omega_{\mathbf{k}}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{aL^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{d\mu} S(\mu, a)$$

と変形します。こうすれば、和は $e^{-\mu \omega_{\mathbf{k}}}$ に対してとるので発散しません ($\omega_{\mathbf{k}} \geq 0$)。 x, y 成分は $L \rightarrow \infty$ にして積分に書き換えてしまえば

$$\begin{aligned}
S(\mu, a) &= \sum_{\mathbf{k}} e^{-\mu \omega_{\mathbf{k}}} = \sum_{n_z=1}^{\infty} \sum_{n_x, n_y=-\infty}^{\infty} \exp[-\mu((\frac{2\pi}{L})^2(n_x^2 + n_y^2) + (\frac{\pi}{a})^2 n_z^2)^{1/2}] \\
&= \frac{L^2}{(2\pi)^2} \sum_{n_z=1}^{\infty} \int d^2k \exp[-\mu(k_x^2 + k_y^2 + (\frac{\pi}{a})^2 n_z^2)^{1/2}] \\
&= \frac{L^2}{2\pi} \sum_{n_z=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\rho \rho \exp[-\mu(\rho^2 + (\frac{\pi}{a})^2 n_z^2)^{1/2}] \\
&= \frac{L^2}{2\pi} \sum_{n_z=1}^{\infty} F(n_z)
\end{aligned}$$

ここでの ρ は $\rho = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ です。 ρ 積分は普通に実行できて

$$\begin{aligned}
F(n_z) &= \int_0^{\infty} d\rho \rho \exp[-\mu(\rho^2 + (\frac{\pi}{a})^2 n_z^2)^{1/2}] \\
&= \int_0^{\infty} d\rho \rho \exp[-\mu(\rho^2 + c_{n_z}^2)^{1/2}] \\
&= \int_{c_{n_z}}^{\infty} d\lambda \lambda \exp[-\mu\lambda] \quad (\lambda = (\rho^2 + c^2)^{1/2}) \\
&= -\frac{d}{d\mu} \int_{c_{n_z}}^{\infty} d\lambda \exp[-\mu\lambda] \\
&= -\frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{\mu} e^{-\mu c_{n_z}} \right) \\
&= -\left(-\frac{1}{\mu^2} - \frac{c_{n_z}}{\mu} \right) e^{-\mu c_{n_z}} \\
&= \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\pi n_z}{a} \right) \exp[-\mu \frac{\pi n_z}{a}]
\end{aligned}$$

ここでオイラー・マクローリンの公式 ($0 \sim a$ の区間で関数 $f(x)$ が解析的で、和が収束する)

$$\sum_{m=1}^{n-1} f(x_m) + \frac{1}{2}(f(0) + f(x_n)) = \int_0^a f(x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} (f^{(2m-1)}(a) - f^{(2m-1)}(0))$$

を使います。 $f^{(2m-1)}(a)$ は $f(x)$ を x で $2m-1$ 回微分して、 $x = a$ にするという意味です。 B_{2m} はベルヌーイ数です。また、オイラー・マクローリンの公式の変化版である Abel-Plana の公式

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) - \frac{1}{2}f(0) = \int_0^{\infty} dx f(x) + i \int_0^{\infty} dx \frac{1}{e^{2\pi x} - 1} (f(ix) - f(-ix))$$

を使っても求められます (Abel-Plana の公式からオイラー・マクローリンの公式を導出できる)。 $f(x)$ は複素平面の右半面で解析的である必要があります。

オイラー・マクローリンの公式を $0 \leq x < \infty$ の範囲とし、 $F(n_z)$ は n_z の無限大で 0 になることを使えば

$$\sum_{m=1}^{\infty} F(m) + \frac{1}{2}F(0) = \int_0^{\infty} F(x)dx - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} F^{(2m-1)}(0)$$

これによって

$$\sum_{n_z=1}^{\infty} F(n_z) = \int_0^{\infty} F(x)dx - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} F^{(2m-1)}(0) - \frac{1}{2}F(0)$$

右辺第一項の積分は、具体的に実行する必要がないので

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\pi x}{a} \right) \exp\left[-\mu \frac{\pi x}{a}\right] dx &= a \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{\pi l}{\mu} \right) \exp[-\pi \mu l] dl \quad (l = \frac{x}{a}) \\ &= aG(\mu) \end{aligned}$$

とします。 $G(\mu)$ は $\mu = 0$ で発散する項を持っています。

右辺第二項での $F(x)$ の微分をみてみると、 $m = 1$ では

$$\begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= \left(\frac{1}{\mu} \frac{\pi}{a} - \mu \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\pi x}{a} \right) \right) \exp\left[-\mu \frac{\pi x}{a}\right] \Big|_{x=0} \\ &= \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} - \frac{\pi x}{a} \right) \exp\left[-\mu \frac{\pi x}{a}\right] \Big|_{x=0} \\ &= - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 x \exp\left[-\mu \frac{\pi x}{a}\right] \Big|_{x=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$m = 2$ では

$$\begin{aligned} \frac{d^3 F(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} &= - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2}{dx^2} (x \exp[-\mu \frac{\pi x}{a}]) \Big|_{x=0} \\ &= - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{d}{dx} (1 - \mu \frac{\pi x}{a}) \exp[-\mu \frac{\pi x}{a}] \Big|_{x=0} \\ &= - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(-\mu \frac{\pi}{a} - \mu \frac{\pi}{a} (1 - \mu \frac{\pi x}{a}) \right) \exp[-\mu \frac{\pi x}{a}] \Big|_{x=0} \\ &= - \mu \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 (-2 + \mu \frac{\pi x}{a}) \exp[-\mu \frac{\pi x}{a}] \Big|_{x=0} \\ &= 2\mu \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 \end{aligned}$$

$m \geq 3$ の微分は同様に行っていくと、 μ^2 が係数として出てきます。なので、これより上の微分は、最後に μ 微分を行って、 $\mu = 0$ の極限をとるときに消えます。

というわけで

$$\begin{aligned}
\sum_{n_z=1}^{\infty} F(n_z) &= aG(\mu) - \frac{B_4}{4!} F^{(2)}(0) - \frac{1}{2} F(0) + O(\mu^2) \\
&= aG(\mu) + \frac{1}{30} \frac{1}{4!} 2\mu \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 - \frac{1}{2\mu^2} + O(\mu^2) \\
&= aG(\mu) + \frac{\pi^3}{360a^3} \mu - \frac{1}{2\mu^2} + O(\mu^2)
\end{aligned}$$

を考えればいいです。ベルヌーイ数は $B_4 = -1/30$ です。第3項は $\mu = 0$ で発散する項なので $G(\mu)$ の中に含めて

$$S(\mu, a) = \frac{L^2}{2\pi} \sum_{n_z=1}^{\infty} F(n_z) = \frac{L^2}{2\pi} \left(aG(\mu) + \frac{\pi^3}{360a^3} \mu + O(\mu^2) \right)$$

これによってエネルギー密度は

$$\begin{aligned}
\epsilon(a) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{aL^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{d\mu} S(\mu, a) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{aL^2} \frac{L^2}{2\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{d\mu} \left(aG(\mu) + \frac{\pi^3}{360a^3} \mu \right) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{aL^2} \frac{L^2}{2\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{d\mu} \left(aG(\mu) + \frac{\pi^3}{360a^3} \mu \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{d\mu} G(\mu) - \frac{\pi^2}{1440a^4}
\end{aligned}$$

今考えている状況は間隔 a の2つのプレート間なので、物理的な空間であるミンコフスキー空間の真空エネルギーにはなっていないですが、ミンコフスキー空間との対応を持っているべきです。

プレート間の距離 a を無限大にとることで、運動量空間で z 方向も連続値になるので、ミンコフスキー空間になります。そして、ミンコフスキー空間の真空エネルギーは真空の定義から0になるべきです。このことを踏まえれば

$$\epsilon(a = \infty) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{d\mu} G(\mu)$$

のときに、真空エネルギー密度は0になれという条件を課すことで、ミンコフスキー空間と対応を取ります。よって

$$\epsilon(a) = \epsilon(a, \mu) - \epsilon(\infty, \mu) = -\frac{\pi^2}{1440a^4}$$

これがプレート間の真空のエネルギー密度となります。

この結果は電磁場に簡単に変更できます。電磁場は質量0、スピン0のボソンなので、ここでの状況とほぼ同じです。違うのは電磁場では偏極による自由度が2あることです。よって、2倍するだけで電磁場になり、電磁場があるプレート(導電性の板)間の真空エネルギー密度は

$$\epsilon_{em}(a) = -\frac{\pi^2}{720a^4}$$

これに電磁場があるプレート上の面積 A による体積 aA をかけてエネルギーにした $aA\epsilon_{em}(a)$ を a で微分して、力 F とした

$$\frac{F}{A} = -\frac{d}{da}(a\epsilon_{em}(a)) = \frac{\pi^2}{720a^4} - \frac{\pi^2}{180a^4} = -\frac{\pi^2}{240a^4}$$

このことをカシミール力 (Casimir force) と言います。 $aA\epsilon_{em}(a)$ はプレートを離していくことで増えていくので、プレート間に引力が働いていると考えられ、それがカシミール力です (このため $-d/da$ で微分している)。これは 1997 年に実験で観測された現象で、カシミール効果と呼ばれます。