ワード・高橋恒等式

ワード恒等式とそれを一般化したワード・高橋恒等式は、1 PI 頂点関数と伝播関数の関係を示し、全てのオーダーで成り立っている関係式です。そもそもワード・高橋恒等式は QED が持つべき対称性であるゲージ不変性を要求することによって導かれる恒等式です。というわけで、経路積分の方式から始めて理論にゲージ不変性を要求するように見ていきます。これは、シュウィンガー・ダイソン方程式のところで見た保存則の出し方を電磁場でやろうというもので、演算子形式でなく有効作用を用いた形で求めます。

QED の生成汎関数 Z は

$$Z = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[i \int d^4x \ \mathcal{L}_{eff} \right]$$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

ラグランジアン密度は当然のごとく電磁場とディラック場とそれらによる相互作用項によって構成します。ゲージはローレンツゲージをとって、ゴースト項も電磁場なので落としています。

源 $J, \eta, \overline{\eta}$ なしでの $\mathcal{L}$ はゲージ固定項のせいでゲージ不変ではなくなっています ($\mathcal{L}$ からゲージ固定項を除いて Z を作っても源のせいでゲージ不変にはなっていない)。物理はゲージに依存しないはずなので、グリーン関数を導く Z はゲージ不変でなくてはなりません。つまり、Z がゲージ不変になっているとして、そのためにはどうなっていればいいのかを導いてやります。

ゲージ変換による動きを実際に見るために無限小ゲージ変換として

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x) \ , \ \psi \to \psi + ie\Lambda(x)\psi \ , \ \overline{\psi} \to \overline{\psi} - ie\Lambda(x)\overline{\psi}$$

これに対して $\mathcal{L}_{eff}$ の第三項までは不変です。残りの項は

$$\exp\left[i \int d^4x \ \left(-\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu(A_\mu - \partial_\mu\Lambda))^2 + J^\mu(A_\mu - \partial_\mu\Lambda) + \overline{\eta}(\psi + ie\Lambda\psi) + (\overline{\psi} - ie\Lambda\overline{\psi})\eta \right) \right]$$
$$= \exp\left[i \int d^4x \ \left(-\frac{1}{2\alpha}\left((\partial^\mu A_\mu)^2 + (\Box\Lambda)^2 - 2(\partial^\mu A_\mu)\Box\Lambda\right) + J^\mu(A_\mu - \partial_\mu\Lambda) + \overline{\eta}(\psi + ie\Lambda\psi) + (\overline{\psi} - ie\Lambda\overline{\psi})\eta \right) \right]$$

となり、Λ の 1 次までで考えることにして $(\Box\Lambda)^2$ は無視すれば余計な項として

$$\exp\left[i \int d^4x \ \left(\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)\Box\Lambda - J^\mu\partial_\mu\Lambda + ie\Lambda(\overline{\eta}\psi - \overline{\psi}\eta) \right) \right]$$

こんなのが出てきます。これを部分積分によって Λ に微分がかからないように外にくくり出して、Λ の 1 次まで展開すると

$$\exp\left[i\int d^4x\ \left(\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)\Box - J^\mu\partial_\mu + ie(\overline{\eta}\psi - \overline{\psi}\eta)\right)\Lambda\right]$$
$$= \exp\left[i\int d^4x\ \Lambda\left(\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\mu A_\mu) + \partial_\mu J^\mu + ie(\overline{\eta}\psi - \overline{\psi}\eta)\right)\right]$$
$$= 1 + i\int d^4x\Lambda\left(\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\mu A_\mu) + \partial_\mu J^\mu + ie(\overline{\eta}\psi - \overline{\psi}\eta)\right)$$

で、Z がゲージ不変であることを要求すると、これと Z の積は 0 になるはずです。分かりやすくするために全体を書けば、Z はゲージ変換によって

$$\begin{aligned} Z &= N\int \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{eff}\right] \\ &\Rightarrow\ N\int \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left[i\int d^4x\ \mathcal{L}_{eff}\right] \\ &\qquad\qquad \times\exp\left[i\int d^4x\ \left(\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A_\mu)\Box\Lambda - J^\mu\partial_\mu\Lambda + ie\Lambda(\overline{\eta}\psi - \overline{\psi}\eta)\right)\right] \\ &= Z + i\int d^4x\Lambda\left(\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\mu A_\mu) + \partial_\mu J^\mu + ie(\overline{\eta}\psi - \overline{\psi}\eta)\right)Z \end{aligned}$$

二行目に行くときにゲージ変換を行っています (第二項で Z の外に出ているように書いていますが、ここではまだ正確には $\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi$ の積分が作用しているように書かれます)。よって、任意の Λ に対して第二項が 0 になれば Z はゲージ不変になります。

0 であるためにはどうなっているのか見たいので、第二項を計算していきます。生成汎関数の前に場がいるときは演算子として

$$\psi \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\ ,\ \overline{\psi} \to -\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\ ,\ A_\mu \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu}$$

このように置き換えられ、そうすると $\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi$ の積分の外に出せるので

$$\left(\frac{i}{\alpha}\Box(\partial^\mu\frac{\delta}{\delta J^\mu}) - \partial_\mu J^\mu - e(\overline{\eta}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}} - \eta\frac{\delta}{\delta\eta})\right)Z = 0$$

Z を connected のみを導く $Z = e^{iW}$ に変えれば

$$\begin{aligned} &\left(\frac{i}{\alpha}\Box\big(\partial^\mu\frac{\delta}{\delta J^\mu}\big) - \partial_\mu J^\mu - e\big(\overline{\eta}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}} - \eta\frac{\delta}{\delta\eta}\big)\right)e^{iW} \\ &\qquad = \left(-\frac{1}{\alpha}\Box\big(\partial^\mu\frac{\delta W}{\delta J^\mu}\big) - \partial_\mu J^\mu - ie\big(\overline{\eta}\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}} - \eta\frac{\delta W}{\delta\eta}\big)\right)e^{iW} \end{aligned}$$

となるので

$$-\frac{1}{\alpha}\Box\big(\partial^\mu\frac{\delta W}{\delta J^\mu}\big) - \partial_\mu J^\mu - ie\big(\overline{\eta}\frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}} - \eta\frac{\delta W}{\delta\eta}\big) = 0$$

となります。これを有効作用 Γ に置き換えたいので

$$\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]=W[\eta,\overline{\eta},J_\mu]-\int d^4x(\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta+J^\mu A_\mu)$$

から

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)}=-\int d^4y\delta^4(y-x)J^\mu(y)=-J^\mu(x)\ ,\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}=\overline{\eta}(x)\ ,\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)}=-\eta(x)$$

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)}=A^\mu(x)\ ,\ \frac{\delta W}{\delta\overline{\eta}(x)}=\psi(x)\ ,\ \frac{\delta W}{\delta\eta(x)}=-\overline{\psi}(x)$$

グラスマン数の微分は左から作用するようにしているので、例えば $\psi\overline{\eta}$ を $\overline{\eta}$ で微分するときには符号が反転します。これらを使って

$$-\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\mu A_\mu(x))+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)}-ie\big(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x)-\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(x)\big)=0$$

これが、ゲージ不変性を要求したときに出てくる関係式で、ワード・高橋恒等式と一般的に呼ばれるものの原型で、ここから式変形されたもの全てがワード・高橋恒等式と呼ばれます。

導出を見ればわかるように、第一項がゲージ固定項による項です。ワード・高橋恒等式は最初からゲージ固定項がないとして導出されることもあり、そうすると第一項を除いた形で与えられます。むしろラグランジアンがゲージ対称性を持っているときの保存則としてワード・高橋恒等式が出てくる、というのが概念なのでゲージ固定項を除いたほうがまっすぐですし、ほとんどの本でそうしています。ゲージ固定項を加えたことによってわかるのは、$A^\nu(y)$ で微分して $\psi=\overline{\psi}=A_\mu=0$ とした関係

$$-\frac{1}{\alpha}\Box(\partial^\nu\delta^4(x-y))+\partial_\mu\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(x)\delta A_\nu(y)}=0$$

これより、ゲージパラメータに対するくり込み定数がどうなっているのかということです。この二つの違いは大雑把に言えば、光子の伝播関数を定義できる状況で始めるか、ラグランジアンがゲージ不変性を持った状況で始めるかの違いです。ただし、両方に言えることは最終的には理論 (生成汎関数、グリーン関数) をゲージ不変にするということで、上の式はそのための厳密な伝播関数の逆の形に対する条件を与えています。このことからわかることがあります。厳密な光子の伝播関数は QED や「自己エネルギーと頂点関数」で触れたように真空偏極がくっついたものなので、実はこれの第二項はマクスウェル方程式に真空偏極が足された形になっています (ゲージ不変なラグランジアンから始めるとマクスェル方程式は作れるが伝播関数は定義できない)。つまり、マクスウェル方程式は ∂_μ がかかることで消えるので、これは真空偏極部分 $\Pi^{\mu\nu}$ がゲージ不変であるための条件式を与えます (運動量表示で $q_\mu\Pi^{\mu\nu}(q^2)=0$)。このために、真空偏極のゲージ不変性に対する関係 $q_\mu\Pi^{\mu\nu}(q^2)=0$ もワード・高橋恒等式の結果として説明されます (ゲージ固定項を含めて始めると第一項が出てくるのは、これがないとゲージ固定項ありのマクスウェル方程式が消えてくれないからです)。というわけで、ゲージ不変性の要求による真空偏極への条件は伝播関数が定義できようができなかろうが出てくるので、ゲージ固定項はあってもなくても関係ないです ($\delta^2\Gamma/\delta A\delta A$ の形は「シュウィンガー・ダイソン方程式〜QED〜」を見てください)。

また、ゲージ固定項によるゲージ不変性がなくなったことをさらに踏み込んだのが BRS 変換で、ゲージ固定項とゴースト項も含めたラグランジアンは BRS 対称性を持ち、これによって同じように恒等式が導かれます (Slavnov-Taylor 恒等式)。

次に、ワード・高橋恒等式と言えば大抵は電子の伝播関数と頂点の関係を指すので、それを見ていきます。この時には今見ていたゲージ固定項は全く関係してきません。

$\overline{\psi}(x_1),\psi(y_1)$ で微分すると

$$\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)}$$

$$= \frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x_1)}\Big(ie\Big(\frac{\delta^2\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\psi(y_1)\delta\psi(x)}\psi(x) - \delta(x-y_1)\frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\psi(x)} - \frac{\delta^2\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\psi(y_1)\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(x)\Big)\Big)$$

$$= ie\Big(\frac{\delta^3\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta\psi(x)}\psi(x) - \frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(x)}\delta^4(x-y_1) - \frac{i\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\overline{\psi}(x_1)\psi(y_1)\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(x) - \frac{\delta\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\psi(y_1)\delta\overline{\psi}(x)}\delta^4(x-x_1)\Big)$$

これで $\overline{\psi}=\psi=A_\mu=0$ として

$$\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)}\Big|_{\overline{\psi}=\psi=A_\mu=0} = -ie\delta^4(x-y_1)\frac{\delta^2\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(x)}\Big|_{\overline{\psi}=\psi=A_\mu=0} + ie\delta^4(x-x_1)\frac{\delta^2\Gamma[\psi,\overline{\psi},A_\mu]}{\delta\overline{\psi}(x)\delta\psi(y_1)}\Big|_{\overline{\psi}=\psi=A_\mu=0} \quad (1)$$

この式は、左辺は 1PI での電子と光子による頂点を微分したもので、右辺は伝播関数の逆です (その伝播関数を S と表記します)。

これを運動量表示に直すのに、n 点相関関数のフーリ変換の定義として

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \cdots e^{i(p_1x_1-p_2x_2\cdots)}G(x_1,x_2,\cdots) = (2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2\cdots)G(p_1,p_2,\cdots)$$

右辺のデルタ関数は運動量保存を表すものです。同様に有効作用に対しても

$$\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'x_1-py_1-qx)}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)}\Big|_{\overline{\psi}=\psi=A_\mu=0} = e(2\pi)^4\delta^4(p'-p-q)\Gamma_\mu(p,q,p')$$

右辺の電荷 e は最低次の頂点に対応させるためにつけています。そして 2 点相関関数の場合は、最低次の自由な伝播関数 S_0 でなく、自己エネルギーのところで出てきた高次も含めた厳密な伝播関数 S として扱うんですが、このとき簡単のために伝播関数の i をなくしてしまって

$$S(p)\Gamma^{(2)}(p) = 1$$

と定義します。そうすると、

$$\begin{aligned}\int d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'x_1-py_1)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)}\Big|_{\overline{\psi}=\psi=A_\mu=0} &= -\int d^4x_1 d^4y_1 e^{i(p'x_1-py_1)}S^{-1}(x_1,y_1)\\ &= -(2\pi)^4\delta^4(p'-p)S^{-1}(p,p')\end{aligned}$$

$\delta^2\Gamma/\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)$ が $-S^{-1}(x_1,y_1)$ というのは、「自己エネルギーと頂点関数」(こっちは S に i を含めて定義しているのでは注意してください) を見てください。これを踏まえて、元の式に $\exp[i(p'x_1-py_1-qx)]$ をかけて x,x_1,y_1 で積分します

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)}\Big|_{\overline{\psi}=\psi=A_\mu=0} \Rightarrow \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)}$$

と書くことにして、右辺第一項は

$$\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(x)} \exp[i(p'x_1 - py_1 - qx)]\delta^4(x - y_1)$$

$$= \int d^4x_1 d^4y_1 \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)} \exp[i(p'x_1 - py_1 - qy_1)]$$

$$= \int d^4x_1 d^4y_1 \frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)} \exp[ip'x_1] \exp[-i(p+q)y_1]$$

$$= -(2\pi)^4\delta^4(p' - (p+q))S^{-1}(p+q)$$

第二項

$$\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 \frac{\delta\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x)\delta\psi(y_1)} \exp[i(p'x_1 - py_1 - qx)]\delta^4(x - x_1)$$

$$= \int d^4x_1 d^4y_1 \frac{\delta\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)} \exp[i(p'x_1 - py_1 - qx_1)]$$

$$= \int d^4x_1 d^4y_1 \frac{\delta\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)} \exp[i(p' - q)x_1] \exp[-ipy_1)]$$

$$= -(2\pi)^4\delta((p' - q) - p)S^{-1}(p)$$

左辺

$$\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 (\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)}) \exp[i(p'x_1 - py_1 - qx)]$$

$$= -\int d^4x d^4x_1 d^4y_1 \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)} \partial_\mu \exp[i(p'x_1 - py_1 - qx)]$$

$$= iq_\mu \int d^4x d^4x_1 d^4y_1 \frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\overline{\psi}(x_1)\delta\psi(y_1)\delta A_\mu(x)} \exp[i(p'x_1 - py_1 - qx)]$$

$$= ieq_\mu(2\pi)^4\delta(p' - p - q)\Gamma^\mu(p, q, p')$$

よって (1) にこれらを代入することで

$$\begin{aligned} ieq^\mu(2\pi)^4\delta(p' - p - q)\Gamma_\mu(p, q, p') &= ie(2\pi)^4\delta^4(p' - p - q)S^{-1}(p+q) - ie\delta(p' - q - p)S^{-1}(p)) \\ q^\mu\Gamma_\mu(p, q, p+q) &= S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p) \end{aligned}$$

これが QED においてワード・高橋恒等式とよく呼ばれるものです。伝播関数に i を含めた定義にしたければ両辺に i を掛ければいいだけです。頂点 $\Gamma_\mu(p, q, p+q)$ の構造は運動量 p を持ったフェルミオンが頂点部分で運動量 q を持った光子のエネルギーを吸収して、$p+q$ の運動量を持って外に出て行くといったものです。

$q_\mu \to 0$ の極限にすることで

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 0}\Gamma_\mu(p,q,p+q) &= \lim_{q\to 0}\frac{S^{-1}(p+q)-S^{-1}(p)}{q^\mu}\\ &= \frac{\partial S^{-1}}{\partial p^\mu}\end{aligned}$$

QED で出てきたワード恒等式となります。S^{-1} は最も低いオーダではただのディラック場の伝播関数なので

$$S_0^{-1}(p)=\gamma_\mu p^\mu - m$$

なので

$$\frac{\partial S_0^{-1}}{\partial p^\mu}=\gamma_\mu$$

となります。また $S^{-1}S=1$ を微分して、ワード恒等式を使えば

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_0^{-1}}{\partial p^\mu}S_0+S_0^{-1}\frac{\partial S_0}{\partial p^\mu} &= 0\\ \frac{\partial S_0}{\partial p^\mu} &= -S_0\frac{\partial S_0^{-1}}{\partial p^\mu}S_0\\ \frac{\partial S_0}{\partial p^\mu} &= -S_0\gamma_\mu S_0 \qquad (2)\end{aligned}$$

という関係が導かれます。
今度はオーダを増やして、そこでもワード恒等式が成立していることを見ていきます

$$\begin{aligned}iS' &= iS_0+iS_0\frac{\Sigma}{i}iS_0+iS_0\frac{\Sigma}{i}iS_0\frac{\Sigma}{i}iS_0+\cdots\\ &= iS_0(1+\frac{\Sigma}{i}iS')\end{aligned}$$

これの逆は

$$\begin{aligned}S'^{-1} &= S_0^{-1}(1+\Sigma S')^{-1}\\ \frac{1+\Sigma S'}{S'} &= S_0^{-1}\\ S'^{-1}+\Sigma &= S_0^{-1}\\ S'^{-1} &= S_0^{-1}-\Sigma\end{aligned}$$

これを p^μ で微分してみると

$$\begin{aligned}\frac{\partial S'^{-1}}{\partial p^\mu} &= \frac{\partial S_0^{-1}}{\partial p^\mu}-\frac{\partial\Sigma}{\partial p^\mu}\\ &= \gamma_\mu-\frac{\partial\Sigma}{\partial p^\mu}\end{aligned}$$

次に頂点関数を

$$\Gamma(p,q,p+q) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p,q,p+q)$$

のように書くとして、ワード恒等式を適用させれば

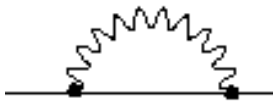
$$\Gamma(p,0,p) = \gamma_\mu - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu}$$

なので $\Lambda_\mu(p,0,p)$ と自己エネルギー部分は関係として

$$\Lambda_\mu(p,0,p) = -\frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu}$$

また、QED での自己エネルギー部分は光子の伝播関数が出ているので

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma}{i} &= (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \gamma^\mu \frac{i}{\gamma(p-k)-m} \gamma^\nu \\
&= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\mu \frac{1}{\gamma(p-k)-m} \gamma_\mu \\
&= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma_\mu
\end{aligned}$$

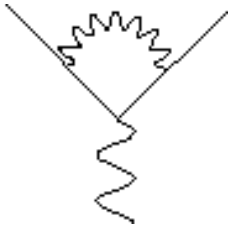


光子の伝播関数はファインマンゲージをとっています。これを p^μ で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\mu \frac{\partial S_0(p-k)}{\partial p^\mu} \gamma_\mu \\
&= ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\mu S_0(p-k) \gamma_\nu S_0(p-k) \gamma_\mu
\end{aligned}$$

(2) を使っています。頂点関数の補正 (QED でやった頂点補正) に対しては

$$\begin{aligned}
-ie\Lambda_\mu(p,q,p+q) &= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ig_{\mu\nu}}{k^2} \gamma^\mu \frac{i}{\gamma(p-k)-m} \gamma_\lambda \frac{i}{\gamma(p-k+q)-m} \gamma^\nu \\
&= -e^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\mu S(p-k) \gamma_\lambda S(p-k+q) \gamma_\mu
\end{aligned}$$



なので

$$\Lambda_\mu(p,q,p+q) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\mu S(p-k)\gamma_\lambda S(p-k+q)\gamma_\mu$$

この自己エネルギーと頂点補正を比べると

$$-\frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \gamma^\mu S(p-k)\gamma_\nu S(p-k)\gamma_\mu = \Lambda_\mu(p,0,p)$$

となることからワード恒等式は満たされていることがわかります。
　今見てきていたワード・高橋恒等式

$$q^\mu \Gamma_\mu(p,q,p-q) = S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p)$$

は QED に対するゲージ不変性の要求によって導かれたものでしたが、これはそのまま QED の S 行列のゲージ不変性も表すことになります。どういうことかというと、光子の外線の偏極ベクトル (波動関数)ϵ_μ のゲージ変換 $\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + \alpha q_\mu$ に対して振幅は不変だということです。つまり、不変振幅 $\mathcal{M}^\mu$ を使って表現すれば

$$q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$$

ということで、これもワード恒等式と呼ばれます。このことについてもう少し詳しく見ていきます。
　直交性と完備性を満たす状態 $|n>$ を始状態として、終状態 $|m>$ に散乱されるというものを考えます。全ての終状態への確率を足し合わせれば当然

$$\sum_m |<m|S|n>|^2 = 1$$

こうなります。S 行列を「S 行列」でやったように

$$S = 1 + iT$$

と分解すると、ユニタリー性より

$$\begin{aligned} (1-iT^\dagger)(1+iT) &= 1 \\ 1 + iT - iT^\dagger + T^\dagger T &= \end{aligned}$$

なので

$$T - T^\dagger = iT^\dagger T$$

また、$T - T^\dagger = 2i\mathrm{Im}T$ (例えば、$A + iA^* - A + iA^* = 2iA^* = 2i\mathrm{Im}A$) から

$$2\mathrm{Im}T = T^\dagger T = TT^\dagger$$

となります。これを 2 粒子状態から 2 粒子状態への散乱だとしたら

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Im} < p_3' p_4' | T | p_1 p_2 > &= < p_3' p_4' | T T^\dagger | p_1 p_2 > \\
&= \sum_n < p_3' p_4' | T | n >< n | T^\dagger | p_1 p_2 > \\
&= \sum_n < p_3' p_4' | T | n > (< p_1 p_2 | T | n >)^*
\end{aligned}
$$

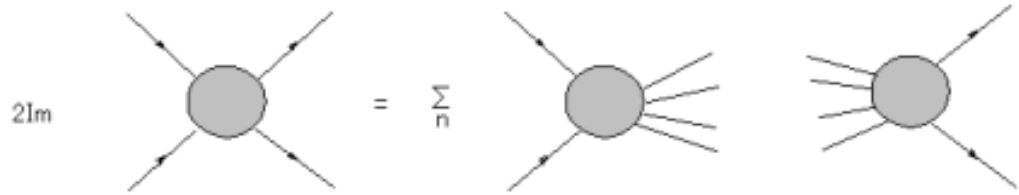
$T = (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) M$ として、状態 $|n>$ を運動量 k_i をもった多粒子状態にすれば

$$
\begin{aligned}
&2(2\pi)^4 \delta(p_3' + p_4' - p_1 - p_2) \mathrm{Im} \langle p_3' p_4' | M | p_1 p_2 \rangle \\
&= (2\pi)^8 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2E_1} \delta^4(p_1 + p_2 - k_1) \delta^4(p_3' + p_4' - k_1) \langle p_3' p_4' | M | k_1 \rangle (\langle p_1 p_2 | M | k_1 \rangle)^* \\
&\quad + (2\pi)^8 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2E_2} \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \delta^4(p_3' + p_4' - k_1 - k_2) \langle p_3' p_4' | M | k_1 k_2 \rangle \big(\langle p_1 p_2 | M | k_1 k_2 \rangle \big)^* \\
&\quad + \cdots \\
&= (2\pi)^8 \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) \delta^4\big(p_1 + p_2 - \sum_i k_i\big) \delta^4\big(p_3' + p_4' - \sum_i k_i\big) \langle p_3' p_4' | M | \{k_i\} \rangle \big(\langle p_1 p_2 | M | \{k_i\} \rangle \big)^*
\end{aligned}
$$

よって

$$
2\mathrm{Im}\mathcal{M}(p_1 p_2 \to p_3' p_4') = (2\pi)^4 \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) \delta^4\big(p_1 + p_2 - \sum_i k_i\big) \mathcal{M}(p_3' p_4' \to \{k_i\}) \mathcal{M}^*(p_1 p_2 \to \{k_i\})
$$

これを光学定理 (optical theorem) と言い、散乱の虚数部の振幅は可能な中間状態の和をとったものと等しいというものです。図にすれば



細かいことを言うと、各中間状態の線の数 n に対応した対称因子として $1/n!$ で割る必要があります。

これを電子-陽電子散乱に当てはめてみます。電子が p_1、陽電子が p_2 を持って入射し、電子が p_3、 陽電子が p_4 をもって出て行くとします。まず、ファインマン則より不変振幅は

$$
\mathcal{M} = (-ie)^2 \overline{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \overline{u}(p_3) \gamma_\nu v(p_4)
$$

細かいことがグダグダとあるんですがそこら辺の話は飛ばして、大まかに話を進めていきます。まず、今見たいのは中間部分である光子の伝播関数部分で、そこだけ取り出して

$$
\delta\mathcal{M} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}
$$

こんな感じに書いておきます。これの虚数部分である $\mathrm{Im}\delta\mathcal{M}$ の表現を得たいんですが、関係式 (P は主値)

$$\frac{1}{q^2+i\epsilon} = P\frac{1}{q^2} \mp i\pi\delta^4(q^2)$$

を使うことで虚部は

$$\mathrm{Im}\frac{g^{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} = -i\pi g^{\mu\nu}\delta^4(q^2)$$

となります。このとき $q^2=0$ で質量殻にのります (q_0 は正)。偏極ベクトルを用いると

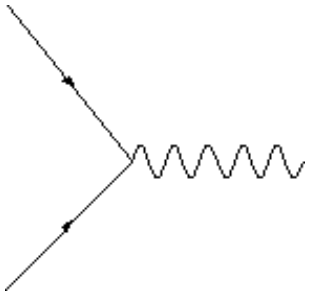
$$\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu}$$

なので

$$\mathrm{Im}\mathcal{M} = M^\mu\left(\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)}\right)M^{\nu\dagger}$$

余計な定数とかは全て M^μ の中にいれています。これを見てみると、偏極ベクトルが 4 成分あるために $\mathcal{M}$ の虚数部分では、光子が実在するものではなくなっています。このことをよくみるために、散乱過程を半分だけにして、尚且つ光子の偏極を $\lambda=1,2$ として実在するものにします。

そうすると散乱



に対する不変振幅は余計な定数が入っていることを無視すれば M^μ そのもので、そこに光子の ϵ_μ をかければ振幅になります

$$B = M^\mu\epsilon_\mu(q,\lambda)\ \ (\lambda=1,2)$$

これと $B^\dagger$ をかけることで、半分にする前と同じ式にできるので

$$BB^\dagger = M^\mu\sum_{\lambda=1,2}\epsilon_\mu(q,\lambda)\epsilon_\nu(q,\lambda)M^{\nu\dagger}$$

これは言い換えれば前の式から余計な偏極の寄与を取り除いたものなので

$$M^\mu\sum_{\lambda=0,3}\epsilon_\mu(q,\lambda)\epsilon_\nu(q,\lambda)M^\nu = 0$$

$$M^{\mu}\left(\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon_{\mu}(q,\lambda)\epsilon_{\nu}(q,\lambda)-\sum_{\lambda=1,2}\epsilon_{\mu}(q,\lambda)\epsilon_{\nu}(q,\lambda)\right)M^{\nu\dagger}=0$$

であれば問題ないことになります。そして、B がゲージ不変であるためには

$$q_{\mu}M^{\mu}=0$$

こんな関係であればいいことがわかり、これはワード恒等式です。つまり $\epsilon_{\mu}M^{\mu}$ に対してゲージ変換 $\epsilon_{\mu}\to\epsilon_{\mu}+\alpha q_{\mu}$ をしても不変に保たれているために、ゲージ不変性の要求を満たす関係式になります。今みてきたのは簡単な散乱に対してですが、これをさらに一般化した図に対して行っても同様の結果を導けます。