ウィックの定理

n 点相関関数の計算におけるウィックの定理を見ていきます。
ここでは相互作用描像を使いますが、相互作用のないハイゼンベルグ描像でも同じです。

場の量子論での主な計算対象は場の演算子を真空で挟んだ n 点相関関数で、このときの場の演算子はハイゼンベルグ描像です。しかし、相互作用を含めたハイゼンベルグ描像による n 点相関関数を計算することは無理です。なので、Gell-Mann-Low の定理を使って、相互作用描像側の計算から摂動論を使って求めようとします。そのときに出てくる相互作用のない真空による n 点相関関数 $\langle 0|\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)]|0\rangle$ の計算規則を与えます。T( ) は時間順序積です。

スカラー場を使っていきます。相互作用描像での ϕ_I は相互作用のないハイゼンベルグ描像として扱えるので、「クライン・ゴルドン場～複素スカラー場～」での正規積と同じように場の演算子を生成、消滅演算子の項に分けて

$$\phi_I(x)=\phi_I^{(+)}(x)+\phi_I^{(-)}(x)$$

$\phi_I^{(+)}$ が消滅演算子、$\phi_I^{(-)}(x)$ が生成演算子の項とします。「クライン・ゴルドン場～複素スカラー場～」での $\pm$ の付き方と逆にしています。これを使って時間順序積 $\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)]$ を展開します。ここで、$x^0>y^0$ としていきます。そうすると、時間順除籍は $\phi_I(x)\phi_I(y)$ なので

$$\phi_I(x)\phi_I(y)=\phi_I^{(+)}(x)\phi_I^{(+)}(y)+\phi_I^{(+)}(x)\phi_I^{(-)}(y)+\phi_I^{(-)}(x)\phi_I^{(+)}(y)+\phi_I^{(-)}(x)\phi_I^{(-)}(y) \tag{1}$$

これの第 2 項で無理やり交換関係を使って

$$\begin{aligned}\phi_I(x)\phi_I(y)&=\phi_I^{(+)}(x)\phi_I^{(+)}(y)+[\phi_I^{(+)}(x),\phi_I^{(-)}(y)]+\phi_I^{(-)}(y)\phi_I^{(+)}(x)+\phi_I^{(-)}(x)\phi_I^{(+)}(y)+\phi_I^{(-)}(x)\phi_I^{(-)}(y)\\&=\ :\phi_I(x)\phi_I(y):+[\phi_I^{(+)}(x),\phi_I^{(-)}(y)]\end{aligned}$$

$[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)]$ は演算子でなく、ただの c 数です。相互作用がないときの場の演算子 $\phi(x)$ は

$$\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ipx}+a_{\boldsymbol{p}}^\dagger e^{ipx})$$

交換関係は

$$\begin{aligned}&[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{y},t)]=i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\quad\ (\pi(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t})\\&[a_{\boldsymbol{p}},a_{\boldsymbol{q}}^\dagger]=2E_p(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\end{aligned}$$

他は 0 です。生成演算子 $a_{\boldsymbol{p}}^\dagger$、消滅演算子 $a_{\boldsymbol{p}}$ の交換関係によって

$$[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)]=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}}(a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}-a^\dagger_{\boldsymbol{q}}a_{\boldsymbol{p}})e^{-ipx}e^{iqy}=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-ip(x-y)}$$

となるので、演算子ではないです。相互作用のないときの場の演算子の関係を持つ相互作用描像でもこれらは成立しています。そして、$\phi_I^{(\pm)}$ は真空に対して

$$\phi_I^{(+)}(x)|0\rangle=0\ ,\ \langle 0|\phi_I^{(-)}(x)=0$$

と作用するので、$\phi_I^{(+)}(x)$ と $\phi_I^{(-)}(y)$ の交換関係は (c 数なので真空で挟んだものと等しい)

$$[\phi_I^{(+)}(x),\phi_I^{(-)}(y)]=\langle 0|[\phi_I^{(+)}(x),\phi_I^{(-)}(y)]|0\rangle=\langle 0|\phi_I^{(+)}(x)\phi_I^{(-)}(y)|0\rangle$$

これは (1) を真空で挟んだものと同じなので

$$\langle 0|[\phi_I^{(+)}(x),\phi_I^{(-)}(y)]|0\rangle=\langle 0|\phi_I(x)\phi_I(y)|0\rangle=\langle 0|\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)]|0\rangle$$

最後に時間順序積で書けるのは、今は $x_0>y_0$ と設定しているからです。よって、$x_0>y_0$ のとき

$$\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)]=:\phi_I(x)\phi_I(y):+\langle 0|\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)]|0\rangle$$

となります。

同様に、$x_0<y_0$ で行えば

$$\phi_I(y)\phi_I(x)=:\phi_I(y)\phi_I(x):+[\phi_I^{(+)}(y),\phi_I^{(-)}(x)]=:\phi_I(x)\phi_I(y):+[\phi_I^{(+)}(y),\phi_I^{(-)}(x)]$$

第 1 項の正規積は

$$:\phi_I(y)\phi_I(x):=\phi_I^{(+)}(y)\phi_I^{(+)}(x)+\phi_I^{(-)}(x)\phi_I^{(+)}(y)+\phi_I^{(-)}(y)\phi_I^{(+)}(x)+\phi_I^{(-)}(y)\phi_I^{(-)}(x)$$

となっていて、$\phi_I^{(+)}$ 同士と $\phi_I^{(-)}$ 同士は交換するので、これは

$$:\phi_I(x)\phi_I(y):=\phi_I^{(+)}(x)\phi_I^{(+)}(y)+\phi_I^{(-)}(y)\phi_I^{(+)}(x)+\phi_I^{(-)}(x)\phi_I^{(+)}(y)+\phi_I^{(-)}(x)\phi_I^{(-)}(y)$$

と一致します。交換関係は

$$[\phi_I^{(+)}(y), \phi_I^{(-)}(x)] = \langle 0|[\phi_I^{(+)}(y), \phi_I^{(-)}(x)]|0\rangle = \langle 0|\phi_I(y)\phi_I(x)|0\rangle = \langle 0|\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)]|0\rangle$$

というわけで、時間順序に関係なく同じ形になり

$$\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)] =: \phi_I(x)\phi_I(y) : + \langle 0|\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)]|0\rangle \tag{2}$$

右辺第 2 項は伝播関数です (Gell-Mann-Low の定理から、相互作用がなければハイゼンベルグ描像と相互作用描像で同じ)。もしくは、時間順序積と正規積の差が

$$\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)] - : \phi_I(x)\phi_I(y) := [\phi_I^{(+)}(x), \phi_I^{(-)}(y)] \quad (x_0 > y_0)$$
$$\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)] - : \phi_I(x)\phi_I(y) := [\phi_I^{(+)}(y), \phi_I^{(-)}(x)] \quad (x_0 < y_0)$$

として、交換関係 (c 数) になっているとも言えます。
　ここで新しく

$$\overline{\phi(x)\phi}(y) = \langle 0|\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)]|0\rangle = D(x-y)$$

という表記を定義します。線で繋いでいるときは I の添え字が煩わしくなるので省きます。このように線でつながっているものを縮約 (contraction) と呼びます。これを使えば

$$\mathrm{T}[\phi_I(x)\phi_I(y)] =: \phi_I(x)\phi_I(y) : + : \overline{\phi(x)\phi}(y) :$$

第 2 項は c 数なので正規積をつけられます。この時間順序積の関係を一般化すると

$$\mathrm{T}[\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)] =: \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n) + \text{全ての可能な縮約} :$$

これをウィック (Wick) の定理と言います。ウィックの定理は時間順序積

$$\mathrm{T}[\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)]$$

を正規積の和に書き換えるものです。ちなみに、ウィックの定理の証明は n 個の場の演算子の場合から、$n-1$ を求める数学的帰納法を使えばできます。
　ここから、I は省きます。また、$\phi(x_n)$ を ϕ_n と書くことにします。3 個の場の演算子がある場合は

$$\begin{aligned}\mathrm{T}[\phi_1\phi_2\phi_3] &= \ : \phi_1\phi_2\phi_3 + \overline{\phi_1\phi_2}\phi_3 + \overline{\phi_1\phi_2\phi_3} + \phi_1\overline{\phi_2\phi_3} : \\ &= \ : \phi_1\phi_2\phi_3 + D(x_1-x_2)\phi_3 + D(x_1-x_3)\phi_2 + D(x_2-x_2)\phi_1 :\end{aligned}$$

これを真空で挟むと、正規積だけの項は 0、残りの項も ϕ が 1 個浮いているために 0 です。同じことを繰り返せば、n が奇数のときは必ず 0 になるのが分かります。4 個の場合では

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] =\ &:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi}{_1}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi}{_1\phi_2}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi}{_1\phi_2\phi_3}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{\phi_1}{\phi}{_2}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{\phi_1}{\phi}{_2\phi_3}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 \\
&+ \contraction{\phi_1\phi_2}{\phi}{_3}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi}{_1}{\phi}\contraction{\phi_1\phi_2}{\phi}{_3}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction{}{\phi}{_1\phi_2}{\phi}\contraction[2ex]{\phi_1}{\phi}{_2\phi_3}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + \contraction[2ex]{}{\phi}{_1\phi_2\phi_3}{\phi}\contraction{\phi_1}{\phi}{_2}{\phi}\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : \\
=\ &:\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + D(x_1-x_2)\phi_3\phi_4 + D(x_1-x_3)\phi_2\phi_4 + D(x_1-x_4)\phi_2\phi_3 \\
&+ D(x_2-x_3)\phi_1\phi_4 + D(x_2-x_4)\phi_1\phi_3 + D(x_3-x_4)\phi_1\phi_2 \\
&+ D(x_1-x_2)D(x_3-x_4) + D(x_1-x_3)D(x_2-x_4) + D(x_1-x_4)D(x_2-x_3) :
\end{aligned}
$$

今度は $D(x_1-x_2) : \phi_3\phi_4 :$ のような項が出てきますが、正規積 $:\phi_3\phi_4:$ のために真空 $|0\rangle$ で挟めばこういった項も消えます。なので、全部縮約されている項だけが残って

$$
\langle 0|\mathrm{T}(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4)|0\rangle = D(x_1-x_2)D(x_3-x_4) + D(x_1-x_3)D(x_2-x_4) + D(x_1-x_4)D(x_2-x_3)
$$

となります。

複素スカラー場でも同じように作れます。ϕ と $\phi^\dagger$ は

$$
\begin{aligned}
\phi &= \phi^{(+)} + \phi^{(-)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}(a_{\boldsymbol{p}}e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{+ipx}) \\
\phi^\dagger &= \phi^{\dagger(+)} + \phi^{\dagger(-)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}(b_p e^{-ipx} + a_{\boldsymbol{p}}^\dagger e^{+ipx})
\end{aligned}
$$

交換関係は

$$
\begin{aligned}
&[\phi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{x}',t)] = [\phi^\dagger(\boldsymbol{x},t), \pi^\dagger(\boldsymbol{x}',t)] = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad (\pi = \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t}) \\
&[a_p, a_{\boldsymbol{q}}^\dagger] = [b_{\boldsymbol{p}}, b_{\boldsymbol{q}}^\dagger] = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})
\end{aligned}
$$

他は 0 です。$\phi(x)\phi^\dagger(y)$ は

$$
\begin{aligned}
\phi(x)\phi^\dagger(y) &= \phi^{(+)}(x)\phi^{\dagger(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{\dagger(-)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{\dagger(+)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{\dagger(-)}(y) \\
&= \phi^{(+)}(x)\phi^{\dagger(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{\dagger(-)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{\dagger(+)}(y) + \phi^{\dagger(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + [\phi^{(+)}(x), \phi^{\dagger(-)}(y)] \\
&= \ :\phi(x)\phi^\dagger(y): + [\phi^{(+)}(x), \phi^{\dagger(-)}(y)]
\end{aligned}
$$

交換関係は

$$
\begin{aligned}
[\phi^{(+)}(x),\phi^{\dagger(-)}(y)] &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}}(a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{q}}-a^\dagger_{\boldsymbol{q}}a_{\boldsymbol{p}})e^{-ipx}e^{+iqy}\\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}}}2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{+iqy}\\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}
$$

となるので、c 数です。よって

$$
\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle = \langle 0|[\phi^{(+)}(x),\phi^{\dagger(-)}(y)]|0\rangle = [\phi^{(+)}(x),\phi^{\dagger(-)}(y)]
$$

から、$x^0 > y^0$ では

$$
[\phi^{(+)}(x),\phi^{\dagger(-)}(y)] = \langle 0|[\phi^{(+)}(x),\phi^{\dagger(-)}(y)]|0\rangle = \langle 0|\mathrm{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)]|0\rangle
$$

となり

$$
\phi(x)\phi^\dagger(y) =: \phi(x)\phi^\dagger(y) : + \langle 0|\mathrm{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)]|0\rangle \quad (x^0 > y^0) \tag{3}
$$

$x^0 < y^0$ では

$$
\begin{aligned}
\phi^\dagger(y)\phi(x) &= (\phi^{\dagger(+)}(y)+\phi^{\dagger(-)}(y))(\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x))\\
&= \phi^{\dagger(+)}(y)\phi^{(+)}(x)+\phi^{\dagger(-)}(y)\phi^{(-)}(x)+\phi^{\dagger(-)}(y)\phi^{(+)}(x)+\phi^{\dagger(+)}(y)\phi^{(-)}(x)\\
&= \phi^{\dagger(+)}(y)\phi^{(+)}(x)+\phi^{\dagger(-)}(y)\phi^{(-)}(x)+\phi^{\dagger(-)}(y)\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)\phi^{\dagger(+)}(y)+[\phi^{\dagger(+)}(y),\phi^{(-)}(x)]\\
&= \phi^{(+)}(x)\phi^{\dagger(+)}(y)+\phi^{(-)}(x)\phi^{\dagger(-)}(y)+\phi^{\dagger(+)}(y)\phi^{(-)}(x)+\phi^{(-)}(x)\phi^{\dagger(+)}(y)+[\phi^{\dagger(+)}(y),\phi^{(-)}(x)]\\
&= \ :\phi(x)\phi^\dagger(y): + [\phi^{\dagger(+)}(y),\phi^{(-)}(x)]
\end{aligned}
$$

とすれば

$$
\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle = \langle 0|[\phi^{\dagger(+)}(y),\phi^{(-)}(x)]|0\rangle = [\phi^{\dagger(+)}(y),\phi^{(-)}(x)]
$$

これから、$x_0 < y_0$ では

$$
[\phi^{\dagger(+)}(y),\phi^{(-)}(x)] = \langle 0|\mathrm{T}[\phi^\dagger(y)\phi(x)]|0\rangle
$$

となるので

$$\phi^\dagger(y)\phi(x) =: \phi(x)\phi^\dagger(y) : + \langle 0|\mathrm{T}[\phi^\dagger(y)\phi(x)]|0\rangle \quad (x_0 < y_0) \tag{4}$$

よって、(3) と (4) を合わせることで

$$\mathrm{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)] =: \phi(x)\phi^\dagger(y) : + \langle 0|\mathrm{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)]|0\rangle$$

このように、第 2 項に複素スカラー場での伝播関数が出てきます。というわけで、複素スカラー場では実スカラー場でのウィックの定理を $\phi^\dagger$ に置き換えればいいだけです。ただし、伝播関数部分は $\phi^{\dagger(+)}, \phi^{(-)}$ の交換関係が 0 でないことから出てきているために

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] \sim [a_{\boldsymbol{p}}, b_{\boldsymbol{q}}^\dagger] = 0$$

として、交換関係が 0 になる $\phi(x), \phi(y)$ と $\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)$ では

$$\langle 0|\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle = \langle 0|\mathrm{T}[\phi^\dagger(x)\phi^\dagger(y)]|0\rangle = 0$$

となります (直接展開すれば $a^\dagger a$ や $b^\dagger b$ が出てこないのが分かる)。
フェルミオンでも同様に見ていきます。時間順序積はフェルミオンの反交換関係のために

$$\mathrm{T}[\psi(x)\overline{\psi}(y)] = \begin{cases} \psi(x)\overline{\psi}(y) & x^0 > y^0 \\ -\overline{\psi}(y)\psi(x) & y^0 > x^0 \end{cases}$$

として、交換に対して符号が反転します。4 つでは例えば

$$\mathrm{T}[\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4] = (-1)^2\psi_1\psi_3\psi_2\psi_4 \quad (x_1^0 > x_3^0 > x_2^0 > x_4^0)$$

となります。同様に正規積に対しても、生成、消滅演算子を動かすときに

$$: a_1^\dagger a_2 a_3^\dagger a_4 := (-1)a_1^\dagger a_3^\dagger a_2 a_4 = (-1)^2 a_1^\dagger a_3^\dagger a_4 a_2$$

として、反転します。生成と消滅の交換だけでなく生成、消滅同士でも符号が反転します。
　これらを踏まえて複素スカラー場から変更すれば

$$\mathrm{T}[\psi(x)\overline{\psi}(y)] =: \psi(x)\overline{\psi}(y) : + \contraction{}{\psi}{(x)}{\overline{\psi}}\psi(x)\overline{\psi}(y)$$

$$\contraction{}{\psi}{(x)}{\psi}\psi(x)\psi(y) = \contraction{}{\overline{\psi}}{(x)}{\overline{\psi}}\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y) = 0$$

ただし、縮約の位置によっては、例えば

$$: \contraction{}{\psi}{{}_1\psi_2}{\overline{\psi}}\psi_1\psi_2\overline{\psi}_3\overline{\psi}_4 := - \contraction{}{\psi}{{}_1}{\overline{\psi}}\psi_1\overline{\psi}_3 : \psi_2\overline{\psi}_4 :$$

このようなことが起きます。こういった符号の動きが特殊なだけなので、ウィックの定理の形は

$$\mathrm{T}[\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\cdots\psi(x_{n-1})\overline{\psi}(x_n)] =: \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\cdots\psi(x_{n-1})\overline{\psi}(x_n) + \text{全ての可能な縮約} :$$

となって、スカラーの時と変わりません。

ちなみに、正規積内の交換関係はスカラー場では

$$\begin{aligned}
:[\phi_1, \phi_2^\dagger] :=& \ :\phi_1\phi_2^\dagger - \phi_2^\dagger\phi_1 : \\
=& \ :(\phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)})(\phi_2^{\dagger(+)} + \phi_2^{\dagger(-)}) - (\phi_2^{\dagger(+)} + \phi_2^{\dagger(-)})(\phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)}) : \\
=& \ :\phi_1^{(+)}\phi_2^{\dagger(+)} + \phi_1^{(-)}\phi_2^{\dagger(-)} + \phi_1^{(+)}\phi_2^{\dagger(-)} + \phi_1^{(-)}\phi_2^{\dagger(+)} - (\phi_2^{\dagger(+)}\phi_1^{(+)} + \phi_2^{\dagger(-)}\phi_1^{(-)} + \phi_2^{\dagger(+)}\phi_1^{(-)} + \phi_2^{\dagger(-)}\phi_1^{(+)}) : \\
=& \ \phi_1^{(+)}\phi_2^{\dagger(+)} + \phi_1^{(-)}\phi_2^{\dagger(-)} + \phi_2^{\dagger(-)}\phi_1^{(+)} + \phi_1^{(-)}\phi_2^{\dagger(+)} \\
& \ - (\phi_2^{\dagger(+)}\phi_1^{(+)} + \phi_2^{\dagger(-)}\phi_1^{(-)} + \phi_1^{(-)}\phi_2^{\dagger(+)} + \phi_2^{\dagger(-)}\phi_1^{(+)}) \\
=& \ 0
\end{aligned}$$

このため

$$:\phi_1\phi_2^\dagger\phi_3 :=: ([\phi_1, \phi_2^\dagger] + \phi_2^\dagger\phi_1)\phi_3 :=: \phi_2^\dagger\phi_1\phi_3 :$$

となるので、交換関係自体が 0 でなくても正規積内であれば交換できます。フェルミオンでは

$$\begin{aligned}
:\{\psi_1, \overline{\psi}_2\} :=& \ :\psi_1\overline{\psi}_2 + \overline{\psi}_2\psi_1 : \\
=& \ :(\psi_1^{(+)} + \psi_1^{(-)})(\overline{\psi}_2^{(+)} + \overline{\psi}_2^{(-)}) + (\overline{\psi}_2^{(+)} + \overline{\psi}_2^{(-)})(\psi_1^{(+)} + \psi_1^{(-)}) : \\
=& \ :\psi_1^{(+)}\overline{\psi}_2^{(+)} + \psi_1^{(-)}\overline{\psi}_2^{(-)} + \psi_1^{(+)}\overline{\psi}_2^{(-)} + \psi_1^{(-)}\overline{\psi}_2^{(+)} + \overline{\psi}_2^{(+)}\psi_1^{(+)} + \overline{\psi}_2^{(-)}\psi_1^{(-)} + \overline{\psi}_2^{(+)}\psi_1^{(-)} + \overline{\psi}_2^{(-)}\psi_1^{(+)} : \\
=& \ :\{\psi_1^{(+)}, \overline{\psi}_2^{(+)}\} : + : \{\psi_1^{(-)}, \overline{\psi}_2^{(-)}\} : + : \{\psi_1^{(+)}, \overline{\psi}_2^{(-)}\} : + : \{\psi_1^{(-)}, \overline{\psi}_2^{(+)}\} :
\end{aligned}$$

$\psi, \overline{\psi}$ は

$$\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s=1}^{2}(a_{\boldsymbol{p}}^s u^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}v^s(\boldsymbol{p})e^{ipx})$$

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}^{(+)} + \overline{\psi}^{(-)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s=1}^{2}(b_{\boldsymbol{p}}^s \overline{v}^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\overline{u}^s(\boldsymbol{p})e^{ipx})$$

生成、消滅演算子の反交換関係は

$$\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}$$

他は 0 なので、第 1 項と第 2 項は消えます。第 3 項と第 4 項は

$$:\{\psi_1^{(+)}, \overline{\psi}_2^{(-)}\}:=:\psi_1^{(+)}\overline{\psi}_2^{(-)} + \overline{\psi}_2^{(-)}\psi_1^{(+)}:= -\overline{\psi}_2^{(-)}\psi_1^{(+)} + \overline{\psi}_2^{(-)}\psi_1^{(+)} = 0$$
$$:\{\psi_1^{(-)}, \overline{\psi}_2^{(+)}\}:=:\psi_1^{(-)}\overline{\psi}_2^{(+)} + \overline{\psi}_2^{(+)}\psi_1^{(-)}:= \psi_1^{(-)}\overline{\psi}_2^{(+)} - \psi_1^{(-)}\overline{\psi}_2^{(+)} = 0$$

よって

$$:\{\psi_1, \overline{\psi}_2\}:=0$$

となり、スカラー場と同じように正規積内では反交換関係が 0 でなくても反交換できます。

最後に正規積と時間順序が両方あるときの規則にも触れておきます。実際の計算では、無限大が出ないようにするために正規積にして摂動展開に使うので、$\mathrm{T}[:\phi(x_1)\phi(x_1)::\phi(x_2)\phi(x_2):]$ のような形で出てきます (正規積にしなくても途中に出てくる無限大の項を消しても同じ)。このときは正規積内の縮約は取らないという規則が新しく加わります。

例として

$$\mathrm{T}[:\phi_1\phi_2::\phi_3\phi_4:]$$

を使います。各正規積に (2) を使えば

$$\begin{aligned}\mathrm{T}[:\phi_1\phi_2::\phi_3\phi_4:] &= \mathrm{T}[(\mathrm{T}[\phi_1\phi_2] - \overbracket{\phi_1\phi_2})(\mathrm{T}[\phi_3\phi_4] - \overbracket{\phi_3\phi_4})]\\ &= \mathrm{T}[\mathrm{T}[\phi_1\phi_2]\mathrm{T}[\phi_3\phi_4] - \mathrm{T}[\phi_1\phi_2]\,\overbracket{\phi_3\phi_4} - \overbracket{\phi_1\phi_2}\,\mathrm{T}[\phi_3\phi_4] + \overbracket{\phi_1\phi_2}\,\overbracket{\phi_3\phi_4}]\end{aligned}$$

第 1 項は一番外にいる時間順序積のために $\mathrm{T}[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4]$ です。そして、縮約部分は演算子ではないために時間順序積とは無関係なので

$$\begin{aligned}\mathrm{T}[:\phi_1\phi_2::\phi_3\phi_4:] &= \mathrm{T}[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] - \mathrm{T}[\phi_1\phi_2]\,\overbracket{\phi_3\phi_4} - \overbracket{\phi_1\phi_2}\,\mathrm{T}[\phi_3\phi_4] + \overbracket{\phi_1\phi_2}\,\overbracket{\phi_3\phi_4}\\ &= \mathrm{T}[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] - (:\phi_1\phi_2: + \overbracket{\phi_1\phi_2})\,\overbracket{\phi_3\phi_4} - \overbracket{\phi_1\phi_2}(:\phi_3\phi_4: + \overbracket{\phi_3\phi_4}) + \overbracket{\phi_1\phi_2}\,\overbracket{\phi_3\phi_4}\\ &= \mathrm{T}[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] - :\phi_1\phi_2:\overbracket{\phi_3\phi_4} - \overbracket{\phi_1\phi_2}:\phi_3\phi_4: - \overbracket{\phi_1\phi_2}\,\overbracket{\phi_3\phi_4}\end{aligned}$$

第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] = \; & :\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4: + \wick{\c1\phi_1\c1\phi_2} :\phi_3\phi_4: + \wick{:\c1\phi_1\phi_2\c1\phi_3\phi_4:} + \wick{:\c1\phi_1\phi_2\phi_3\c1\phi_4:} + \wick{:\phi_1\c1\phi_2\c1\phi_3\phi_4:} + \wick{:\phi_1\c1\phi_2\phi_3\c1\phi_4:} \\
& + :\phi_1\phi_2: \wick{\c1\phi_3\c1\phi_4} + \wick{\c1\phi_1\c1\phi_2\c2\phi_3\c2\phi_4} + \wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c1\phi_3\c2\phi_4} + \wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c2\phi_3\c1\phi_4}
\end{aligned}
$$

よって、ϕ_1, ϕ_2 と ϕ_3, ϕ_4 の縮約の項が消えて

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}[:\phi_1\phi_2::\phi_3\phi_4:] = \; & :\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4: + \wick{:\c1\phi_1\phi_2\c1\phi_3\phi_4:} + \wick{:\c1\phi_1\phi_2\phi_3\c1\phi_4:} + \wick{:\phi_1\c1\phi_2\c1\phi_3\phi_4:} + \wick{:\phi_1\c1\phi_2\phi_3\c1\phi_4:} \\
& + \wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c1\phi_3\c2\phi_4} + \wick{\c1\phi_1\c2\phi_2\c2\phi_3\c1\phi_4}
\end{aligned}
$$

このように、各正規積内の縮約が出てこなくなります。