ワインバーグ・サラムモデル

ワインバーグ・サラムモデル (Weinberg-Salam model) を見ていきます (グラショー (Glashow) の名前を加えた方が正確かもしれませんが)。

素粒子としての話は「電弱相互作用」にまわすので、何を目的としたものなのかについてはそっちを見てください。

ここでは $SU(2), U(1)$ ゲージ理論とヒッグス機構を合わせたラグランジアンを作ります。ただし、弱い相互作用の性質を反映させるための式変形を行います。

ディラック場から出発しますが、制限を与えます。2つのディラック場を ν, χ とし、左巻きの2重項を L 、右巻き1重項を R として

$$L = P_L \begin{pmatrix} \nu \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \chi_L \end{pmatrix}, \quad R = P_R \chi = \chi_R \quad (P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2})$$

と作り、 ν は左巻き成分だけが寄与するとします。添え字の L, R は左巻き、右巻きを表します。これらによるラグランジアンは

$$\mathcal{L}_f = i\bar{L}\gamma^\mu\partial_\mu L + i\bar{R}\gamma^\mu\partial_\mu R = i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{\chi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\chi_L + i\bar{\chi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\chi_R$$

フェルミオンの質量項は後で加えます。

ゲージ場と相互作用項を $SU(2)$ ゲージ変換と $U(1)$ ゲージ変換を同時に行うことで導入します。2つ合わせたものを $SU(2) \times U(1)$ と表記します。 $SU(2)$ は左巻き2重項に対応するので $SU(2)_L$ 、 $U(1)$ は $U(1)_Y$ と表記します。 Y の意味は後で与えます。

$SU(2)$ ゲージ変換と共変微分 $D_{(2)}^\mu$ は、ゲージ場を W_i^μ として

$$V_2 = \exp[i\beta_i(x)\frac{\sigma_i}{2}], \quad (W_i^\mu\frac{\sigma_i}{2})' = V_2 W_i^\mu \frac{\sigma_i}{2} V_2^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu V_2)V_2^\dagger, \quad D_{(2)}^\mu = \partial^\mu + igW_i^\mu\frac{\sigma_i}{2}$$

$i = 1, 2, 3$ とし、同じ添え字では和を取ります。 σ_i はパウリ行列です。 $SU(2)$ の和は、 $W_i^\mu\sigma_i = \mathbf{W}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma}$ と表記します。 $U(1)$ ゲージ変換と共変微分 $D_{(1)}^\mu$ は、ゲージ場を B^μ として

$$V_1 = \exp[i\alpha(x)], \quad B'_\mu(x) = V_1 A_\mu V_1^\dagger + \frac{i}{g'}(\partial_\mu V_1)V_1^\dagger, \quad D_{(1)}^\mu = \partial_\mu + ig'B_\mu$$

$SU(2)$ と $U(1)$ の結合定数は g, g' として区別します。生成子に対応する定数 Y (1×1 行列) を導入するために g' を

$$V_1 = \exp[i\alpha(x)] = \exp[ig'\Lambda(x)] \Rightarrow \exp[ig'\Lambda(x)\frac{Y}{2}] = \exp[i\alpha(x)\frac{Y}{2}]$$

と置き換えて、共変微分を

$$D_{(1)}^\mu = \partial_\mu + ig'B_\mu\frac{Y}{2}$$

とします。\$Y\$ はハイパー荷と呼ばれ、全て同じ定数ではなく、作用する対象で値が変わるとします (電磁場で言えば、\$Y\$ は粒子の電荷になるので、電荷の異なる粒子では異なる値になるということです)。明確にするときは \$Y(\psi)\$ と書きます。

\$SU(2) \times U(1)\$ 変換と共変微分は

$$\exp[i\beta(x) \cdot \frac{\sigma}{2} + i\alpha(x) \frac{Y}{2}], \quad D^\mu = \partial^\mu + ig\mathbf{W}^\mu(x) \cdot \frac{\sigma}{2} + ig'B^\mu(x) \frac{Y}{2}$$

\$SU(2)\$ と \$U(1)\$ は異なる変換なので、それぞれの生成子 \$\sigma_i, Y\$ は交換させます。\$Y\$ が 2 重項の各成分で異なった値を持つと \$\sigma_i\$ と交換しないので (単位行列の定数倍なら \$\sigma_i\$ と交換する)、2 重項の成分は同じ \$Y\$ の値を持ちます。

左巻き 2 重項では \$SU(2)_L \times U(1)_Y\$ 変換を受けますが、右巻き 1 重項は \$SU(2)_L\$ 変換に対して不変です (ベクトルの回転変換でスカラーは不変なのと同じ)。なので、1 重項 \$R\$ の変換は \$U(1)_Y\$ 部分だけになります。このことから、パウリ行列の \$R\$ への作用は \$\sigma_i R = 0\$ とします。ちなみに、変換で不変という意味で 1 重項という単語は使われていて、\$SU(2)\$ の 1 重項と言ったときは \$SU(2)\$ 変換で不変であることを指します。

\$SU(2)_L \times U(1)_Y\$ ゲージ変換で不変なラグランジアンは、共変微分に置き換えることで

$$\begin{aligned} i\bar{L}\gamma_\mu D^\mu L + i\bar{R}\gamma_\mu D_{(1)}^\mu R &= i\bar{L}\gamma_\mu(\partial^\mu + ig\mathbf{W}^\mu \cdot \frac{\sigma}{2} + ig'B^\mu \frac{Y}{2})L + i\bar{R}\gamma_\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu \frac{Y}{2})R \\ &= i\bar{L}\gamma_\mu\partial^\mu L + i\bar{R}\gamma_\mu\partial_\mu R - g\bar{L}\gamma_\mu L\mathbf{W}^\mu \cdot \frac{\sigma}{2} - g'(\bar{L}\gamma_\mu \frac{Y}{2}L + \bar{R}\gamma_\mu \frac{Y}{2}R)B^\mu \end{aligned}$$

相互作用項は

$$\mathcal{L}_{int} = -g\bar{L}\gamma_\mu \mathbf{W}^\mu \cdot \frac{\sigma}{2}L - g'(\bar{L}\gamma_\mu B^\mu \frac{Y}{2}L + \bar{R}\gamma_\mu B^\mu \frac{Y}{2}R)$$

後は、\$SU(2)\$ と \$U(1)\$ のゲージ場の項を

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\ W_i^{\mu\nu} &= \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu - g\epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu, \quad B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \end{aligned}$$

として加えることで、全体のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{FG} = i\bar{L}\gamma_\mu D^\mu L + i\bar{R}\gamma_\mu D_{(1)}^\mu R - \frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (1)$$

このようにして、\$SU(2)_L \times U(1)_Y\$ ゲージ変換に対する不変性を要求したラグランジアンが作れます。

ディラック場の質量を 0 にしているのは、\$SU(2)_L \times U(1)_Y\$ 変換で不変にならないからです。左巻きと右巻きの射影演算子 \$P_L, P_R\$ の

$$\begin{aligned} P_L^2 &= P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0 \\ P_R \psi &= \psi_R, \quad P_L \psi = \psi_L, \quad \bar{\psi} P_R = \bar{\psi}_L, \quad \bar{\psi} P_L = \bar{\psi}_R \end{aligned}$$

という関係から \$\bar{\psi}_L \psi_L = \bar{\psi}_R \psi_R = 0\$ なので、ディラック場の質量項は

$$\bar{\psi}\psi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = \bar{\psi}_L\psi_L + \bar{\psi}_R\psi_R + \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$$

このように、左巻きと右巻きが混ざるために $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 変換で不変になりません。

相互作用項を 2 個の複素数のゲージ場と 2 個の実数のゲージ場になるように書き換えます (先に下のヒッグス機構の計算を見た方が分かりやすいかもしれません)。相互作用項の第一項は

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} &= W_i^\mu \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & W_1^\mu \\ W_1^\mu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iW_2^\mu \\ iW_2^\mu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_3^\mu & 0 \\ 0 & -W_3^\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - iW_2^\mu \\ W_1^\mu + iW_2^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_3^\mu & \sqrt{2}W_{(+)}^\mu \\ \sqrt{2}W_{(-)}^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$W_{(\pm)}^\mu = (W_1^\mu \mp iW_2^\mu)/\sqrt{2}$ としています (符号の対応に注意)。また、

$$\mathbf{W}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} = W_3^\mu \sigma_3 + \sqrt{2}W_{(+)}^\mu \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) + \sqrt{2}W_{(-)}^\mu \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = W_3^\mu \sigma_3 + \sqrt{2}W_{(+)}^\mu T_+ + \sqrt{2}W_{(-)}^\mu T_-$$

と書けます。 $SU(2)$ の行列計算をすれば

$$\begin{aligned} \bar{L}\gamma_\mu \mathbf{W}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} L &= \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L, \bar{\chi}_L)\gamma_\mu \begin{pmatrix} W_3^\mu & \sqrt{2}W_{(+)}^\mu \\ \sqrt{2}W_{(-)}^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \chi_L \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L W_3^\mu + \sqrt{2}\bar{\chi}_L W_{(-)}^\mu, \sqrt{2}\bar{\nu}_L W_{(+)}^\mu - \bar{\chi}_L W_3^\mu)\gamma_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ \chi_L \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L \gamma_\mu \chi_L W_{(+)}^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\chi}_L \gamma_\mu \nu_L W_{(-)}^\mu + \frac{1}{2}\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L W_3^\mu - \frac{1}{2}\bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L W_3^\mu \end{aligned}$$

なので、相互作用項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{L}\gamma_\mu W_{(+)}^\mu T_+ L + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{L}\gamma_\mu W_{(-)}^\mu T_- L + \bar{L}\gamma_\mu W_3^\mu \frac{\sigma_3}{2} L\right) - g'(\bar{L}\gamma_\mu B^\mu \frac{Y}{2} L + \bar{R}\gamma_\mu B^\mu \frac{Y}{2} R) \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{L}\gamma_\mu W_{(+)}^\mu T_+ L + \bar{L}\gamma_\mu W_{(-)}^\mu T_- L) - I \end{aligned}$$

I は

$$\begin{aligned} I &= \bar{L}(g\gamma_\mu W_3^\mu \frac{\sigma_3}{2} + g'\gamma_\mu B^\mu \frac{Y}{2})L + g'\bar{R}\gamma_\mu B^\mu \frac{Y}{2} R \\ &= \frac{1}{2}g\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L W_3^\mu - \frac{1}{2}g\bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L W_3^\mu + g'\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L B^\mu \frac{Y}{2} + g'\bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L B^\mu \frac{Y}{2} + g'\bar{\chi}_R \gamma_\mu \chi_R B^\mu \frac{Y}{2} \\ &= \frac{1}{2}\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L (gW_3^\mu + g'Y(\nu_L)B^\mu) - \frac{1}{2}\bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L (gW_3^\mu - g'Y(\chi_L)B^\mu) + g'\bar{\chi}_R \gamma_\mu \chi_R B^\mu \frac{Y}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

となっています。

これで2個の複素数のゲージ場 $W_{(\pm)}^\mu$ が導入できました。残ってる W_3^μ と B^μ の組み合わせで新しい2個の実数のゲージ場 Z^μ, A^μ を作ります ($W_{(\pm)}^\mu, Z^\mu, A^\mu$ がゲージ場のラグランジアンを作ることは下のヒッグス機構の計算で確かめます)。このとき、 ν は Z^μ 、 χ は Z^μ, A^μ と結合するように作ります。つまり、

$$I = (C_1 \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L + C_2 \bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L + C_3 \bar{\chi}_R \gamma_\mu \chi_R) Z^\mu + (C_4 \bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L + C_5 \bar{\chi}_R \gamma_\mu \chi_R) A^\mu \quad (3)$$

と変形させます。 $C_1, \dots, C_5$ は定数です。 Z^μ を取りあえず

$$Z^\mu = gW_3^\mu + g'Y_L B^\mu$$

としてみます。 $Y(\nu_L) = Y(\chi_L) = Y_L, Y(\chi_R) = Y_R$ とします。 $g'/g = \tan \theta$ として

$$Z^\mu = gW_3^\mu + g'Y_L B^\mu = g(W_3^\mu + \frac{g'}{g} Y_L B^\mu) = g(W_3^\mu + Y_L B^\mu \tan \theta) = \frac{g}{\cos \theta} (W_3^\mu \cos \theta + Y_L B^\mu \sin \theta)$$

これは (W_3^μ, B^μ) が2次元回転を受けた形になっています。なので、 $g/\cos \theta$ を消すようにして Z^μ を

$$Z^\mu = \frac{\cos \theta}{g} (gW_3^\mu + g'Y_L B^\mu) = W_3^\mu \cos \theta + Y_L B^\mu \sin \theta$$

とすれば、 A^μ は2次元回転から

$$A^\mu = -W_3^\mu \sin \theta + Y_L B^\mu \cos \theta = \cos \theta (-W_3^\mu \tan \theta + Y_L B^\mu) = \frac{-\cos \theta}{g} (g'W_3^\mu - gY_L B^\mu)$$

符号を揃えるために A^μ の符号を反転させて

$$Z^\mu = C(gW_3^\mu + g'Y_L B^\mu) = W_3^\mu \cos \theta + Y_L B^\mu \sin \theta \quad (4a)$$

$$A^\mu = C(g'W_3^\mu - gY_L B^\mu) = W_3^\mu \sin \theta - Y_L B^\mu \cos \theta \quad (4b)$$

θ はワインバーグ角と呼ばれます。 $\tan \theta = g'/g$ から

$$\sin \theta = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

これらによって

$$\frac{g}{2} W_3^\mu + \frac{g' Y_L}{2} B^\mu = C_1 Z^\mu, \quad -\frac{g}{2} W_3^\mu + \frac{g' Y_L}{2} B^\mu = C_2 Z^\mu + C_4 A^\mu, \quad g' B^\mu \frac{Y_R}{2} = C_3 Z^\mu + C_5 A^\mu$$

とできればいいです。

C_1 は $C_1 = 1/2C$ です。 C_2, C_4 は

$$gC_2C + g'C_4C = -\frac{g}{2}, \quad g'C_2C - gC_4C = \frac{g'}{2}$$

から

$$C_2 = \frac{1}{2C} \frac{g'^2 - g^2}{g^2 + g'^2}, \quad C_4 = -\frac{gg'}{C} \frac{1}{g^2 + g'^2}$$

C_3, C_5 は

$$gC_3C + g'C_5C = 0, \quad g'Y_L C_3C - gY_L C_5C = g' \frac{Y_R}{2}$$

から

$$C_3 = \frac{g'^2 Y_R}{2CY_L(g^2 + g'^2)}, \quad C_5 = -\frac{gg'Y_R}{2CY_L(g^2 + g'^2)}$$

よって、(4a),(4b) での Z^μ, A^μ によって (3) の形になり

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2C} \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L + \frac{1}{2C} \frac{g'^2 - g^2}{g^2 + g'^2} \bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L + \frac{g'^2 Y_R}{2CY_L(g^2 + g'^2)} \bar{\chi}_R \gamma_\mu \chi_R \right) Z^\mu \\ &\quad + \left(-\frac{gg'}{C(g^2 + g'^2)} \bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L - \frac{gg'Y_R}{2CY_L(g^2 + g'^2)} \bar{\chi}_R \gamma_\mu \chi_R \right) A^\mu \\ &= \frac{C}{2} \left((g^2 + g'^2) \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L + (-g^2 + g'^2) \bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L + g'^2 \frac{Y_R}{Y_L} \bar{\chi}_R \gamma_\mu \chi_R \right) Z^\mu \\ &\quad + gg'C \left(-\bar{\chi}_L \gamma_\mu \chi_L - \frac{Y_R}{2Y_L} \bar{\chi}_R \gamma_\mu \chi_R \right) A^\mu \end{aligned}$$

と変形できます。

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ のラグランジアンが作れたので、次にヒッグス機構を加えます。 $SU(2)$ からは 3 個のゲージ場、 $U(1)$ からは 1 個のゲージ場が質量を持つことになりましたが、ここでは 2 個の複素数のゲージ場と 1 個の実数のゲージ場が質量を持ち、1 個の実数のゲージ場が質量を持たないように作ります。

複素スカラー場の 2 重項を導入します。2 重項は、 $\xi_1, \dots, \xi_4$ は実数とし

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2), \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_3 + i\xi_4)$$

これによるラグランジアンは

$$(\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \mu^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4 \quad (|\Phi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)$$

$\mu^2 > 0$ とします。全体のラグランジアンは $SU(2)_L \times U(1)_Y$ で不変とするので、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の共変微分に置き換えて、ゲージ場の項と合わせれば

$$\mathcal{L}_{GH} = -\frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) + \mu^2|\Phi|^2 - \lambda|\Phi|^4 \quad (5)$$

複素スカラー場のポテンシャルは

$$U = -\mu^2|\Phi|^2 + \lambda|\Phi|^4$$

ポテンシャルが最小値となるのは

$$\frac{\partial U}{\partial|\Phi|} = -2\mu^2|\Phi| + 4\lambda|\Phi|^3 = 0 \Rightarrow |\Phi_0|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

最小値となる Φ_0 を

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}})$$

対称性の破れを見るために、この周りで Φ を展開します。展開形は、 ϕ_1, ϕ_2 は4つの実数を含むので、 $H(x), \Theta(x) \ll v$ を実数として

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\Theta \cdot \sigma) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \exp[i\Theta \cdot \sigma] \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

と書けます。実際に

$$\begin{aligned} \left(1 + \begin{pmatrix} 0 & i\Theta_1 \\ i\Theta_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Theta_2 \\ -\Theta_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\Theta_3 & 0 \\ 0 & -i\Theta_3 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + i\Theta_3 & i\Theta_1 + \Theta_2 \\ i\Theta_1 - \Theta_2 & 1 - i\Theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\Theta_2 + i\Theta_1)(v + H) \\ (1 - i\Theta_3)(v + H) \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} v\Theta_2 + iv\Theta_1 \\ v + H - iv\Theta_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$v\Theta$ を Θ と定義しなおせば

$$\Phi \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Theta_2 + i\Theta_1 \\ v + H - i\Theta_3 \end{pmatrix}$$

となり、 H, Θ が v からのズレを作るのが確認できます。そして、 $\mathcal{L}_{HG}$ には $SU(2)$ 変換の不変性があるので、 $\exp$ は $SU(2)$ 変換で消せて

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (6)$$

これはユニタリーゲージです。なので、 Θ はゴールドストーンボソンで、物理的な場ではないです。また、今の変形は Φ を極形式で

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} f_1(x)e^{ia_1(x)} \\ f_2(x)e^{ia_2(x)} \end{pmatrix}$$

として、 $SU(2), U(1)$ 変換によって

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f'_2(x) \end{pmatrix}$$

としたものです。

(6) を $\mathcal{L}_{GH}$ に入れます。(5) のスカラー場のポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mu^2|\Phi|^2 - \lambda|\Phi|^4 &= \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+H)^4 \\ &= \frac{\lambda v^2}{2}(v^2 + H^2 + 2vH) - \frac{\lambda}{4}(v^4 + H^4 + 4v^3H + 4vH^3 + 6v^2H^2) \\ &= \frac{\lambda}{4}v^4 - \frac{\lambda}{4}H^4 - \lambda vH^3 - \frac{1}{2}2\lambda v^2H^2 \\ &= \frac{\lambda}{4}v^4 - \frac{\lambda}{4}H^4 - \lambda vH^3 - \frac{1}{2}M_H H^2 \end{aligned}$$

第四項はスカラー場 H の質量項です。共変微分では

$$D^\mu\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu - ig\mathbf{W}^\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} - ig'B^\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix}$$

煩わしいので、 g を $g/2$ 、 g' を $g'Y/2$ として

$$\begin{aligned} & \left(\partial^\mu - ig \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - iW_2^\mu \\ W_1^\mu + iW_2^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} - ig'B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \partial^\mu H \end{pmatrix} - ig \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - iW_2^\mu \\ W_1^\mu + iW_2^\mu & -W_3^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix} - ig'B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \partial^\mu H \end{pmatrix} - ig \begin{pmatrix} (W_1^\mu - iW_2^\mu)(v+H) \\ -W_3^\mu(v+H) \end{pmatrix} - ig' \begin{pmatrix} 0 \\ B^\mu(v+H) \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -i\sqrt{2}gW_{(+)}^\mu(v+H) \\ \partial^\mu H + igW_3^\mu(v+H) - ig'B^\mu(v+H) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi)$ は、 $\sqrt{2}W_{(\pm)}^\mu$ を $W_{(\pm)}^\mu$ として

$$\begin{aligned}
& (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) \\
&= \frac{1}{2} \left(igW_{(-)}^\mu(v+H), \partial^\mu H + igW_3^\mu(v+H) - ig'B^\mu(v+H) \right) \begin{pmatrix} -igW_{(+)\mu}(v+H) \\ \partial_\mu H + igW_{3\mu}(v+H) - ig'B_\mu(v+H) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (g^2 W_{(-)} \cdot W_{(+)}(v+H)^2 + (\partial^\mu H - igW_3^\mu(v+H) + ig'B^\mu(v+H))(\partial_\mu H + igW_{3\mu}(v+H) - ig'B_\mu(v+H))) \\
&= \frac{1}{2} (g^2(v+H)^2 W_{(-)} \cdot W_{(+)}) \\
&\quad + (\partial^\mu H - igW_3^\mu(v+H))(\partial_\mu H + igW_{3\mu}(v+H)) \\
&\quad + ig'B^\mu(v+H)(\partial_\mu H + igW_{3\mu}(v+H)) - ig'B_\mu(v+H)(\partial^\mu H - igW_3^\mu(v+H)) \\
&\quad + g'^2(v+H)^2 B^\mu B_\mu) \\
&= \frac{1}{2} (g^2(v+H)^2 W_{(-)} \cdot W_{(+)}) + (\partial^\mu H)^2 + g^2 W_3 \cdot W_3(v+H)^2 \\
&\quad + ig'B_\mu(v+H)(\partial^\mu H + igW_3^\mu(v+H) - \partial^\mu H + igW_3^\mu(v+H)) + g'^2(v+H)^2 B^\mu B_\mu) \\
&= \frac{1}{2} (g^2(v+H)^2 W_{(-)} \cdot W_{(+)}) \\
&\quad + (\partial^\mu H)^2 + g^2(v+H)^2 W_3 \cdot W_3 - 2gg'(v+H)^2 B \cdot W_3 + g'^2(v+H)^2 B \cdot B) \\
&= \frac{1}{2} (g^2(v+H)^2 W_{(-)} \cdot W_{(+)}) + (\partial^\mu H)^2 + (v+H)^2 (g^2(W_3^\mu)^2 - 2gg'B \cdot W_3 + g'^2 B \cdot B) \\
&= \frac{1}{2} (g^2(v+H)^2 W_{(-)} \cdot W_{(+)}) + (\partial^\mu H)^2 + (v+H)^2 (gW_3^\mu - g'B^\mu)^2
\end{aligned}$$

v^2 の項を取り出すと

$$\begin{aligned}
(D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &= \frac{1}{2} (\partial^\mu H)^2 + \frac{1}{2} g^2 v^2 W_{(-)} \cdot W_{(+)} + \frac{1}{2} v^2 (gW_3^\mu - g'B^\mu)^2 + \dots \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} (\partial^\mu H)^2 + \frac{g^2}{4} v^2 W_{(-)} \cdot W_{(+)} + \frac{v^2}{8} (gW_3^\mu - g'YB^\mu)^2 + \dots \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu H)^2 + \frac{g^2}{8} v^2 ((W_1^\mu)^2 + (W_2^\mu)^2) + \frac{v^2}{8} (gW_3^\mu - g'YB^\mu)^2 + \dots \tag{7}
\end{aligned}$$

矢印で $g, g', W_{(\pm)}$ を元に戻しています。第一項とポテンシャルでの質量項とを合わせれば、質量 M_H を持つ実スカラー場 H となり、ヒッグス場です。第二項と第三項によって、 $W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu, B^\mu$ が質量を持つ形になりますが、変形させます。

すでに $W_{(\pm)}^\mu$ の質量項 $W_{(-)} \cdot W_{(+)} = W_{(-)} \cdot (W_{(-)})^\dagger = (W_{(+)}^\dagger) \cdot W_{(+)}$ があるので、 $W_{(\pm)}^\mu$ がゲージ場として使えるのか確かめます。 $(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu)^2$ の形になればいいので

$$\begin{aligned}
& (\partial^\mu W_{(+)}^\nu - \partial^\nu W_{(+)}^\mu)(\partial_\mu W_{(+)\nu} - \partial_\nu W_{(+)\mu})^\dagger \\
&= (\partial^\mu W_{(+)}^\nu - \partial^\nu W_{(+)}^\mu)(\partial_\mu W_{(-)\nu} - \partial_\nu W_{(-)\mu}) \\
&= \partial^\mu W_{(+)}^\nu \partial_\mu W_{(-)\nu} - \partial^\mu W_{(+)}^\nu \partial_\nu W_{(-)\mu} - \partial^\nu W_{(+)}^\mu \partial_\mu W_{(-)\nu} + \partial^\nu W_{(+)}^\mu \partial_\nu W_{(-)\mu} \\
&= \frac{1}{2}(\partial^\mu(W_1^\nu - iW_2^\nu)\partial_\mu(W_{1\nu} + iW_{2\nu}) - \partial^\mu(W_1^\nu - iW_2^\nu)\partial_\nu(W_{1\mu} + iW_{2\mu}) \\
&\quad - \partial^\nu(W_1^\mu - iW_2^\mu)\partial_\mu(W_{1\nu} + iW_{2\nu}) + \partial^\nu(W_1^\mu - iW_2^\mu)\partial_\nu(W_{1\mu} + iW_{2\mu})) \\
&= (\partial^\mu W_1^\nu - i\partial^\mu W_2^\nu)(\partial_\mu W_{1\nu} + i\partial_\mu W_{2\nu}) - (\partial^\mu W_1^\nu - i\partial^\mu W_2^\nu)(\partial_\nu W_{1\mu} + i\partial_\nu W_{2\mu}) \\
&= (\partial^\mu W_1^\nu)^2 + (\partial^\mu W_2^\nu)^2 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_{1\mu} - \partial^\mu W_2^\nu \partial_\nu W_{2\mu} \\
&= \frac{1}{2}(\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu)(\partial_\mu W_{1\nu} - \partial_\nu W_{1\mu}) + \frac{1}{2}(\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu)(\partial_\mu W_{2\nu} - \partial_\nu W_{2\mu})
\end{aligned}$$

このため

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}W_{\mu\nu} \cdot W^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_{1\nu} - \partial_\nu W_{1\mu})(\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu) - \frac{1}{4}(\partial_\mu W_{2\nu} - \partial_\nu W_{2\mu})(\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu) + \dots \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu W_{(+)\nu} - \partial_\nu W_{(+)\mu})(\partial^\mu W_{(+)}^\nu - \partial^\nu W_{(+)}^\mu)^\dagger + \dots
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} + (D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu W_{(+)\nu} - \partial_\nu W_{(+)\mu})(\partial^\mu W_{(+)}^\nu - \partial^\nu W_{(+)}^\nu)^\dagger + \frac{g^2}{4}v^2 W_{(+)}^\dagger \cdot W_{(+)} \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu W_{(-)\nu} - \partial_\nu W_{(-)\mu})(\partial^\mu W_{(-)}^\nu - \partial^\nu W_{(-)}^\nu)^\dagger + \frac{g^2}{4}v^2 W_{(-)} \cdot W_{(-)}^\dagger
\end{aligned}$$

複素スカラー場の質量項 $M\phi^*\phi$ から、 $W_{(\pm)}^\mu$ は質量 $gv/2$ を持ちます

今度実数のゲージ場に質量を持たせたいので

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu)(\partial^\mu C^\nu - \partial^\nu C^\mu) + \frac{1}{2}M^2 C^\mu C_\mu$$

という形にします。(7)の第三項と(4a),(4b)から

$$Z^\mu = W_3^\mu \cos \theta - Y(\Phi)B^\mu \sin \theta$$

$$A^\mu = W_3^\mu \sin \theta + Y(\Phi)B^\mu \cos \theta \quad (\tan \theta = \frac{g'}{g})$$

この対応から $Y(\Phi) = -Y_L$ を要求します。 $Y(\Phi)$ しか出てこないのを Y と書くことにします。このようにすると

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{8}(gW_3^\mu - g'YB^\mu)^2 &= \frac{g^2v^2}{8}(W_3^\mu - YB^\mu \tan \theta)^2 = \frac{g^2v^2}{8 \cos^2 \theta}(W_3^\mu \cos \theta - YB^\mu \sin \theta)^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{g^2v^2}{4 \cos^2 \theta} Z_\mu Z^\mu \\
&= \frac{1}{2} M^2 Z_\mu Z^\mu
\end{aligned}$$

として、 Z^μ の質量項になります。そして

$$\begin{aligned}
Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} &= (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) \\
&= 2(\partial^\mu Z^\nu)^2 - 2\partial^\mu Z^\nu \partial_\nu Z_\mu \\
&= 2(\partial^\mu W_3^\nu \cos \theta - Y\partial^\mu B^\nu \sin \theta)^2 - 2(\partial^\mu W_3^\nu \cos \theta - Y\partial^\mu B^\nu \sin \theta)(\partial_\nu W_{3\mu} \cos \theta - Y\partial_\nu B_\mu \sin \theta) \\
&= 2(\partial^\mu W_3^\nu)^2 \cos^2 \theta + 2Y^2(\partial^\mu B^\nu)^2 \sin^2 \theta - 4Y\partial^\mu W_3^\nu \partial_\mu B_\nu \sin \theta \cos \theta \\
&\quad - 2(\partial^\mu W_3^\nu \partial_\nu W_{3\mu} \cos^2 \theta - 2Y\partial^\mu W_3^\nu \partial_\nu B_\mu \sin \theta \cos \theta + Y^2\partial^\mu B^\nu \partial_\nu B_\mu \sin^2 \theta) \\
&= 2((\partial^\mu W_3^\nu)^2 - \partial^\mu W_3^\nu \partial_\nu W_{3\mu}) \cos^2 \theta + 2Y^2((\partial^\mu B^\nu)^2 - \partial^\mu B^\nu \partial_\nu B_\mu) \sin^2 \theta \\
&\quad - 4Y(\partial^\mu W_3^\nu \partial_\mu B_\nu - \partial^\mu W_3^\nu \partial_\nu B_\mu) \sin \theta \cos \theta \\
&= (\partial^\mu W_3^\nu - \partial_\nu W_{3\mu}^3)^2 \cos^2 \theta + Y^2(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \sin^2 \theta - 2Y(\partial^\mu W_3^\nu - \partial^\nu W_3^\mu)(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \cos \theta \sin \theta
\end{aligned}$$

A^μ では、 $\sin$ を $-\cos$ 、 $\cos$ を $\sin$ にすればいいだけなので

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= (\partial^\mu W_3^\nu - \partial_\nu W_{3\mu}^3)^2 \sin^2 \theta + Y^2(\partial^\mu W_3^\nu - \partial_\nu W_{3\mu}^3)^2 \cos^2 \theta + 2Y(\partial^\mu W_3^\nu - \partial^\nu W_3^\mu)(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \cos \theta \sin \theta
\end{aligned}$$

足すと

$$\begin{aligned}
Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\partial^\mu W_3^\nu - \partial_\nu W_{3\mu}^3)^2 \cos^2 \theta + Y^2(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \sin^2 \theta \\
&\quad + (\partial^\mu W_3^\nu - \partial_\nu W_{3\mu}^3)^2 \sin^2 \theta + Y^2(\partial^\mu W_3^\nu - \partial_\nu W_{3\mu}^3)^2 \cos^2 \theta \\
&= (\partial^\mu W_3^\nu - \partial_\nu W_{3\mu}^3)^2 + Y^2(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2
\end{aligned}$$

$Y^2(\Phi) = 1$ とすることで $W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}, B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ が含む項になります。また、 $Y(\Phi) = -Y_L$ から $Y_L^2 = 1$ となります。というわけで、 Φ_0 周りで

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D^\mu \Phi|^2 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{g^2v^2}{4 \cos^2 \theta} Z_\mu Z^\mu \\
&\quad - \frac{1}{2} (\partial_\mu W_{(+)\nu} - \partial_\nu W_{(+)\mu})(\partial^\mu W_{(+)}^\nu - \partial^\nu W_{(+)}^\mu)^\dagger + \frac{g^2}{4} v^2 W_{(+)}^\dagger \cdot W_{(+)} + \dots
\end{aligned}$$

となり、質量を持つゲージ場 $W_{(\pm)}^\mu, Z^\mu$ と質量を持たないゲージ場 A^μ が現れます。それぞれの質量は

$$M_Z = \frac{gv}{2\cos\theta}, \quad M_W = \frac{gv}{2}$$

これで、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ での対称性の破れから 3 個のゲージ場が質量を獲得したことになります。そして、質量を持たないゲージ場もあり、このゲージ場による $U(1)$ の不変性が残っています。このため、対称性は $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)$ となります。

ディラック場の質量をヒッグス機構を利用して手で加えます。項の形は

$$-\sqrt{2}f(\bar{R}\Phi^\dagger L + \bar{L}\Phi R) \quad (8)$$

と与えます。 f_i は定数です。括弧内は $(\bar{R}\Phi^\dagger L)^\dagger = \bar{L}\Phi R$ なのでエルミートです。 $SU(2)_L$ 変換を U_2 、 $U_Y(1)$ 変換を U_1 、 $U = U_1 U_2$ とすれば (U_1 と U_2 は違う群なので交換可)

$$\begin{aligned} \bar{L}U^{-1}U\Phi U^{-1}UR &= \bar{L}U_1^{-1}U_2^{-1}U_1U_2\Phi U_1^{-1}U_2^{-1}U_1U_2R \\ &= \bar{L}'U_1U_2\Phi U_1^{-1}R' \quad (R' = U_1R, L' = U_1U_2L) \\ &= \bar{L}'U_2\Phi R' \quad (\Phi' = U_2\Phi) \\ &= \bar{L}'\Phi'R' \end{aligned}$$

となり、 $SU(2)_L, U_Y(1)$ 変換で不変です。 Φ_0 周りでの Φ を使うと

$$\begin{aligned} \bar{R}\Phi^\dagger L + \bar{L}\Phi R &= \bar{\chi}P_L(0, \frac{v+H}{\sqrt{2}})P_L \begin{pmatrix} \nu \\ \chi \end{pmatrix} + (\bar{\nu}, \bar{\chi})P_R \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} P_{RX} \\ &= \frac{v+H}{\sqrt{2}}\bar{\chi}P_L P_L \chi + \frac{v+H}{\sqrt{2}}\bar{\chi}P_R P_R \chi \\ &= \frac{v+H}{\sqrt{2}}\bar{\chi}\frac{1-\gamma_5}{2}\chi + \frac{v+H}{\sqrt{2}}\bar{\chi}\frac{1+\gamma_5}{2}\chi \\ &= \frac{v}{\sqrt{2}}\bar{\chi}\chi + \frac{H}{\sqrt{2}}\bar{\chi}\chi \end{aligned}$$

H はスカラー場なので、第一項が χ の質量項となります。(8) を加えても ν は質量が 0 のままです。

まとめると、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ + ヒッグス機構のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{L}\gamma_\mu D^\mu L + i\bar{R}\gamma_\mu D_{(1)}^\mu R - \sqrt{2}f(\bar{R}\Phi^\dagger L + \bar{L}\Phi R) \\ &\quad - \frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + |D_\mu\Phi|^2 + \mu^2|\Phi|^2 - \lambda|\Phi|^4 \end{aligned}$$

そして、対称性の破れによって

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + |D_\mu\Phi|^2 + \mu^2|\Phi|^2 - \lambda|\Phi|^4 \\
& = \frac{1}{2}(\partial^\mu H)^2 - \frac{1}{2}M_H H^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \\
& \quad - \frac{1}{2}(\partial_\mu W_{(+)\nu} - \partial_\nu W_{(+)\mu})(\partial^\mu W_{(+)}^\nu - \partial^\nu W_{(+)}^\mu)^\dagger + M_W^2 W_{(+)}^\dagger \cdot W_{(+)} + \dots
\end{aligned}$$

$W_{(\pm)}^\mu, Z^\mu, A^\mu$ は

$$W_{(\pm)}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^\mu \mp iW_2^\mu), \quad Z^\mu = W_3^\mu \cos\theta - Y(\Phi)B^\mu \sin\theta, \quad A^\mu = W_3^\mu \sin\theta + Y(\Phi)B^\mu \cos\theta$$

となり、 $Z^\mu, W_{(\pm)}^\mu, H, \chi$ は質量を

$$M_Z = \frac{gv}{2\cos\theta}, \quad M_W = \frac{gv}{2}, \quad M_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{2}\mu, \quad M_\chi = fv$$

と獲得します。これがワインバーグ・サラムモデルです。

相互作用項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} = & -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{L}\gamma_\mu W_{(+)}^\mu T_{+L} + \bar{L}\gamma_\mu W_{(-)}^\mu T_{-L}) \\
& -\frac{C}{2}((g^2 + g'^2)\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L + (-g^2 + g'^2)\bar{\chi}_L\gamma_\mu\chi_L + g'^2 Y_L Y_R \bar{\chi}_R\gamma_\mu\chi_R)Z^\mu \\
& -gg'CY_L(-Y_L\bar{\chi}_L\gamma_\mu\chi_L - \frac{Y_R}{2}\bar{\chi}_R\gamma_\mu\chi_R)A^\mu
\end{aligned}$$

$Y_L^2 = 1$ を使っています。 A^μ を電磁場として、 A^μ の項を QED での相互作用項

$$-g_e A^\mu \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

と対応させると

$$-g_e(\bar{\chi}_L\gamma^\mu\chi_L + \bar{\chi}_R\gamma^\mu\chi_R) = -gg'CY_L(-Y_L\bar{\chi}_L\gamma_\mu\chi_L - \frac{Y_R}{2}\bar{\chi}_R\gamma_\mu\chi_R)$$

χ が電子なら、 $g_e = -e$ (e は素電荷) なので

$$e = gg'C, \quad Y_L = -Y(\Phi) = -1, \quad Y_R = -2$$

e, g, g' の関係は

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin\theta = g' \cos\theta$$

また、 $Z^\mu, W_{(\pm)}^\mu$ の質量は

$$M_Z = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{M_W}{\cos \theta}, \quad M_W = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

と与えられます。