

電弱相互作用

「ワインバーグ・サラムモデル」で何を記述しているのかを具体的にします。

最初に弱い相互作用の話をししておきます。歴史的には、弱い相互作用は原子核の β 崩壊において導入されました。1919 年に β 崩壊のエネルギースペクトルは連続的と実験によって確認されたのが始まりです。この結果は、 β 崩壊の過程 $(Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + e^-$ では説明できません。原子番号を Z (陽子の数)、質量数を A (陽子と中性子の数)、電子を e^- としてます。理由は単純でエネルギー保存と角運動量保存が成立しないからです。

β 崩壊は中性子が陽子と電子に変化所以说えるので、中性子の質量を m_n 、電子の質量を m_e 、陽子の質量を m_p とします。電子、陽子のエネルギーと運動量は $E_e, \mathbf{p}, E_p, \mathbf{k}$ とします。そうすると、中性子が静止しているなら、エネルギー保存は $m_n = E_p + E_e$ 、運動量保存は $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$ です。これから

$$m_n = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_p^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_p^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2}$$

変形すると

$$\begin{aligned} m_n(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_p^2} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2}) &= m_p^2 - m_e^2 \\ m_n^2(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_p^2} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2})^2 &= (m_p^2 - m_e^2)^2 \\ \sqrt{(\mathbf{p}^2 + m_p^2)(\mathbf{p}^2 + m_e^2)} &= -\frac{1}{2m_n^2}((m_p^2 - m_e^2)^2 - m_n^2(2\mathbf{p}^2 + m_p^2 + m_e^2)) \end{aligned}$$

これを使うと、 $\mathbf{p}^2$ は

$$\begin{aligned} m_n^2 &= (\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_p^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2})^2 \\ &= m_p^2 + 2\mathbf{p}^2 + m_e^2 + 2\sqrt{(\mathbf{p}^2 + m_p^2)(\mathbf{p}^2 + m_e^2)} \\ &= m_p^2 + 2\mathbf{p}^2 + m_e^2 - \frac{1}{m_n^2}((m_p^2 - m_e^2)^2 - m_n^2(2\mathbf{p}^2 + m_p^2 + m_e^2)) \\ &= 2m_p^2 + 4\mathbf{p}^2 + 2m_e^2 - \frac{(m_p^2 - m_e^2)^2}{m_n^2} \\ \mathbf{p}^2 &= \frac{m_n^2}{4} - \frac{m_p^2 + m_e^2}{2} + \frac{(m_p^2 - m_e^2)^2}{4m_n^2} \end{aligned}$$

エネルギーに入れば

$$E_p = \frac{m_n}{2} + \frac{m_p^2 - m_e^2}{2m_n}, \quad E_e = \frac{m_n}{2} + \frac{m_e^2 - m_p^2}{2m_n}$$

このように、質量を与えれば1つの値に決まってしまうので、エネルギー保存が成立していると連続的な分布 (誤差を超えた下限と上限の間に分布) になりません。

角運動量保存は単純です。角運動量保存はスピンと軌道角運動量の和で、軌道角運動量は整数です。中性子、陽子、電子の取れるスピンは $\pm 1/2$ なので、崩壊の前の全角運動量は中性子による半整数、崩壊後は陽子+電子による整数となり、保存していません。

このように β 崩壊では保存則が成立しないので、成立させるためにパウリによって、未知の中性のフェルミオンが導入されました。それをフェルミがニュートリノと名付けました。ニュートリノを含めて β 崩壊を説明したのがフェルミ理論で、 β 崩壊は弱い相互作用によって起きるとされました。フェルミ理論は「ミューオン崩壊」で扱っているのも、フェルミ理論の問題点に飛びます。

フェルミ理論で致命的なのは無限大の発散をくり込みで除去できないことです。高エネルギー領域で確率が保存しなくなる問題もありますが、その領域($10^8[\text{GeV}]$ 程度まで加速させる必要がある)に実験が到達していない現状では、そこまで致命的ではないです。

発散の問題を解決させるために、フェルミ理論をくり込みが上手くいく QED に近づけるといふ発想が現れます。フェルミ理論は QED のように相互作用を媒介する粒子がなく、直接相互作用する形です。これを変更するために、フェルミ定数は質量の -2 乗の次元を持つので、運動量 q^2 によって

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{q^2}$$

と書けるとし、無次元の結合定数 g を導入します。このようにすれば、相互作用で移動する運動量 q^2 を担う粒子が導入できます。ただし、電磁場は無限遠まで到達できますが、弱い相互作用は原子核から原子程度の範囲内で起きる相互作用です。このため、質量を持つ粒子とする必要があります(感覚的には、重いものは遠くに飛ばないということから)。そうすると、結合定数 g が小さいのではなく質量が大きいために弱くなっていると解釈でき、質量を持っているために長距離力ではなく短距離力になっていると言えます。

質量 M を持たせて

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = -\frac{g^2}{q^2 - M^2}$$

とすれば、 $q^2 \ll M^2$ の領域で

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = -\frac{g^2}{-M^2} = \frac{g^2}{M^2}$$

となり、定数のフェルミ結合定数に対応し、低エネルギーではフェルミ理論となります。

というわけで、プロカ方程式によるゲージ場を使えば、プロカ方程式に従う粒子を媒介粒子とできます。しかし、ここでまた問題が起きます。ゲージ不変性によって QED はくり込み可能な理論となっていますが、プロカ方程式はゲージ不変性を持たないです。なので、媒介粒子を導入してもくり込みの問題は解決しません。

これを解決するためにヒッグス機構が導入されます。つまり、元々のラグランジアンには質量を持たないゲージ場を使い、対称性の破れによってゲージ場に質量を持たせるという発想を使います。これが「ワインバーグ・サラムモデル」で行ったことです。ここでは、弱い相互作用のカレントの構造がワインバーグ・サラムモデルの相互作用項に対応することを見ます。

弱い相互作用をする粒子として、電子ニュートリノと電子を使います。電子ニュートリノしか使わないのでニュートリノと言っていきます。ニュートリノは左巻きしか弱い相互作用に寄与しないので、左巻き 2 重項 L と右巻き 1 重項 R を

$$L = P_L \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad R = P_R \chi = \chi_R \quad (P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2})$$

ν はニュートリノ、 χ は電子のディラック場です。また、ニュートリノは電荷を持たないので電磁相互作用を受けません。

「ミューオン崩壊」で与えたように、電荷を下げる荷電カレントは

$$J_{(-)}^{\alpha} = \bar{\chi}\gamma^{\alpha}(1 - \gamma^5)\nu = \bar{\chi}\gamma^{\alpha}\frac{(1 - \gamma^5)^2}{2}\nu = 2\bar{\chi}\frac{(1 + \gamma^5)}{2}\gamma^{\alpha}\frac{(1 - \gamma^5)}{2}\nu_e = 2\bar{\chi}_L\gamma^{\alpha}\nu_L$$

ニュートリノの電荷は 0、電子は -1 なので、右から読むことで電荷は下がっています。これを 2 重項を使った形にすると

$$J_{(-)}^{\alpha} = 2(\bar{\nu}, \bar{\chi})P_R\gamma^{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P_L\begin{pmatrix} \nu \\ \chi \end{pmatrix} = 2\bar{L}\gamma^{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}L$$

2 重項の成分の計算なのでスピノール成分は無関係です。形式的には

$$(\bar{\nu}, \bar{\chi})O_1O_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}O_3\begin{pmatrix} \nu \\ \chi \end{pmatrix} = (\bar{\nu}, \bar{\chi})\begin{pmatrix} 0 \\ O_1O_2O_3\nu \end{pmatrix} = \bar{\chi}O_1O_2O_3\nu$$

ということです。パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を使って

$$T_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = (T_1 - iT_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = (T_1 + iT_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$J_{(-)}^{\alpha} = 2\bar{L}\gamma^{\alpha}T_-L$$

J_{-}^{α} のエルミート共役は

$$\begin{aligned} (J_{(-)}^{\alpha})^{\dagger} &= J_{(+)}^{\alpha} = \bar{\nu}\gamma^{\alpha}(1 - \gamma^5)\chi = 2\bar{\nu}\frac{1 + \gamma^5}{2}\gamma^{\alpha}\frac{1 - \gamma^5}{2}\chi \\ &= 2\bar{\nu}_L\gamma^{\alpha}\chi_L \\ &= 2(\bar{\nu}, \bar{\chi})P_R\gamma^{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P_L\begin{pmatrix} \nu \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= 2\bar{L}\gamma^{\alpha}T_+L \end{aligned}$$

これは電荷を上げる荷電カレントです。
電磁場での電子-電子のカレントは中性で

$$J_{em}^\alpha = \bar{\chi}\gamma^\alpha\chi = \bar{\chi}_L\gamma^\alpha\chi_L + \bar{\chi}_R\gamma^\alpha\chi_R$$

これをニュートリノが入るように変形すると

$$\begin{aligned} J_{em}^\alpha &= \frac{1}{2}(\bar{\chi}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\chi + \bar{\chi}\gamma^\alpha(1+\gamma^5)\chi) \\ &= \bar{\chi}\gamma^\alpha\frac{(1-\gamma^5)^2}{4}\chi + \bar{\chi}\gamma^\alpha\frac{(1+\gamma^5)^2}{4}\chi \quad (P_L^2 = P_L, P_R^2 = P_R) \\ &= \bar{\chi}\frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^\alpha\frac{1-\gamma^5}{2}\chi + \bar{\chi}\frac{1-\gamma^5}{2}\gamma^\alpha\frac{1+\gamma^5}{2}\chi \\ &= (\bar{\nu}, \bar{\chi})P_R\gamma^\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P_L\begin{pmatrix} \nu \\ \chi \end{pmatrix} + \bar{\chi}P_L\gamma^\alpha P_R\chi \\ &= \bar{L}\gamma^\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}L + \bar{R}\gamma^\alpha R \end{aligned}$$

この 2×2 行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - T_3$$

と書けるので

$$J_{em}^\alpha = \bar{L}\gamma^\alpha\left(\frac{1}{2} - T_3\right)L + \bar{R}\gamma^\alpha R = -\bar{L}\gamma^\alpha T_3 L + \frac{1}{2}\bar{L}\gamma^\alpha L + \bar{R}\gamma^\alpha R$$

このように、左巻き 2 重項と右巻き 1 重項の構造は電磁場のカレントを作れます。

ここで、ワインバーグ・サラムモデルの相互作用項

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{L}\gamma_\mu T_+ LW_{(+)}^\mu + \bar{L}\gamma_\mu T_- LW_{(-)}^\mu) - g\bar{L}\gamma_\mu T_3 LW_3^\mu + g'(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R)B^\mu$$

を持ち込みます。 W^μ, B^μ はゲージ場で、 $W_{(\pm)}^\mu = (W_1^\mu \mp iW_2^\mu)/\sqrt{2}$ です。電磁場との対応を取って、すでに $Y_L = -1, Y_R = -2$ としています。 $W_{(\pm)}^\mu$ の項は

$$\bar{L}\gamma_\mu T_+ LW_{(+)}^\mu + \bar{L}\gamma_\mu T_- LW_{(-)}^\mu = \frac{1}{2}J_{(+)} \cdot W_{(+)} + \frac{1}{2}J_{(-)} \cdot W_{(-)}$$

として、荷電カレントと結合しています。残りの項は (「ワインバーグ・サラムモデル」で求めています但別の手順で計算します)、ワインバーグ角 θ によって

$$W_3^\mu = Z^\mu \cos \theta + A^\mu \sin \theta$$

$$B^\mu = -Z^\mu \sin \theta + A^\mu \cos \theta$$

として、 Z^μ, A^μ に変形すると

$$\begin{aligned}
& -g\bar{L}\gamma_\mu T_3 L W_3^\mu + g'(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R)B^\mu \\
& = -g\bar{L}\gamma_\mu T_3 L(Z^\mu \cos \theta + A^\mu \sin \theta) + g'(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R)(-Z^\mu \sin \theta + A^\mu \cos \theta) \\
& = -g\bar{L}\gamma_\mu T_3 L Z^\mu \cos \theta - g'(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R)Z^\mu \sin \theta \\
& \quad - g\bar{L}\gamma_\mu T_3 L A^\mu \sin \theta + g'(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R)A^\mu \cos \theta \\
& = -(g\bar{L}\gamma_\mu T_3 L \cos \theta + g'(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R) \sin \theta)Z^\mu \\
& \quad + (-g\bar{L}\gamma_\mu T_3 L \sin \theta + g'(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R) \cos \theta)A^\mu
\end{aligned}$$

A^μ は電磁場とし、電子なので $-e$ として

$$(-g\bar{L}\gamma_\mu T_3 L \sin \theta + g'(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R) \cos \theta)A^\mu = eJ_{em} \cdot A$$

とし、 Z^μ の項は

$$(\bar{L}\gamma_\mu T_3 L \cos \theta + \frac{g'}{g}(\frac{1}{2}\bar{L}\gamma_\mu L + \bar{R}\gamma_\mu R) \sin \theta)Z^\mu = \frac{g}{2\sqrt{2}}J_{(0)} \cdot Z$$

$J_{(0)}^\mu$ は中性カレントです。実際に、

$$\begin{aligned}
& (\bar{L}\gamma^\alpha T_3 L \cos \theta + \frac{g'}{g} (\frac{1}{2} \bar{L}\gamma^\alpha L + \bar{R}\gamma^\alpha R) \sin \theta) \\
&= (\bar{L}\gamma^\alpha T_3 L \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (\frac{1}{2} \bar{L}\gamma^\alpha L + \bar{R}\gamma^\alpha R)) \\
&= \frac{1}{\cos \theta} (\bar{L}\gamma^\alpha (T_3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) L + \bar{R}\gamma^\alpha R \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{\cos \theta} (\frac{1}{2} \bar{L}\gamma^\alpha \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} L + \bar{R}\gamma^\alpha R \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{\cos \theta} (\frac{1}{2} \bar{L}\gamma^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos 2\theta \end{pmatrix} L + \bar{R}\gamma^\alpha R \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{2 \cos \theta} (\bar{\nu}, \bar{\chi}) P_R \gamma^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos 2\theta \end{pmatrix} P_L \begin{pmatrix} \nu \\ \chi \end{pmatrix} + 2 \bar{\chi} P_L \gamma^\alpha P_R \chi \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{2 \cos \theta} (\bar{\nu} P_R \gamma^\alpha P_L \nu - \bar{\chi} P_R \gamma^\alpha P_L \chi \cos 2\theta + 2 \bar{\chi} P_L \gamma^\alpha P_R \chi \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{2 \cos \theta} (\bar{\nu} P_R \gamma^\alpha P_L \nu - \bar{\chi} P_R \gamma^\alpha P_L \chi (1 - 2 \sin^2 \theta) + 2 \bar{\chi} P_L \gamma^\alpha P_R \chi \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{2 \cos \theta} (\bar{\nu} \gamma^\alpha P_L^2 \nu - \bar{\chi} \gamma^\alpha P_L^2 \chi (1 - 2 \sin^2 \theta) + 2 \bar{\chi} \gamma^\alpha P_R^2 \chi \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{2 \cos \theta} (\bar{\nu} \gamma^\alpha P_L \nu - \bar{\chi} \gamma^\alpha P_L \chi (1 - 2 \sin^2 \theta) + 2 \bar{\chi} \gamma^\alpha P_R \chi \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{4 \cos \theta} (\bar{\nu} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu - \bar{\chi} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \chi (1 - 2 \sin^2 \theta) + 2 \bar{\chi} \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \chi \sin^2 \theta) \\
&= \frac{1}{4 \cos \theta} (\bar{\nu} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu - \bar{\chi} \gamma^\alpha (1 - 4 \sin^2 \theta - \gamma^5) \chi)
\end{aligned}$$

これはニュートリノからニュートリノ、電子から電子なので中性です。

よって、 $\mathcal{L}_{int}$ は

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} (J_{(+)} \cdot W_{(+)} + J_{(-)} \cdot W_{(-)} + J_{(0)} \cdot Z) + e J_{em} \cdot A$$

このように、ワインバーグ・サラムモデルの相互作用項は、荷電カレント、中性カレント、電磁場のカレントによって構成され、ニュートリノは電磁場と相互作用しない形になっています。 $W_{(\pm)}^\mu, Z^\mu$ が弱い相互作用を媒介するゲージ場となり、それぞれの粒子を $W_\pm$ ボソン、 Z ボソンと呼びます。そして、 A^μ を電磁場と対応させることで、 e, g, g' は

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta = g' \cos \theta$$

という関係になります。

中性カレントは

$$\begin{aligned}
J_{(0)}^\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \theta} (\bar{\nu} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu - \chi \gamma^\alpha (1 - 4 \sin^2 \theta - \gamma^5) \chi) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \theta} (\bar{\nu} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu - \bar{\chi} \gamma^\alpha (g'_V - g'_A \gamma^5) \chi)
\end{aligned}$$

と対応させれば

$$g'_V = 1 - 4 \sin^2 \theta, \quad g'_A = 1$$

「中性カレント」で触れたように g'_V か g'_A はどちらかが小さくなっているはずなので、 $\sin^2 \theta \simeq 0.25$ とします。そうすると $\cos \theta \simeq 1$ なので、頭にかかっている係数は $1/\sqrt{2}$ です。これを「中性カレント」で最初に用いた単純なカレント × カレント部分と比較すると、その $(1/\sqrt{2})^2$ が前に出るために、 $g'_A = 1$ なら $g_A \simeq 1/2$ になります。この結果は実験値とあっていて、ワインバーグ角の実験値は $\sin^2 \theta \simeq 0.23$ です。

このようにして、弱い相互作用の特徴を持ったラグランジアンは $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論として作られます。そして、弱い相互作用だけでなく電磁相互作用も同時に含まれた形になるので、電弱相互作用と呼ばれます。

上で触れたように媒介粒子である $W_\pm, Z$ ボソンは質量を持つ必要があるので、ヒッグス機構を加えます。 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論+ヒッグス機構のラグランジアンは

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i \bar{L} \gamma_\mu D^\mu L + i \bar{R} \gamma_\mu D_{(1)}^\mu R - \sqrt{2} f (\bar{R} \Phi^\dagger L + \bar{L} \Phi R) \\
&\quad - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D_\mu \Phi|^2 + \mu^2 |\Phi|^2 - \lambda |\Phi|^4
\end{aligned}$$

Φ は複素スカラー場による 2 重項で、対称性の破れによってヒッグス粒子の場を作ります。1 行目の第三項はフェルミオンの質量項で、電子のみに質量を与えます。対称性の破れによって $SU(2)_L \times U(1)_Y$ は $U(1)$ になり、それによって $W_\pm, Z$ ボソン、ヒッグス粒子、電子の質量は

$$M_W = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad M_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta} = \frac{M_W}{\cos \theta}, \quad M_H = \sqrt{2} \mu, \quad M_\chi = fv$$

破れたあとの $U(1)$ は電磁場の対称性なので、 $U(1)_{em}$ とします。

相互作用の媒介粒子が質量を持つので、例えば $W_\pm$ ボソンが媒介しているなら、フェルミ結合定数と

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{e^2}{8M_W^2 \sin^2 \theta}$$

と対応することを要求します。フェルミ結合定数とワインバーグ角の実験値 $G_F = 1.17 \times 10^{-5} [\text{GeV}^{-2}]$, $\sin^2 \theta \simeq 0.23$ を入れれば

$$M_W \simeq 75 [\text{GeV}], \quad M_Z \simeq 86 [\text{GeV}]$$

実験値は $M_W \simeq 80 [\text{GeV}]$, $M_Z \simeq 91 [\text{GeV}]$ なので、今のような簡易的な求め方でも十分近い値になります。また、2013 年にはヒッグス粒子は確認され、質量の実験値は $M_H \simeq 125 [\text{GeV}]$ となっています。ちなみに、ワインバーグ・サラムモデルは 1968 年に作られ、中性カレントは 1973 年、 $W_\pm, Z$ ボソンは 1983 年に実験で確認されていま

す。グラシヨウ、サラム、ワインバーグへのノーベル賞は 1979 年なので、実験で確認が取れる前に授与されています。

対称性についても触れておきます。ここでは $SU(2)_L, U(1)_Y$ 変換を使い、そのときの生成子は σ_i と Y です。 σ_i は右巻きを不変にするので $\sigma_i R = 0$ としています。ここで、新しい生成子として

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (T_3 = \frac{\sigma_3}{2})$$

というのを作ります。 T_3 は

$$T_3 \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$$

として、2 重項のアイソスピンの固有値 $\pm 1/2$ を与えます。なので、左巻き 2 重項において、 ν のアイソスピン T_3 は $+1/2$ 、電子のアイソスピンは $-1/2$ となり、 $Y_L = -1$ なので

$$Q(\nu) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad Q(\chi) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Q はそれぞれの電荷と一致します。このため、 Q は $U(1)_{em}$ の生成子となります。実際に、 Q をスカラー場のポテンシャルの底となる Φ_0 に作用させると、 Φ_0 は 2 重項の下成分のみなので

$$Q\Phi_0 = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\Phi_0 = 0 \quad (Y(\Phi) = +1)$$

となり、 $U(1)_{em}$ の変換 $\exp[i\alpha(x)Q]$ で不変です。ポテンシャルの底でも $U(1)_{em}$ の不変性があるので、 $U(1)_{em}$ は破れていません。また、複素スカラー場 (ヒッグス場) の 2 重項

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

では、 $Y(\Phi) = +1$ なので、

$$Q(\phi_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad Q(\phi_2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

となり、上成分は正の電荷、下成分は中性となります。

最後に世代 (generation, family) と標準モデル (standard model) に触れておきます。フェルミオンの世代は観測されているレプトン (弱い相互作用をするフェルミオン) を

第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代
電子ニュートリノ	ミューニュートリノ	タウニュートリノ
電子	ミューオン	タウ粒子

として分類することです。ここでは第 1 世代だけを使いましたが、第 3 世代まで加えたワインバーグ・サラムモデルは

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1}^3 (i\bar{L}_a \gamma_\mu D^\mu L_a + i\bar{R}_a \gamma_\mu D_{(1)}^\mu R_a - \sqrt{2}f_a(\bar{R}_a \Phi^\dagger L_a + \bar{L}_a \Phi R_a)) \\ - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D_\mu \Phi|^2 + \mu^2 |\Phi|^2 - \lambda |\Phi|^4$$

として、同じ項を各世代で加えるだけです。 $D^\mu, D_{(1)}^\mu$ は $SU(2)_L \times U(1)_Y$, $U(1)_Y$ の共変微分、 L_a, R_a, f_a がそれぞれの世代に対応します。

標準モデルと呼ばれるものは、これにさらにクォークによるラグランジアン

$$\mathcal{L}_q = \bar{L}_q i \gamma_\mu (\partial^\mu + i g \frac{\sigma_i}{2} W_i^\mu + i g' \frac{Y}{2} B^\mu + i g_s \frac{\tau_a}{2} G_a^\mu) L_q \\ + \bar{R}_q i \gamma^\mu (\partial^\mu + i g' \frac{Y}{2} B^\mu + i g_s \frac{\tau_a}{2} G_a^\mu) R_q \\ + \sqrt{2} f_q (\bar{R}_q \Phi^\dagger L_q + \bar{L}_q \Phi R_q) \\ - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$$

を加えたものです。 $a = 1, 2, \dots, 8$, τ^a はゲルマン行列、 $G_{\mu\nu}^a$ はグルーオンのゲージ場です。同じ添え字 i では 1 から 3 の和、添え字 a では 1 から 8 の和を取ります。 q はクォークを表し、クォークも 3 世代あり

第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代
u クォーク	c クォーク	t クォーク
d クォーク	s クォーク	b クォーク

各世代で L_q, R_q を組みそれらを足します。クォークは全て左巻き、右巻き成分を持ちます。クォークを記述する QCD はカラーによる $SU(3)$ のゲージ理論なので、それを $SU(3)_C$ とすれば、標準模型の対称性は

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{em}$$

と表せます。

標準モデルは、 $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$ の結合定数の 3 個、ヒッグス粒子の真空期待値と質量の 2 個、ニュートリノ以外のフェルミオンの質量の 9 個、小林・益川行列の 4 個 (「フェルミオン世代の混合」参照) の 18 個を、理論から決められないパラメータとして含みます。パラメータの多さが標準模型への不満となっています。