

フェルミオン世代の混合

ワインバーグ・サラムモデルでのフェルミオンの質量項を与える話を拡張します。

前半は粒子を特定せずに進めますが、最後に具体的な粒子をいれます。この話は実験結果と絡めながらでないと全体像が把握できないですが、そういったことには触れていません。

添え字が複数ついているものが多いので混乱しないようにしてください。

基本的にローマ文字に対しても和を取ります。

「ワインバーグ・サラムモデル」の最後にレプトンの質量を与えましたが、これについてさらに見ていきます。まず状況を変えます。質量のない左巻き 2 重項と右巻き 1 重項としましたが、これを左手系の 2 重項を作れる質量ありのフェルミオン、右手系の 1 重項を作れる質量ありのフェルミオンとします。そして、世代 (generation, family) は第 3 世代まで考えます。なので、左手系の 2 重項は

$$L_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} a_{1L} \\ b_{1L} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}_L, L_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}_L$$

とし、右手系の 1 重項を

$$A_1 = a_{1R}, A_2 = a_{2R}, A_3 = a_{3R} \\ R_1 = b_{1R}, R_2 = b_{2R}, R_3 = b_{3R}$$

として、第 3 世代までできるようにします。ニュートリノとすると右巻き 1 重項にニュートリノがいませんが、質量があるフェルミオンとして a_i での右手系を加えます。

まずは a_i の右巻きはないとして、第 2 世代まで使ってみます。「ワインバーグ・サラムモデル」でのヒッグス機構によってレプトンの質量を生成するための項は世代間が混ざっていませんが、 $SU(2) \times U(1)_Y$ の変換に対して不変なら混ざっている項がいてもいいです。実際に、混ざっている項も同じ形をしていれば $SU(2) \times U(1)_Y$ の変換で不変です (世代が違うだけで変換を受ける構造は同じだから)。つまり、質量を生成するヒッグス場と結合している項として

$$\mathcal{L}_{HF} = -\sqrt{2}(G_{11}\bar{L}_1\Phi R_1 - G_{22}\bar{L}_2\Phi R_2 - G_{12}\bar{L}_1\Phi R_2 - G_{21}\bar{L}_2\Phi R_1) \\ -\sqrt{2}(G_{11}\bar{L}_1\Phi R_1 + G_{22}\bar{L}_2\Phi R_2 + G_{12}\bar{L}_1\Phi R_2 + G_{21}\bar{L}_2\Phi R_1)^\dagger$$

このような形を考えます。 Φ はヒッグス場 (複素スカラー場) の 2 重項で

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4))$$

ϕ^+ は正の電荷、 ϕ^0 は中性であることを表しています。 $SU(2) \times U(1)_Y$ の変換で第一項と第二項とそれらのエルミート共役が不変なことは「ワインバーグ・サラムモデル」で示したとおりで、第三項と第四項も世代が混ざっているだけなので同様に不変です。エルミート共役部分は

$$\begin{aligned}
& (G_{11}\bar{L}_1\Phi R_1 + G_{22}\bar{L}_2\Phi R_2 + G_{12}\bar{L}_1\Phi R_2 + G_{21}\bar{L}_2\Phi R_1)^\dagger \\
& = G_{11}^*\bar{R}_1\Phi^\dagger L_1 + G_{22}^*\bar{R}_2\Phi^\dagger L_2 + G_{12}^*\bar{R}_2\Phi^\dagger L_1 + G_{21}^*\bar{R}_1\Phi^\dagger L_2
\end{aligned}$$

となり、 G は一般的に考えるなら実数でなく複素数なので、複素共役の「*」をつけています。これらから出てくる質量項は、 Φ を真空期待値 v によって

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

と与えたとき (実数場 H は今は関係ないので省きます)、例えば 11 の項では

$$\begin{aligned}
\bar{L}_1\Phi R_1 &= (\bar{a}_{1L} \ \bar{b}_{1L}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} b_{1R} = \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{b}_{1L} b_{1R} \\
\bar{R}_1\Phi^\dagger L_1 &= \bar{b}_{1R} (0 \ \frac{v}{\sqrt{2}}) \begin{pmatrix} a_{1L} \\ b_{1L} \end{pmatrix} = \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{b}_{1R} b_{1L}
\end{aligned}$$

となっているので、ラグランジアンでの質量項として

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M &= -M_{11}\bar{b}_{1L}b_{1R} - M_{22}\bar{b}_{2L}b_{2R} - M_{12}\bar{b}_{1L}b_{2R} - M_{21}\bar{b}_{2L}b_{1R} \\
&\quad - M_{11}^*\bar{b}_{1R}b_{1L} - M_{22}^*\bar{b}_{2R}b_{2L} - M_{12}^*\bar{b}_{2R}b_{1L} - M_{21}^*\bar{b}_{1R}b_{2L} \\
&= -M_{ij}\bar{b}_{iL}b_{jR} - M_{ij}^*\bar{b}_{jR}b_{iL}
\end{aligned}$$

というのが出てきます。 $M_{ij} = vG_{ij}$ としています。通常のフェルミオンの質量項 (ディラック方程式の質量項) はラグランジアンにおいて

$$\begin{aligned}
M\bar{\psi}\psi &= M(\bar{\psi}P_R + \bar{\psi}P_L)(P_L\psi + P_R\psi) = M(\bar{\psi}P_LP_L\psi + \bar{\psi}P_RP_R\psi) = M(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) \\
&\quad (P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}, P_R = \frac{1+\gamma_5}{2})
\end{aligned}$$

となっているので、2 重項での質量行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

のような対角行列です。しかし、今は

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

となっているのでフェルミオン場に対して物理的な (観測される) 質量を与えていません。なので、これを対角化し、その対角化された質量行列に対するフェルミオン場を物理的な場と考えます。

行列 M は M_{ij} を実数としていないのでエルミート行列ではないです。この対角化は2つのユニタリー行列 U_L, U_R によって

$$U_L^\dagger M U_R = M' = \begin{pmatrix} M'_1 & 0 \\ 0 & M'_2 \end{pmatrix}$$

とできます (下の補足参照)。このユニタリー行列を回転行列として

$$U_L = \begin{pmatrix} \cos \theta_L & -\sin \theta_L \\ \sin \theta_L & \cos \theta_L \end{pmatrix}, \quad U_R = \begin{pmatrix} \cos \theta_R & -\sin \theta_R \\ \sin \theta_R & \cos \theta_R \end{pmatrix}$$

と与えます。そうすると、今の質量項において

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= -M_{11} \bar{b}_{1L} b_{1R} - M_{22} \bar{b}_{2L} b_{2R} - M_{12} \bar{b}_{2L} b_{1R} - M_{21} \bar{b}_{1L} b_{2R} + h.c \\ &= -(\bar{b}_{1L} \ \bar{b}_{2L}) \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1R} \\ b_{2R} \end{pmatrix} + h.c \\ &= -(\bar{b}_{1L} \ \bar{b}_{2L}) U_L U_L^\dagger \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} U_R U_R^\dagger \begin{pmatrix} b_{1R} \\ b_{2R} \end{pmatrix} + h.c \\ &= -(\bar{b}_{1L} \ \bar{b}_{2L}) U_L \begin{pmatrix} M'_1 & 0 \\ 0 & M'_2 \end{pmatrix} U_R^\dagger \begin{pmatrix} b_{1R} \\ b_{2R} \end{pmatrix} + (h.c) \end{aligned}$$

($h.c$) はエルミート共役部分で

$$\begin{aligned} &-M_{11}^* \bar{b}_{1R} b_{1L} - M_{22}^* \bar{b}_{2R} b_{2L} - M_{12}^* \bar{b}_{2R} b_{1L} - M_{21}^* \bar{b}_{1R} b_{2L} \\ &= -(\bar{b}_{1R} \ b_{2R}) \begin{pmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* \\ M_{21}^* & M_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix} \\ &= -(\bar{b}_{1R} \ b_{2R}) M^\dagger \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix} \\ &= -(\bar{b}_{1R} \ b_{2R}) (U_L U_L^\dagger M U_R U_R^\dagger)^\dagger \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix} \\ &= -(\bar{b}_{1R} \ b_{2R}) U_R \begin{pmatrix} M'_1 & 0 \\ 0 & M'_2 \end{pmatrix} U_L^\dagger \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

質量 M'_1, M'_2 は複素数なので、絶対値 $|M|$ と位相 $e^{i\alpha}$ による極形式で書けて

$$M'_1 = |M'_1| e^{i\alpha_1}, \quad M'_2 = |M'_2| e^{i\alpha_2}$$

虚数部分を持っている位相 $e^{i\alpha}$ はフェルミオン場の中に吸収させられます。これは場を位相の違いで区別できないからです。もしくは $U(1)$ 変換で左手系、右手系を

$$b_{iL} \Rightarrow e^{i\alpha_i/2} b_{iL}, \quad b_{iR} \Rightarrow e^{-i\alpha_i/2} b_{iR}$$

のように変換させると考えれば消せます。よって、 M'_1 と M'_2 を実数として扱えます。

質量行列の対角化のときフェルミオン場は

$$\begin{aligned} (\bar{b}_{1L} \bar{b}_{2L}) U_L &= (\bar{b}_{1L} \bar{b}_{2L}) \begin{pmatrix} \cos \theta_L & -\sin \theta_L \\ \sin \theta_L & \cos \theta_L \end{pmatrix} = (\bar{b}_{1L} \cos \theta_L + \bar{b}_{2L} \sin \theta_L, -\bar{b}_{1L} \sin \theta_L + \bar{b}_{2L} \cos \theta_L) \\ U_L^\dagger \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_L & \sin \theta_L \\ -\sin \theta_L & \cos \theta_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1L} \cos \theta_L + b_{2L} \sin \theta_L \\ -b_{1L} \sin \theta_L + b_{2L} \cos \theta_L \end{pmatrix} \\ (\bar{b}_{1R} \bar{b}_{2R}) U_R &= (\bar{b}_{1R} \bar{b}_{2R}) \begin{pmatrix} \cos \theta_R & -\sin \theta_R \\ \sin \theta_R & \cos \theta_R \end{pmatrix} = (\bar{b}_{1R} \cos \theta_R + \bar{b}_{2R} \sin \theta_R, \bar{b}_{1R} \sin \theta_R + \bar{b}_{2R} \cos \theta_R) \\ U_R^\dagger \begin{pmatrix} b_{1R} \\ b_{2R} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_R & \sin \theta_R \\ -\sin \theta_R & \cos \theta_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1R} \\ b_{2R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1R} \cos \theta_R + b_{2R} \sin \theta_R \\ -b_{1R} \sin \theta_R + b_{2R} \cos \theta_R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という変換を受けるので、新しく

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b'_{1L} \\ b'_{2L} \end{pmatrix} &= U_L^\dagger \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_L & \sin \theta_L \\ -\sin \theta_L & \cos \theta_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1L} \cos \theta_L + b_{2L} \sin \theta_L \\ -b_{1L} \sin \theta_L + b_{2L} \cos \theta_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b'_{1R} \\ b'_{2R} \end{pmatrix} &= U_R^\dagger \begin{pmatrix} b_{1R} \\ b_{2R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_R & \sin \theta_R \\ -\sin \theta_R & \cos \theta_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1R} \\ b_{2R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1R} \cos \theta_R + b_{2R} \sin \theta_R \\ -b_{1R} \sin \theta_R + b_{2R} \cos \theta_R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

というようにフェルミオン場 a', b' を定義します。このように定義したフェルミオン場は質量項を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= -(\bar{b}'_{1L} \bar{b}'_{2L}) \begin{pmatrix} M'_1 & 0 \\ 0 & M'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{1R} \\ b'_{2R} \end{pmatrix} - (\bar{b}'_{1R} \bar{b}'_{2R}) \begin{pmatrix} M'_1 & 0 \\ 0 & M'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{1L} \\ b'_{2L} \end{pmatrix} \\ &= -(M'_1 \bar{b}'_{1L} b'_{1R} + M'_2 \bar{b}'_{2L} b'_{2R}) - (M'_1 \bar{b}'_{1R} b'_{1L} + M'_2 \bar{b}'_{2R} b'_{2L}) \\ &= -M'_1 (\bar{b}'_{1L} b'_{1R} + \bar{b}'_{1R} b'_{1L}) - M'_2 (\bar{b}'_{2L} b'_{2R} + \bar{b}'_{2R} b'_{2L}) \\ &= -M'_1 \bar{b}'_1 b'_1 - M'_2 \bar{b}'_2 b'_2 \end{aligned}$$

とするので、 b'_i は対角化された質量行列を持つ物理的な状態 (質量の固有状態) になります。このようにヒッグス場と結合する項に世代間が混ざる項を加えたとき、質量の固有状態になる世代間を組み合わせさせた場 (回転した状態とよく表現される) が出てきます。

次に a_i の右巻きがいる場合を考え、それらにも質量を与えます。そのためにヒッグス場との結合の仕方を変更します。上の結合している項は

$$-\sqrt{2} G_{ij} \bar{L}_i \Phi R_j - \sqrt{2} (G_{ij} \bar{L}_i \Phi R_j)^\dagger$$

となっていたので、これに右巻きの A の項を加えて

$$-\sqrt{2}G_{ij}\bar{L}_i\Phi R_j - \sqrt{2}F_{ij}\bar{L}_i\Phi A_j - \sqrt{2}(G_{ij}\bar{L}_i\Phi R_j)^\dagger - \sqrt{2}(F_{ij}\bar{L}_i\Phi A_j)^\dagger$$

複素スカラー場の 2 重項はポテンシャルの底において下成分しか値を持たないようにするため、まだ右巻きの質量項を作れないので、 A と結合するヒッグス場を

$$\mathcal{L}_{HF} = -\sqrt{2}G_{ij}\bar{L}_i\Phi R_j - \sqrt{2}F_{ij}\bar{L}_i\tilde{\Phi} A_j - \sqrt{2}(G_{ij}\bar{L}_i\Phi R_j)^\dagger - \sqrt{2}(F_{ij}\bar{L}_i\tilde{\Phi} A_j)^\dagger$$

と変更します。 $\tilde{\Phi}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^* &= i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{+*} \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^{+*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \\ (\phi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2))\end{aligned}$$

$SU(2)$ の性質のために $\tilde{\Phi}$ も Φ と同じ $SU(2)$ の変換を受けます (「 $U(N)$ と $SU(N)$ 」参照)。なので、質量項の計算は単に新しい項が増えただけとして扱えます。このとき真空期待値 v を Φ と同じに与えれば

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

となって上成分に値を持たせられます。これを入れると

$$\bar{L}_1\tilde{\Phi}A_1 = (\bar{a}_{1L} \ \bar{b}_{1L}) \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} a_{1R} = \frac{v}{\sqrt{2}}\bar{a}_{1L}a_{1R}$$

となるので、質量項は

$$\mathcal{L}_M = -M_{ij}^{(b)}\bar{b}_{iL}b_{jR} - M_{ij}^{(b)*}\bar{b}_{jR}b_{iL} - M_{ij}^{(a)}\bar{a}_{iL}a_{jR} - M_{ij}^{(a)*}\bar{a}_{jR}a_{iL}$$

$M_{ij}^{(a)} = vF_{ij}$, $M_{ij}^{(b)} = vG_{ij}$ としています。

$M^{(a)}, M^{(b)}$ を対角化します。やることは同じで、ユニタリ行列 U_L, U_R と V_L, V_R を使って

$$M^{(a)'} = V_L^\dagger M^{(a)} V_R, \quad M^{(b)'} = U_L^\dagger M^{(b)} U_R$$

とすればいいです。ここでも対角化された質量行列 $M^{(a)'}, M^{(b)'}$ は実数にできます。この変換によって $M^{(b)}$ での b_i は上と同じになり、 $M^{(a)}$ での a_i も同じ形になっているので、新しいフェルミオン場 a'_i, b'_i は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a'_{1L} \\ a'_{1L} \end{pmatrix} &= V_L^\dagger \begin{pmatrix} a_{1L} \\ a_{2L} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a'_{1R} \\ a'_{2R} \end{pmatrix} = V_R^\dagger \begin{pmatrix} a_{1R} \\ a_{2R} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b'_{1L} \\ b'_{2L} \end{pmatrix} &= U_L^\dagger \begin{pmatrix} b_{1L} \\ b_{2L} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b'_{1R} \\ b'_{2R} \end{pmatrix} = U_R^\dagger \begin{pmatrix} b_{1R} \\ b_{2R} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって、質量項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M &= -(\bar{b}'_{1L} \bar{b}'_{2L}) \begin{pmatrix} M_1^{(b)'} & 0 \\ 0 & M_2^{(b)'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{1R} \\ b'_{2R} \end{pmatrix} - (\bar{b}'_{1R} \bar{b}'_{2R}) \begin{pmatrix} M_1^{(b)'} & 0 \\ 0 & M_2^{(b)'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{1L} \\ b'_{2L} \end{pmatrix} \\
&\quad - (\bar{a}'_{1L} \bar{a}'_{2L}) \begin{pmatrix} M_1^{(a)'} & 0 \\ 0 & M_2^{(a)'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{1R} \\ a'_{2R} \end{pmatrix} - (\bar{a}'_{1R} \bar{a}'_{2R}) \begin{pmatrix} M_1^{(a)'} & 0 \\ 0 & M_2^{(a)'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{1L} \\ a'_{2L} \end{pmatrix} \\
&= -M_1^{(b)'} \bar{b}'_1 b'_1 - M_2^{(b)'} \bar{b}'_2 b'_2 - M_1^{(a)'} \bar{a}'_1 a'_1 - M_2^{(a)'} \bar{a}'_2 a'_2
\end{aligned}$$

となって、全てのフェルミオン場に質量を与えています。

ここまで2世代でやってきましたが話の流れから予想できるように、 U, V の形を具体的に与えなければ世代がいくつでも同じになるので n 世代だと

$$\mathcal{L}_M = - \sum_{i=1}^n M_i^{(a)'} \bar{a}'_i a'_i - \sum_{i=1}^n M_i^{(b)'} \bar{b}'_i b'_i$$

となるだけです。

質量項の話は終わりにして今度は $W_{\pm}$ ボソンとの相互作用項を見ます。ワインバーグ・サラムモデルの相互作用項から $W_{\pm}$ の項を取り出して

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2\sqrt{2}} (J_- \cdot W_- + J_+ \cdot W_+)$$

カレントは電子と電子ニュートリノでの第1世代の場合では

$$\begin{aligned}
J_-^\alpha &= 2\bar{L}_e \gamma^\mu T_- L_e = 2\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} \\
J_+^\mu &= 2\bar{L}_e \gamma^\mu T_+ L_e = 2\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L
\end{aligned}$$

これを n 世代に一般化すれば、 a_i, b_i によって

$$\begin{aligned}
2\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} &\Rightarrow 2\bar{b}_{iL} \gamma^\mu a_{iL} \\
2\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L &\Rightarrow 2\bar{a}_{iL} \gamma^\mu b_{iL}
\end{aligned}$$

と変更されるので、 n 世代含んでいる $\mathcal{L}_{int}$ は

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n (\bar{b}_{iL} \gamma_\mu a_{iL} W_-^\mu + \bar{a}_{iL} \gamma_\mu b_{iL} W_+^\mu)$$

これを質量の固有状態である a'_i, b'_i に書き換えると

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n (\bar{b}'_{jL} (U_L^\dagger)_{ji} \gamma_\mu (V_L)_{ik} a'_{kL} W_-^\mu + \bar{a}'_{jL} (V_L^\dagger)_{ji} \gamma_\mu (U_L)_{ik} b'_{kL} W_+^\mu)$$

U, V はガンマ行列とは無関係なので交換することから、世代を混ぜる行列をまとめて

$$S = V_L^\dagger U_L$$

と定義します (ユニタリー行列同士の積もユニタリー行列)。これによって

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n (\bar{b}'_{iL} (S^\dagger)_{ij} \gamma_\mu a'_{jL} W_-^\mu + \bar{a}'_{iL} \gamma_\mu S_{ij} b'_{jL} W_+^\mu) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n (\bar{b}'_{iL} S_{ji}^* \gamma_\mu a'_{jL} W_-^\mu + \bar{a}'_{iL} \gamma_\mu S_{ij} b'_{jL} W_+^\mu)\end{aligned}$$

添え字の L を外した形も出しておくと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n (\bar{b}'_i \frac{1+\gamma_5}{2} (S^\dagger)_{ij} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} a'_j W_-^\mu + \bar{a}'_{iL} \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\mu S_{ij} \frac{1-\gamma_5}{2} b'_{jL} W_+^\mu) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n (\bar{b}'_i (S^\dagger)_{ij} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} a'_j W_-^\mu + \bar{a}'_i \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} S_{ij} b'_j W_+^\mu)\end{aligned}$$

ここでユニタリー行列の自由度を持ち出します。複素数の $n \times n$ ユニタリー行列は $2n^2$ 個の実数を含みますが、ユニタリー行列の性質から独立なのは n^2 個です (「 $U(N)$ と $SU(N)$ 」参照)。複素数のユニタリー行列の実数部分を分離したとすれば ($V_{ij} = |V_{ij}|e^{i\alpha_i}$)、その実数の $n \times n$ ユニタリー行列には直交行列であることからの $n(n-1)/2$ 個の独立な実数があります ($M_{ij}^t M_{jk} = \delta_{ik}$ なので、 $n \times n$ 直交行列の実数 n^2 個には $i=k$ の対角成分が 1 から n 個、対角成分以外 0 となる $i \neq k$ の i, k の選び方から $n(n-1)/2$ 個の制限があるので、独立なのは $n^2 - n - n(n-1)/2 = n(n-1)/2$ 個)。この直交行列が回転行列と考えれば回転の角度のパラメータが $n(n-1)/2$ 個いると言えます。そして、残っている $n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ 個の実数は位相 $e^{i\alpha_i}$ にいる実数と考えます。

質量行列を実数にするために位相をフェルミオン場の再定義で吸収したので、ここでも同じことをします。しかし、例えば $i=1$ では

$$\begin{aligned}\bar{a}'_{1L} \gamma_\mu S_{1j} b'_{jL} &= \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu S_{11} b'_{1L} + \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu S_{12} b'_{2L} + \cdots + \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu S_{1n} b'_{nL} \\ &= \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu |S_{11}| e^{i\alpha_1} b'_{1L} + \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu |S_{12}| e^{i\alpha_2} b'_{2L} + \cdots + \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu |S_{1n}| e^{i\alpha_n} b'_{nL}\end{aligned}$$

同様に $i=2$ では

$$\bar{a}'_{2L} \gamma_\mu S_{2j} b'_{jL} = \bar{a}'_{2L} \gamma_\mu |S_{21}| e^{i\beta_1} b'_{1L} + \bar{a}'_{2L} \gamma_\mu |S_{22}| e^{i\beta_2} b'_{2L} + \cdots + \bar{a}'_{2L} \gamma_\mu |S_{2n}| e^{i\beta_n} b'_{nL}$$

となっていて、この形とフェルミオン場は a_{iL}, b_{iL} しかないことを考えると、全ての位相をフェルミオン場の再定義で吸収できないことが分かります。実際に見やすくするために

$$\begin{aligned}\bar{a}'_{1L} \gamma_\mu S_{1j} b'_{jL} &= \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu |S_{11}| e^{i\alpha_1} b'_{1L} + \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu |S_{12}| e^{i\beta_2} b'_{2L} + \cdots + \bar{a}'_{1L} \gamma_\mu |S_{1n}| e^{i\beta_n} b'_{nL} \\ \bar{a}'_{2L} \gamma_\mu S_{2j} b'_{jL} &= \bar{a}'_{2L} \gamma_\mu |S_{21}| e^{i\alpha_2} b'_{1L} + \bar{a}'_{2L} \gamma_\mu |S_{22}| e^{i\lambda_2} b'_{2L} + \cdots + \bar{a}'_{2L} \gamma_\mu |S_{2n}| e^{i\lambda_n} b'_{nL}\end{aligned}$$

と書き直して、これに対してフェルミオン場を

$$\bar{a}_{iL} \Rightarrow \bar{a}_{iL} e^{-i\alpha_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad b_{jL} \Rightarrow e^{i\beta_j} b_{jL} \quad (j = 2, \dots, n)$$

と再定義しても、 $n + n - 1 = 2n - 1$ 個の位相しか消せないことが分かります。つまり、フェルミオン場の再定義 (物理量を変化させない変更) では吸収しきれない位相 (実数) が $n(n+1)/2 - (2n-1) = (n-1)(n-2)/2$ 個残ります。よって、世代を混ぜる行列 S は世代数が $n = 1, 2$ 以外では回転の自由度の他に位相の自由度を持っています。

これがワイン・バーグサラムモデルにフェルミオンの世代間を混ぜる項を加えたときの特徴的な状況です。この状況に具体的な粒子を入れた話をします。そもそも、電子と電子ニュートリノ、ミューオンとミューニュートリノ、タウオンとタウニュートリノの組み合わせを考えるだけなら、このような話は加えなくても済みます (ニュートリノに質量を与えるならニュートリノ振動で必要になる)。必要になるのはクォークを含める場合です。フレーバで区別されるクォークには全て質量があるので、フレーバで世代を組ませたときに世代が混ざる項を付け加える必要があります。そのため、ここまで見てきた話がそのままクォークに適用されます。

第2世代まで考えたクォークを見ます (2世代なので S の位相は全て吸収される)。世代の組み合わせは u, d, c, s のクォークによって

$$Q_1 = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

これを相互作用項に入れると

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L W_-^\mu + \bar{s}_L \gamma_\mu c_L W_-^\mu + \bar{u}_L \gamma_\mu d_L W_+^\mu + \bar{c}_L \gamma_\mu s_L W_+^\mu)$$

左巻きを変形すれば

$$\begin{aligned} \bar{d} \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u W_-^\mu + \bar{s}_L \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} c W_-^\mu &= \bar{d} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u W_-^\mu + \bar{s} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} c W_-^\mu \\ &= (\bar{d} \bar{s}) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} W_-^\mu \end{aligned}$$

W_+^μ の項はこれのエルミート共役なので

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} ((\bar{d} \bar{s}) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix} W_-^\mu + (\bar{u} \bar{c}) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} W_+^\mu)$$

これを質量の固有状態 u', d', c', s' に変えれば

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} ((\bar{d}' \bar{s}') S^\dagger \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u' \\ c' \end{pmatrix} W_-^\mu + (\bar{u}' \bar{c}') \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} S \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} W_+^\mu)$$

回転行列 S を

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}$$

として新しく

$$\begin{pmatrix} d'_c \\ s'_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \cos \theta_c + s' \sin \theta_c \\ -d' \sin \theta_c + s' \cos \theta_c \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}} ((\bar{d}'_c \bar{s}'_c) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u' \\ c' \end{pmatrix} W_-^\mu + (\bar{u}' \bar{c}') \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} d'_c \\ s'_c \end{pmatrix} W_+^\mu)$$

さらに変形させると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \frac{g}{\sqrt{2}} ((\bar{d}'_c \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u' + \bar{s}'_c \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} c') W_-^\mu + \dots) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} (2(\bar{d}'_c \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u' + \bar{s}'_c \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} c') W_-^\mu + h.c) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} (2((\bar{u}' \bar{d}'_c) \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u' \\ d'_c \end{pmatrix} + (c' \bar{s}'_c) \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} c' \\ s'_c \end{pmatrix}) W_-^\mu + h.c) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} (2(\bar{Q}_L^{(1)'} \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q_L^{(1)'} + \bar{Q}_L^{(2)'} \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q_L^{(2)'}) W_-^\mu + h.c) \end{aligned}$$

なので、第1世代 $Q^{(1)}$ と第2世代 $Q^{(2)}$ の左手系の2重項は

$$Q_L^{(1)'} = \begin{pmatrix} u' \\ d'_c \end{pmatrix}_L, \quad Q_L^{(2)'} = \begin{pmatrix} c' \\ s'_c \end{pmatrix}_L$$

ここで導入された d と s を混ぜる行列をカビボ行列 (Cabibbo matrix)、角度 θ_c をカビボ角 (Cabibbo angle) と呼びます。

次に3世代に広がります。第3世代は t, b によって

$$Q_3 = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

と与えられます。相互作用項の形は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L W_-^\mu + \bar{s}_L \gamma_\mu c_L W_-^\mu + \bar{b}_L \gamma_\mu t_L W_-^\mu + \bar{u}_L \gamma_\mu d_L W_+^\mu + \bar{c}_L \gamma_\mu s_L W_+^\mu + \bar{t}_L \gamma_\mu b_L W_+^\mu) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} ((\bar{d} \bar{s} \bar{b}) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} W_-^\mu + (\bar{u} \bar{c} \bar{t}) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} W_+^\mu) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} ((\bar{d}' \bar{s}' \bar{b}') S^\dagger \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} W_-^\mu + (\bar{u}' \bar{c}' \bar{t}') \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} S \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} W_+^\mu) \end{aligned}$$

となるだけです。この3世代での行列 S を小林・益川行列、もしくはカビボもつけてカビボ・小林・益川行列と言います。ここで問題なのは世代を混ぜる行列 S がどうなっているのかです。 S には回転のパラメータである角度が $3(3-1)/2 = 3$ 個、位相が $(3-1)(3-2)/2 = 1$ 個います。なので、回転は角度を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とした3次元回転の行列 R の組み合わせとし、そこに位相を含んだ行列 C を加えます。この組み合わせ方は任意ですが、行列の名前になっている小林誠と益川敏英は ($c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$)

$$\begin{aligned} S_{KM} &= R_1(\theta_2)R_3(\theta_1)C(0,0,\alpha)R_1(\theta_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\alpha} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\alpha} \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\alpha} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と与えました。回転行列の符号の違いで符号のつき方が異なっている場合もあります。 R_i は i 成分を軸とすることを表し (例えば R_1 は x 軸周りの回転行列)、 C の括弧は行列の対角成分がどうなっているのかを表しています。他にも Particle Data Group による標準的な行列 (standard parameterization と言ったりする) として ($c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$)

$$\begin{aligned} S_{PDG} &= R_1(\theta_{23})C(-\alpha/2,0,\alpha/2)R_2(\theta_{13})C(\alpha/2,0,-\alpha/2)R_3(\theta_{12}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\alpha} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\alpha} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\alpha} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\alpha} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\alpha} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という行列がよく出てきます。

どちらにしても行列の中に位相は入ってきています。ただし、特定の角度を選ぶことで消せます。例えば、 S_{KM} において $\theta_3 = 0$ とすれば $R_1(\theta_3)$ は単位行列になり

$$S_{KM} = R_1(\theta_2)R_3(\theta_1)C(0,0,\alpha) = R_1(\theta_2)R_3(\theta_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

となるので、

$$S_{KM} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \Rightarrow R_1(\theta_2)R_3(\theta_1) \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}$$

このように $e^{i\alpha}b'$ を b' と定義することで位相を消せます。 S_{PDG} の場合でも例えば $s_{12} = s_{23} = 0$ とすれば

$$S_{PDG} = C(-\alpha/2, 0, \alpha/2)R_2(\theta_{13})C(\alpha/2, 0, -\alpha/2)$$

になるので

$$(\bar{u}' \ \bar{c}' \ \bar{t}')S_s \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \Rightarrow (\bar{u}' \ \bar{c}' \ \bar{t}')R_2(\theta_{13}) \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}$$

のように $e^{i\alpha}u'$ を u' 、 $e^{i\alpha}d'$ を d' 、 $e^{-i\alpha}t'$ を t' 、 $e^{-i\alpha}b'$ を b' と定義することで位相は消えます。

これら 3 世代用の行列のパラメータはワインバーグ・サラムモデルの枠組みの中から 1 つも決めることができなく、実験からの値を入れる必要があります。その実験結果は大雑把には

$$S \simeq \begin{pmatrix} 0.97 & 0.22 & 0.005 \\ 0.22 & 0.97 & 0.04 \\ 0.001 & 0.04 & 0.99 \end{pmatrix}$$

となっています (値は絶対値です)。もっとちゃんとした値は Particle Data Group の HP に載っています (downloads の Particle Physics Booklet の CP violation。もしくは Reviews, Tables, Plots の Standard Model and Related Topics の Cabibbo-Kobayashi-Maskawa quark-mixing matrix (rev.))。このような結果から、 $s_{12} = \lambda \ll 1$ として、4 つの実数 λ, A, ρ, η によって

$$s_{12} = \lambda, \ s_{23} = A\lambda^2, \ s_{13}e^{-i\alpha} = A\lambda^3(\rho - i\eta)$$

$$c_{12} \simeq 1 - \frac{\lambda^2}{2}, \ c_{23} \simeq 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^4, \ c_{13} \simeq 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^6$$

と近似し ($\sin \theta_{12} = \lambda$, $\theta_{12} = \sin^{-1} \lambda \simeq \lambda$, $\cos \theta_{12} \simeq \cos \lambda \simeq 1 - \lambda^2/2$)、 λ^3 まで拾った

$$S_s = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$$

というのが Wolfenstein によって与えられました。

このように第 3 世代まで広げたときの特徴は位相による虚数があることで、この部分があると CP 不変性が壊れます。簡単にこれを見ておきます。そのために $W_{\pm}$ の変換性を出します。カレントは

$$J_-^{\mu} = 2\bar{L}_e\gamma^{\mu}T_-L_e = 2\bar{e}_L\gamma^{\mu}\nu_{eL} = 2\bar{e}\gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)\nu_e$$

という構成なので、ベクトルと軸性ベクトルでの CP 変換を見ます。表記を簡単にするために

$$\bar{\psi}_a\gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)\psi_b$$

として、ローマ文字の添え字は粒子の区別を表すとします。 C 変換による結果は「 C, P, T 変換」で求めたように

$$\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_b(x) \Rightarrow \bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu(-1-\gamma_5)\psi_a(x)$$

P 変換では γ_μ はベクトル、 $\gamma_\mu\gamma_5$ は軸性ベクトルなので

$$\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_b(x) \Rightarrow \bar{\psi}_a(t, -\mathbf{x})\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi_b(t, -\mathbf{x})$$

となり、 CP 変換で

$$\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_b(x) \Rightarrow -\bar{\psi}_b(t, -\mathbf{x})\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_a(t, -\mathbf{x})$$

と変換されます。例えば、電子と電子ニュートリノの場合では

$$\begin{aligned} J_-^\mu &= \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_e = 2\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{eL} \Rightarrow -\bar{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma^5)e = -2\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L = -J_+^\mu(t, -\mathbf{x}) \\ J_+^\mu &= \bar{\nu}_e\gamma^\mu(1-\gamma^5)e = 2\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L \Rightarrow -\bar{e}_L\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_{eL} = -2\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{eL} = -J_-^\mu(t, -\mathbf{x}) \end{aligned}$$

そして、ワインバーグ・サラムモデルを CP 変換に対して不変にするためには

$$J_-^\mu(x)W_{-\mu}(x) + J_+^\mu(x)W_{+\mu}(x) \Rightarrow J_-^\mu(t, -\mathbf{x})W_{-\mu}(t, -\mathbf{x}) + J_+^\mu(t, -\mathbf{x})W_{+\mu}(t, -\mathbf{x})$$

でなければいけないので、 $W_\pm^\mu$ は

$$W_-^\mu(x) \Rightarrow -W_+^\mu(t, -\mathbf{x}), \quad W_+^\mu(x) \Rightarrow -W_-^\mu(t, -\mathbf{x})$$

と変換されます。このことを踏まえて、 S がいる形を CP 変換すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{b}'_i S_{ji}^* \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} a_j W_-^\mu + \bar{a}_i S_{ij} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} b'_j W_+^\mu) \\ &\Rightarrow \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{a}_j S_{ji}^* \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} b'_i W_+^\mu + \bar{b}'_j S_{ij} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} a_i W_-^\mu) \end{aligned}$$

よって、 S が複素数のとき元の形と変わるために、 CP 不変性がなくなります。このように3世代のクォークがあるときに CP 不変性が破れるというのを扱う理論を小林・益川理論と呼びます (CP 不変性の破れは K 中間子の崩壊で確認されていた)。これによって c クォークの存在が実験で発見される前に予想されました。

・補足

任意の正方行列は2つのユニタリー行列によって対角化できることを示します (数学の「対角化」も参照)。正方行列を A とし、その対角化された行列を A_D とします。 $AA^\dagger$ は

$$(AA^\dagger)^\dagger = AA^\dagger$$

から、エルミート行列です。エルミート行列の対角化は1つのユニタリー行列 U によって

$$U^\dagger(AA^\dagger)U = M_D$$

とでき、対角行列 M_D は実数です。 M_D は実数の対角行列なので、対角行列 A_D とその複素共役 A_D^* の積によって

$$A_D A_D^* = M_D$$

と書けます。そして A_D から

$$H = U A_D U^\dagger$$

として、別の行列 H を作ります。さらに A が H とまた別の行列 V によって

$$A = H V$$

となっているとします。これから

$$A = U A_D U^\dagger V = U A_D U'$$

として、 A と対角行列 A_D とが繋がります。 U' が何かを知るために $V V^\dagger$ を計算してみると

$$\begin{aligned} V V^\dagger &= H^{-1} A A^\dagger (H^{-1})^\dagger \\ &= H^{-1} U U^\dagger A A^\dagger U U^\dagger (H^{-1})^\dagger \\ &= H^{-1} U M_D U^\dagger (H^{-1})^\dagger \\ &= U A_D^{-1} U^\dagger U M_D U^\dagger U (A_D^{-1})^\dagger U^\dagger \quad (H = U A_D U^\dagger, H^{-1} H = 1 \Rightarrow H^{-1} = U A_D^{-1} U^\dagger) \\ &= U A_D^{-1} A_D A_D^* (A_D^{-1})^* U^\dagger \\ &= 1 \end{aligned}$$

A_D は対角行列なので A_D^{-1} も対角行列であることから、エルミート共役の転置がなくなって複素共役だけになります。というわけで、 $V V^\dagger = 1$ なので、 V はユニタリー行列です。ユニタリー行列同士の積はユニタリー行列なので $U' = U^\dagger V$ もユニタリー行列です。よって、正方行列は2つのユニタリー行列によって対角化されます。これは正方行列での特異値分解です。