

Wess-Zumino モデル

マヨラナスピノールが出てくる例として Wess-Zumino モデルと呼ばれるものを使います。本来 Wess-Zumino モデルは超対称性の簡単なモデルとして使われるものなのですが、超対称性についてはほぼ無視して、スピノール計算の練習用程度の扱いしかしません。超対称性変換は行いますが、それ以上の説明はしていません。定義を書いていない記号は「ローレンツ群と $SL(2, C)$ 」と同じにしています。

まず、ボソンとフェルミオンが混ざるような変換の元で不変なラグランジアンを作ります。ボソンとフェルミオンが混ざる変換を作用させるので、ボソンとフェルミオンの構造を似た段階に持つていく必要があります。フェルミオンを表現するスピノールは粒子と反粒子の成分がそれぞれスピン上向き、下向きに対応する成分を持っています。なので、4つの粒子状態を持っています。対して実数スカラー場によって記述されるボソンは1つの粒子の記述しかしません。これではスピノールの自由度が明らかに高すぎなので制限をかけます。フェルミオンのスピン上向き、下向きに対して制限を与えるのは物理的に問題があるので、粒子、反粒子の区別をなくさせます。これはマヨラナスピノールを使うことにすればいいです (マヨラナスピノールは粒子と反粒子が等しいとする表現)。そうすれば、実数スカラー場を2つ用意することで、マヨラナスピノールによるフェルミオンと粒子の自由度が一致します。

このようなことを踏まえて、ラグランジアンを作れば

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{1}{2}\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi - \frac{1}{2}m^2A^2 - \frac{1}{2}m^2B^2 - \frac{1}{2}m\bar{\Psi}\Psi \quad (1)$$

という形が考えられます。 A, B は実数スカラー場で、 Ψ はマヨラナスピノール $\Psi = \Psi_c$ (添え字の c は荷電共役) です。これが Wess-Zumino モデルの相互作用なしの形です (カタカナ表記ではヴェス・ズミノかウェス・ズミノと書かれます)。マヨラナスピノールが使われている以外の特徴的な点はすべての質量を同じにしているところです。実数スカラー場による項は複素スカラー場

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB)$$

を使うことで

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) + \frac{1}{2}\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{2}m\bar{\Psi}\Psi$$

と書き換えられます。さらに簡単化するために質量は0だとして

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{1}{2}\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi$$

を使うことにします。

先にマヨラナスピノールによって第三項がどうなっているのか見ておきます。マヨラナスピノールは2つの2成分スピノールによって

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\psi^\alpha \bar{\psi}_{\dot{\alpha}})$$

となっています (2成分スピノールでの $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ は $\psi^\dagger\gamma_0$ ではない)。2成分スピノールについているギリシャ文字の添え字 (ドットがついてるのも) は1,2だとして、アインシュタインの規約を使います。そうすると

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi &= (\psi^\alpha\bar{\psi}_{\dot{\alpha}})\gamma_\mu\partial^\mu\begin{pmatrix}\psi_\alpha\\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} \\
&= (\psi^\alpha\bar{\psi}_{\dot{\alpha}})\begin{pmatrix}0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial^\mu\psi_\beta\\ \partial^\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\end{pmatrix} \\
&= (\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}})\begin{pmatrix}\partial^\mu\psi_\beta\\ \partial^\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\end{pmatrix} \\
&= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\partial^\mu\psi_\beta + \psi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial^\mu\bar{\psi}^{\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{2}$$

$\sigma_\mu, \bar{\sigma}_\mu$ は

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$$

と定義し、2成分スピノールの添え字のつき方は

$$\sigma^\mu = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}, \quad \bar{\sigma}^\mu = (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}$$

としています。これらは4元ベクトルでのパウリ行列の表現から

$$\begin{aligned}
\sigma^0 &= \sigma_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \bar{\sigma}^0 = \bar{\sigma}_0, \quad \sigma^1 = -\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = -\bar{\sigma}^1 = \bar{\sigma}_1 \\
\sigma^2 &= -\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix} = -\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}_2, \quad \sigma^3 = -\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} = -\bar{\sigma}^3 = \bar{\sigma}_3
\end{aligned}$$

2成分スピノールの添え字の上げ下げは反対称な

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} = (i\sigma^2)^{\alpha\beta}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = (-i\sigma^2)_{\alpha\beta} \\
\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} = (i\sigma^2)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = (-i\sigma^2)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}
\end{aligned}$$

によって行われます。(2) はもう少し見やすく変形できます。そのための関係を導きます。
 $(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta}$ は

$$\begin{aligned}
(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\rho}}\epsilon_{\beta\lambda}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\rho}\lambda} \\
&= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\rho}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\rho}\lambda}(-\epsilon_{\lambda\beta}) \\
&= (-i\sigma^2)_{\dot{\alpha}\dot{\rho}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\rho}\lambda}(i\sigma^2)_{\lambda\beta} \\
&= (\sigma^2)_{\dot{\alpha}\dot{\rho}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\rho}\lambda}(\sigma^2)_{\lambda\beta} \\
&= (\sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2)_{\dot{\alpha}\beta}
\end{aligned}$$

この $\mu = 0, 1, 2, 3$ を見てみると

$$\sigma^2 \bar{\sigma}^0 \sigma^2 = \sigma^2 \sigma^0 \sigma^2 = \sigma^0$$

$$\sigma^2 \bar{\sigma}^1 \sigma^2 = -\sigma^2 \sigma^1 \sigma^2 = -i \sigma^2 \sigma^3 = \sigma^1$$

$$\sigma^2 \bar{\sigma}^2 \sigma^2 = -\sigma^2 \sigma^2 \sigma^2 = -\sigma^2$$

$$\sigma^2 \bar{\sigma}^3 \sigma^2 = -\sigma^2 \sigma^3 \sigma^2 = -i \sigma^1 \sigma^2 = \sigma^3$$

$\sigma^{0,1,3} = (\sigma^{0,1,3})^T \sigma^2 = -(\sigma^2)^T$ を使えば (T は転置)

$$\sigma^2 \bar{\sigma}^\mu \sigma^2 = (\sigma^\mu)^T$$

なので

$$(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta} = (\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}\beta}^T = (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}$$

という関係が出てきます。この関係を使うと

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \partial^\mu \psi_\beta + \psi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial^\mu \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \\ &= -(\partial^\mu \psi^\beta) (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \psi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial^\mu \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \\ &= -(\partial^\mu \psi_\beta) (\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \psi^\alpha (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial^\mu \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \\ &= (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (-(\partial^\mu \psi^\beta) \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \psi^\alpha \partial^\mu \bar{\psi}^{\dot{\beta}}) \end{aligned}$$

$\psi_\beta, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ は反交換します。

どんなボソンとフェルミオンが混ざった変換に対して不変になっているのかを見ていきます。ここでの変換はラグランジアン自体を不変にはしませんが、作用

$$S = \int d^4x \mathcal{L}$$

を不変にします。そのような変換は

$$\delta A = \bar{\epsilon} \Psi$$

$$\delta B = i \bar{\epsilon} \gamma_5 \Psi$$

$$\delta \Psi = -i \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu A + \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon (\partial_\mu B)$$

$$\delta \bar{\Psi} = i \bar{\epsilon} \gamma^\mu (\partial_\mu A) - \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^\mu (\partial_\mu B)$$

$$(S = \int d^4x \mathcal{L} \Rightarrow S = \int d^4x (\mathcal{L} + \delta \mathcal{L}))$$

となっています。 ϵ は座標依存しない変換のパラメータですが、通常の実数でなくマヨラナスピノールです。ボソンの実数スカラー場である A, B の変換にはフェルミオンのスピノールがいて、スピノール Ψ には実数スカラー場 A, B がある特殊な変換です。 $\delta A, \delta B$ にスピノールがいても $\bar{\epsilon} \Psi (1 \times 4 \text{ 行列と } 4 \times 1 \text{ 行列}), \bar{\epsilon} \gamma_5 \Psi (1 \times 4 \text{ 行列}, 4 \times 4$

行列、 4×1 行列) のように組み合わせられているので、スピノール成分を持った行列でなく、ちゃんとただのスカラー (数) になっています。スピノールの変換 $\delta\Psi$ では $\bar{\epsilon}\gamma^\mu$ や $\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma^\mu$ のために 4 成分になっています。

この変換に作用が不変であることを見ていきます。まず、使う関係を出しておきます。マヨラナスピノールでガンマ行列を挟んだものが出てきますが、それは

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}\gamma_\mu\eta &= \xi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\eta = \xi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\eta_c \\
&= \xi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu C\bar{\eta}^T \\
&= \xi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu C(\eta^\dagger\gamma_0)^T \\
&= \xi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu C\gamma_0^T\eta^* \\
&= \xi_i^* M_{ij}\eta_j^* \\
&= -\eta_j^* \xi_i^* M_{ij} \\
&= -\eta_j^* M_{ji}\xi_i^* \\
&= -\eta^\dagger M\xi^* \\
&= -\eta^\dagger\gamma_0\gamma_\mu C\gamma_0^T\xi^* \\
&= -\bar{\eta}\gamma_\mu C(\xi^\dagger\gamma_0)^T \\
&= -\bar{\eta}\gamma_\mu\xi
\end{aligned} \tag{3}$$

このようになっています (C は荷電共役演算子)。 ξ, η はグラスマン数なので入れ替えると符号が反転します。 $M = M^T$ であることは

$$\begin{aligned}
M^T &= (\gamma_0\gamma_\mu C\gamma_0^T)^T \\
&= \gamma_0 C^T \gamma_\mu^T \gamma_0^T \\
&= -\gamma_0 C\gamma_\mu^T \gamma_0^T \quad (\gamma^0 C = -\gamma^0 C^T) \\
&= \gamma_0\gamma_\mu C\gamma_0^T \quad (C\gamma^{\mu T} = -\gamma^\mu C) \\
&= M
\end{aligned} \tag{4}$$

によって確かめられます。このようにスピノールでガンマ行列を挟んでいるときの関係は下の補足にまとめてあります。

A に対する変換は

$$\begin{aligned}
\delta(\partial_\mu A)^2 &= \delta((\partial_\mu A)(\partial^\mu A)) \\
&= 2(\partial_\mu \delta A)(\partial^\mu A) \\
&= 2\bar{\epsilon}(\partial_\mu \Psi)(\partial^\mu A)
\end{aligned}$$

微分演算子と δ は交換します。 B では

$$\begin{aligned}
\delta(\partial_\mu B)^2 &= \delta((\partial_\mu B)(\partial^\mu B)) \\
&= 2\partial_\mu(i\bar{\epsilon}\gamma_5\Psi)(\partial^\mu B) \\
&= 2i\bar{\epsilon}\gamma_5(\partial_\mu\Psi)(\partial^\mu B)
\end{aligned}$$

Ψ では

$$\begin{aligned}
\delta(\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi) &= (\delta\bar{\Psi})i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + \bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\delta\Psi \\
&= (\delta\bar{\Psi})i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi - \partial^\mu\bar{\Psi}i\gamma_\mu\delta\Psi + \partial^\mu(\bar{\Psi}i\gamma_\mu\delta\Psi) \\
&= (\delta\bar{\Psi})i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + (\delta\bar{\Psi})i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + \partial^\mu(\bar{\Psi}i\gamma_\mu\delta\Psi) \\
&= 2(\delta\bar{\Psi})i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + 2\partial^\mu(\bar{\Psi}i\gamma_\mu\delta\Psi)
\end{aligned}$$

第二項はラグランジアン上では生き残りますが、作用の段階では積分で消せるので、無視します。そうすると

$$\begin{aligned}
\delta(\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi) &= 2(\delta\bar{\Psi})i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi \\
&= 2i\bar{\epsilon}(i\gamma^\nu(\partial_\nu A) - \gamma_5\gamma^\nu(\partial_\nu B))\gamma_\mu\partial^\mu\Psi \\
&= 2i\bar{\epsilon}(i\gamma^\nu\gamma_\mu(\partial_\nu A) - \gamma_5\gamma^\nu\gamma_\mu(\partial_\nu B))\partial^\mu\Psi \\
&= -2i\bar{\epsilon}(i\gamma_\nu\gamma_\mu(\partial^\nu\partial^\mu A)\Psi - \gamma_5\gamma_\nu\gamma_\mu(\partial^\mu\partial^\nu B)\Psi) + 2i\bar{\epsilon}\partial^\mu((i\gamma^\nu\gamma_\mu(\partial_\nu A) - \gamma_5\gamma^\nu\gamma_\mu(\partial_\nu B))\Psi)
\end{aligned}$$

第二項はまた全微分なので無視します。 $\partial^\nu\partial^\mu = \partial^\mu\partial^\nu$ とガンマ行列の反交換関係

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

を使えば

$$\begin{aligned}
\gamma_\nu\gamma_\mu(\partial^\nu\partial^\mu A) &= \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu(\partial^\nu\partial^\mu A) + \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu(\partial^\nu\partial^\mu A) \\
&= \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu(\partial^\mu\partial^\nu A) + \frac{1}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu(\partial^\nu\partial^\mu A) \\
&= g_{\mu\nu}(\partial^\mu\partial^\nu A)
\end{aligned}$$

とできるので

$$\begin{aligned}
\delta(\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi) &= -2i\bar{\epsilon}(i(\partial^\mu\partial_\mu A)\Psi - \gamma_5(\partial^\mu\partial_\mu B)\Psi) \\
&= 2i\bar{\epsilon}(i(\partial^\mu A) - \gamma_5(\partial^\mu B))\partial_\mu\Psi - 2i\bar{\epsilon}\partial^\mu(i(\partial_\mu A)\Psi - \gamma_5(\partial_\mu B)\Psi)
\end{aligned}$$

ここでも第二項は無視します。

A, B, Ψ の項をあわせれば

$$\int d^4x \delta \mathcal{L} = \bar{\epsilon}(\partial_\mu \Psi)(\partial^\mu A) + i\bar{\epsilon}\gamma_5(\partial_\mu \Psi)(\partial^\mu B) + i\bar{\epsilon}(i(\partial^\mu A) - \gamma_5(\partial^\mu B))(\partial_\mu \Psi)$$

$$= 0$$

となって、不変になっています。しかし、この段階では都合の悪い性質を持っています。それを見ていきます。
 A に対して 2 回変換を行うと

$$\delta_2 \delta_1 A = \delta_2(\bar{\epsilon}_1 \Psi) = \bar{\epsilon}_1 \delta_2 \Psi = \bar{\epsilon}_1(-i\gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A + \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2(\partial_\mu B))$$

δ_1 と δ_2 の順番を逆にしてみると

$$\delta_1 \delta_2 A = \delta_1(\bar{\epsilon}_2 \Psi) = \bar{\epsilon}_2 \delta_1 \Psi = \bar{\epsilon}_2(-i\gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu A + \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_1(\partial_\mu B))$$

この二つを引くと

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 A - \delta_2 \delta_1 A &= (-i\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu A + \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_1(\partial_\mu B)) - (-i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2(\partial_\mu B)) \\ &= (i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2(\partial_\mu B)) - (-i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2(\partial_\mu B)) \\ &= 2i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A \end{aligned}$$

途中で

$$\bar{\xi} \gamma_\mu \gamma_5 \eta = \bar{\eta} \gamma_\mu \gamma_5 \xi$$

を使っています。
 B の場合でも同じことになって

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 B - \delta_2 \delta_1 B &= (-i\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu A + \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_1(\partial_\mu B)) - (-i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2(\partial_\mu B)) \\ &= (i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2(\partial_\mu B)) - (-i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2(\partial_\mu B)) \\ &= 2i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu B \end{aligned}$$

つまり、 A, B に対して

$$[\delta_1, \delta_2]A = 2i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A, \quad [\delta_1, \delta_2]B = 2i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu B$$

となっています。この交換関係部分は A, B に対する空間並進を作り出しています ($i\partial_\mu$ は運動量演算子 P_μ)。
 Ψ に対してもやってみると

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 \Psi &= \delta_1(-i\gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu A + \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2(\partial_\mu B)) \\ &= (-i\gamma^\mu \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 \partial_\mu \Psi + i\gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \partial_\mu \Psi) \\ &= (-i\gamma^\mu \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 + i\gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 \gamma_5)(\partial_\mu \Psi) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]\Psi &= (-i\gamma^\mu \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 + i\gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 \gamma_5)(\partial_\mu \Psi) - (-i\gamma^\mu \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 + i\gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 \gamma_5)(\partial_\mu \Psi) \\ &= i\gamma^\mu (-\epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 + \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 + \gamma_5 \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 \gamma_5 - \gamma_5 \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 \gamma_5)(\partial_\mu \Psi) \end{aligned}$$

ここで Fierz 恒等式

$$\xi \bar{\eta} = -\frac{1}{4}(\bar{\eta} \xi + \bar{\eta} \gamma^\mu \xi \gamma_\mu - \bar{\eta} \gamma^\mu \gamma_5 \xi \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \bar{\eta} \sigma^{\mu\nu} \xi \sigma_{\mu\nu} + \bar{\eta} \gamma_5 \xi \gamma_5)$$

を使います (証明は補足で行っています)。 $\xi = \epsilon, \eta^T = \bar{\epsilon}$ とすることで

$$\begin{aligned} \epsilon_2 \bar{\epsilon}_1 - \epsilon_1 \bar{\epsilon}_2 &= -\frac{1}{4}(\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2 \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \sigma^{\mu\nu} \epsilon_2 \sigma_{\mu\nu} + \bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \epsilon_2 \gamma_5) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\bar{\epsilon}_2 \epsilon_1 + \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 \gamma_\mu - \bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_1 \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_2 \sigma^{\mu\nu} \epsilon_1 \sigma_{\mu\nu} + \bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \epsilon_1 \gamma_5) \\ &= -\frac{1}{4}(\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 + \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2 \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \sigma^{\mu\nu} \epsilon_2 \sigma_{\mu\nu} + \bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \epsilon_2 \gamma_5) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \gamma_\mu - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_2 \gamma_\mu \gamma_5 - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \sigma^{\mu\nu} \epsilon_2 \sigma_{\mu\nu} + \bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \epsilon_2 \gamma_5) \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \gamma_\mu + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \sigma^{\mu\nu} \epsilon_2 \sigma_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

これによって

$$\begin{aligned} &i\gamma^\mu \left(\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \gamma_\nu + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \sigma^{\nu\rho} \epsilon_2 \sigma_{\nu\rho}) - \frac{1}{2} \gamma_5 (\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \gamma_\nu + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \sigma^{\nu\rho} \epsilon_2 \sigma_{\nu\rho}) \gamma_5 \right) (\partial_\mu \Psi) \\ &= i\gamma^\mu \left(\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \gamma_\nu + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \sigma^{\nu\rho} \epsilon_2 \sigma_{\nu\rho}) - \frac{1}{2}(-\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \gamma_\nu + \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \sigma^{\nu\rho} \epsilon_2 \sigma_{\nu\rho}) \right) (\partial_\mu \Psi) \\ &= i\gamma^\mu \bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \gamma_\nu (\partial_\mu \Psi) \end{aligned}$$

二行目で $\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2$ と $\bar{\epsilon}_1 \sigma^{\mu\nu} \epsilon_2$ は行列ではない (ただの数になっている) ことを使って γ_5 を動かしています。A や B と同じような格好にすれば

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]\Psi &= i\gamma^\mu \bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \gamma_\nu (\partial_\mu \Psi) \\ &= i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \gamma^\mu \gamma_\nu (\partial_\mu \Psi) \\ &= i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 (2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) (\partial^\mu \Psi) \\ &= 2i\bar{\epsilon}_1 \gamma_\mu \epsilon_2 (\partial^\mu \Psi) - i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \gamma_\nu \gamma_\mu (\partial^\mu \Psi) \end{aligned} \tag{5}$$

第一項は A, B と同じ形になっていますが、第二項が異なっています。変換による代数が 1 つの代数で表現できるようになっていたほうが便利なので、A, B, Ψ で同じにしたいです。そのために第二項が消えるように新しい場を導入してやります。

変換後に (5) の第二項が消えるような変換は $\delta_1 \delta_2 A$ や $\delta_1 \delta_2 B$ の形から予想できて

$$\delta\Psi = -i\gamma^\mu\epsilon\partial_\mu A + \gamma^\mu\gamma_5\epsilon(\partial_\mu B) - \epsilon F - i\gamma_5\epsilon G \quad (6)$$

として新しく実数スカラー場 F, G を導入し、これらの変換が

$$\delta F = i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$$

$$\delta G = -\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$$

となるようにします。こうすれば、うまいこと打ち消しあってくれます。 $\delta_1\delta_2\Psi$ を計算してみると新しい項として

$$\begin{aligned} -\epsilon_2\delta_1 F - i\gamma_5\epsilon_2\delta_1 G &= -i\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + i\gamma_5\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\ &= i(-\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu + \gamma_5\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma_5\gamma^\mu)(\partial_\mu\Psi) \end{aligned}$$

そうすると、 $[\delta_1, \delta_2]\Psi$ に

$$\begin{aligned} &i(-\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu + \gamma_5\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma_5\gamma^\mu)(\partial_\mu\Psi) - i(-\epsilon_1\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu + \gamma_5\epsilon_1\bar{\epsilon}_2\gamma_5\gamma^\mu)(\partial_\mu\Psi) \\ &= i[(-\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu + \gamma_5\epsilon_2\bar{\epsilon}_1\gamma_5\gamma^\mu) - (-\epsilon_1\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu + \gamma_5\epsilon_1\bar{\epsilon}_2\gamma_5\gamma^\mu)](\partial_\mu\Psi) \\ &= i[-\epsilon_2\bar{\epsilon}_1 + \epsilon_1\bar{\epsilon}_2 + \gamma_5(\epsilon_2\bar{\epsilon}_1 - \epsilon_1\bar{\epsilon}_2)\gamma_5]\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) \\ &= i\left[\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2\gamma_\nu + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\sigma^{\nu\rho}\epsilon_2\sigma_{\nu\rho}) - \frac{1}{2}\gamma_5(\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2\gamma_\nu + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\sigma^{\nu\rho}\epsilon_2\sigma_{\nu\rho})\gamma_5\right]\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) \\ &= i\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2\gamma_\nu\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) \end{aligned}$$

という項が加わって (5) の第二項と打ち消しあいます。しかし、これによって A と B に変な影響が出てしまうと使えなくなりますが、 A, B には影響がでません。 A でやってみると

$$\delta_1\delta_2 A = \bar{\epsilon}_2\delta_1\Psi = \bar{\epsilon}_2(-i\gamma^\mu\epsilon_1\partial_\mu A + \gamma^\mu\gamma_5\epsilon_1(\partial_\mu B) - \epsilon_1 F - i\gamma_5\epsilon_1 G)$$

そうすると、交換関係時に新しい項として

$$\begin{aligned} &-\bar{\epsilon}_2\epsilon_1 F - i\bar{\epsilon}_2\gamma_5\epsilon_1 G - (-\bar{\epsilon}_1\epsilon_2 F - i\bar{\epsilon}_1\gamma_5\epsilon_2 G) \\ &= -(\bar{\epsilon}_2\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\epsilon_2)F - i(\bar{\epsilon}_2\gamma_5\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\gamma_5\epsilon_2)G \end{aligned}$$

として出てきますが、

$$\bar{\epsilon}_2\epsilon_1 = \bar{\epsilon}_1\epsilon_2, \quad \bar{\epsilon}_2\gamma_5\epsilon_1 = \bar{\epsilon}_1\gamma_5\epsilon_2$$

であるために消えます (補足参照)。 B でも同様です。というわけで、 A, B への影響はありません。残っている問題は F, G の変換が A, B, Ψ と同じようになっているかです。

F では

$$\begin{aligned}
\delta_1 \delta_2 F &= i\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \delta_1 \Psi \\
&= i\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \partial_\nu (-i\gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu A + \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon_1 (\partial_\mu B) - \epsilon_1 F - i\gamma_5 \epsilon_1 G) \\
&= i\bar{\epsilon}_2 (-i\gamma^\nu \gamma^\mu (\partial_\nu \partial_\mu A) \epsilon_1 + \gamma^\nu \gamma^\mu (\partial_\nu \partial_\mu B) \gamma_5 \epsilon_1 - \gamma^\nu \epsilon_1 F - i\gamma^\nu \gamma_5 \epsilon_1 \partial_\nu G) \\
&= i(-i\bar{\epsilon}_2 \epsilon_1 (\square A) + \bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \epsilon_1 (\square B) - \bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \epsilon_1 F - i\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \gamma_5 \epsilon_1 \partial_\nu G)
\end{aligned}$$

交換関係は

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2] F &= i(-i\bar{\epsilon}_2 \epsilon_1 (\square A) + \bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \epsilon_1 (\square B) - \bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \epsilon_1 F - i\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \gamma_5 \epsilon_1 \partial_\nu G) \\
&\quad - i(-i\bar{\epsilon}_1 \epsilon_2 (\square A) + \bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \epsilon_2 (\square B) - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2 \partial_\nu F - i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \gamma_5 \epsilon_2 \partial_\nu G) \\
&= i(-i(\bar{\epsilon}_2 \epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 \epsilon_2)(\square A) + (\bar{\epsilon}_2 \gamma_5 \epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 \gamma_5 \epsilon_2)(\square B) \\
&\quad - (\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \epsilon_2)(\partial_\nu F) - i(\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \gamma_5 \epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 \gamma^\nu \gamma_5 \epsilon_2)(\partial_\nu G)) \\
&= -2i\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \epsilon_1 (\partial_\nu F)
\end{aligned}$$

となって一致した結果になります。\$G\$ でも

$$[\delta_1, \delta_2] G = -2i\bar{\epsilon}_2 \gamma^\nu \epsilon_1 (\partial_\nu G)$$

となっています。

これで、変換の構造を統一させることができました。次に問題になるのがラグランジアンに \$F, G\$ がどのように入ってくるかですが、これは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{1}{2}\bar{\Psi}i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2$$

と入ってきます。通常 Wess-Zumino モデルと言ったときはこの形を指します (質量項と相互作用項がない場合)。 F^2 と G^2 の変換は

$$\frac{1}{2}\delta F^2 + \frac{1}{2}\delta G^2 = F\delta F + G\delta G = iF\bar{\epsilon}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - G\bar{\epsilon}\gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi$$

$$((F + \delta F)^2 = F^2 + 2F\delta F + (\delta F)^2)$$

$\bar{\Psi}i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi$ 部分は

$$\begin{aligned}
\delta(\bar{\Psi}i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi) &= 2(\delta\bar{\Psi})i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi \\
&= 2(i\bar{\epsilon}\gamma^\mu (\partial_\mu A) - \bar{\epsilon}\gamma_5 \gamma^\mu (\partial_\mu B) - \bar{\epsilon}F - i\bar{\epsilon}\gamma_5 G)i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi
\end{aligned}$$

(6) での $\bar{\Psi}$ にしたものを使っています。このため、新しく出来た項が F^2, G^2 の変換部分と打ち消しあうので、ちゃんと作用は不変になっています。

F と G の運動方程式を求めてみると

$$F = 0, \quad G = 0$$

という物理としてなんの意味も持っていない方程式が出てきます。この手の式上には出てきても、それ自体は単独で物理としての意味を持たない場を補助場 (auxiliary field) と呼びます。また、 F, G という2つの実数スカラー場が必要になったのは、自由度の数からも予想できたことです。マヨラナスピノールは粒子と反粒子を同一にしますが、それでも4成分もっています。一方ボソンでは、2つの実数スカラー場しかないので、あと2つボソンの自由度が足りていませんでした。この足りなかった2つの自由度として F, G が出てきたことになります。

補助場ありでの Wess-Zumino モデルの質量項はスカラー場の部分が少し変わって

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{1}{2}\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \frac{1}{2}m\bar{\Psi}\Psi + mAF + mBG$$

質量 m はボソン、フェルミオン両方で同じものを使います (ボソンとフェルミオンが混ざる変換をしているから)。この質量項がいても作用は不変になっています。ちなみに F, G の運動方程式は

$$F = -mA, \quad G = -mB$$

このような A, B の方程式になります。そうするとラグランジアンでの質量項は

$$mAF + mBG = -m^2A^2 - m^2B^2$$

となって、(1) と同じ形になります。しかし、 F, G が消去された (1) から出発すると、上で見てきたように Ψ の変換がおかしくなります。このように F, G の運動方程式を使う場合を、質量殻上 (on shell) での代数と呼び、使わない場合を質量殻でない (off shell) 代数と呼ばれ区別されます。 F, G の運動方程式を使わないほうが代数が統一されて楽です。

最終的な変換の形をまとめると

$$\begin{aligned}\delta A &= \bar{\epsilon}\Psi \\ \delta B &= i\bar{\epsilon}\gamma_5\Psi \\ \delta\Psi &= -i\gamma^\mu\epsilon\partial_\mu A + \gamma^\mu\gamma_5\epsilon(\partial_\mu B) \\ \delta\bar{\Psi} &= i\bar{\epsilon}\gamma^\mu(\partial_\mu A) - \bar{\epsilon}\gamma_5\gamma^\mu(\partial_\mu B) - \bar{\epsilon}F - i\bar{\epsilon}\gamma_5G \\ \delta\Psi &= -i\gamma^\mu\epsilon\partial_\mu A + \gamma^\mu\gamma_5\epsilon(\partial_\mu B) - \epsilon F - i\gamma_5\epsilon G \\ \delta F &= i\bar{\epsilon}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \\ \delta G &= -\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi\end{aligned}$$

このボソンとフェルミオンを入れ替える (混ぜる) 変換のことを超対称性変換 (supersymmetry transformation) と呼びます。超対称性の表現をちゃんと作るには生成子を作って代数がどうなっているのか調べなくてははいけないんですが、それは省きます。

最後に次元がどうなっているのを見ておきます。作用は自然単位系では無次元なので、ラグランジアン密度は、長さの次元を L とすれば L^{-4} です。質量は長さの逆なので、質量の次元を M とすれば $M = L^{-1}$ となります。そうすると、 A には微分演算子による L^{-1} の次元がかかっているの、 $A = [L^{-1}]$ です。 B も同様に $B = [L^{-1}]$ となっています。 F, G には微分演算子がないので、 $F = G = [L^{-2}]$ 。そして、ガンマ行列は無次元量なので、 $\Psi = [L^{-3/2}]$ 。変換のパラメータ ϵ は、例えば、 δA は A の次元にならなければいけないので、 $\epsilon = [L^{1/2}]$ となっています。

• 補足 1

途中で出てきた Fierz 恒等式の証明を行います。これはスピノールとガンマ行列の組み合わせに対する関係式です。ガンマ行列はクリフォード代数と呼ばれるものに従っていて、使えるガンマ行列の組み合わせは

$$\Gamma^A = 1, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}, i\gamma_5$$

$$\Gamma_A = 1, \gamma_\mu, -\gamma_\mu \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}, -i\gamma_5$$

$$(\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad \mu < \nu)$$

これらは16個の独立な 4×4 行列になっています。1は1個、 γ^μ は4個、 $\gamma^\mu \gamma_5$ は4個、 $\sigma^{\mu\nu}$ は6個($\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ なので、 $\mu < \nu$ としている)、 γ_5 は1個で16個です。ちなみに、 Γ^A を今のように定義すると $\bar{\psi} \Gamma^A \psi$ をエルミートにすることができる利点があり、 $\Gamma^A = 1, \gamma^\mu, i\gamma^\mu \gamma_5, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_5$ ($A = 1, 2, \dots, 16$)と定義した場合では上付きと下付きの区別をする必要がなくなる利点があります。ガンマ行列は

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

に従っており、 Γ^A は

$$\text{tr}(\Gamma^A \Gamma_B) = 4\delta_B^A$$

と規格化されています。表記の注意にもなるので、いくつか実際にみてみると

$$\text{tr}(\gamma^0 \gamma_0) = \text{tr}1 = 4, \quad \text{tr}(\gamma^1 \gamma_1) = \text{tr}1 = 4$$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{4} \text{tr}(\sigma^{23} \sigma_{23}) &= \frac{-1}{4} \text{tr}[(\gamma^2 \gamma^3 - \gamma^3 \gamma^2)(\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_3 \gamma_2)] \\ &= \frac{-1}{4} \text{tr}[\gamma^2 \gamma^3 \gamma_2 \gamma_3 - \gamma^3 \gamma^2 \gamma_2 \gamma_3 - \gamma^2 \gamma^3 \gamma_3 \gamma_2 + \gamma^3 \gamma^2 \gamma_3 \gamma_2] \\ &= \frac{-1}{4} \text{tr}[-\gamma^3 \gamma^2 \gamma_2 \gamma_3 - \gamma^2 \gamma^3 \gamma_3 \gamma_2 - 2)] \\ &= 4 \end{aligned}$$

このとき任意の 4×4 行列 M, N とスピノール ξ, η, ψ, χ に対して

$$(\bar{\xi} M \eta)(\bar{\psi} N \chi) = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (\bar{\xi} M \Gamma_A N \chi)(\bar{\psi} \Gamma^A \eta)$$

という式が成立し、これをFierz 恒等式と呼びます。
簡単に証明していきます。左辺は行列成分を書くと

$$(\bar{\xi}_a M_{ab} \eta_b)(\bar{\psi}_c N_{cd} \chi_d) = \bar{\xi}_a \eta_b \bar{\psi}_c \chi_d M_{ab} N_{cd} \quad (7)$$

$M_{ab} N_{de}$ の部分が Γ^A で展開できるなら

$$M_{ab} N_{cd} = \sum_A (C_A)_{ad} (\Gamma^A)_{cb} \quad (8)$$

と書けます。 C_A は展開係数で、ローマ文字の添え字は $1 \sim 4$ で、上付き下付き関係なしに同じ添え字は和を取ります。 $M_{ab} N_{cd}$ は 4×4 行列と 4×4 行列なので、 M_{ab} の a 成分と N_{cd} の d 成分を固定したとき、 b, c による 4×4 行列があるとみなせ、そこを Γ^A の行列で対応させています。 Γ^A で展開できるとするのは理由があって、 Γ^A は16個の 4×4 行列によって完全系を作っているからです。完全系になっているために、任意行列の展開に使うことが出来ます。 Γ^A は規格化されているので

$$\begin{aligned}
(\Gamma_A)_{bc}M_{ab}N_{cd} &= \sum_A (C_A)_{ad}(\Gamma^A)_{cb}(\Gamma_A)_{bc} \\
&= 4(C_A)_{ad}
\end{aligned}$$

これを (8) に入れれば

$$M_{ab}N_{cd} = \frac{1}{4} \sum_A (\Gamma_A)_{ij}M_{ai}N_{jd}(\Gamma^A)_{cb}$$

そして、(7) に入れれば

$$\begin{aligned}
(\bar{\xi}_a M_{ab} \eta_b)(\bar{\psi}_c N_{cd} \chi_d) &= \frac{1}{4} \sum_A \bar{\xi}_a \eta_b \bar{\psi}_c \chi_d (\Gamma_A)_{ij} M_{ai} N_{jd} (\Gamma^A)_{cb} \\
&= \frac{1}{4} \sum_A \bar{\xi}_a M_{ai} (\Gamma_A)_{ij} N_{jd} \eta_b \bar{\psi}_c \chi_d (\Gamma^A)_{cb} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_A \bar{\xi}_a M_{ai} (\Gamma_A)_{ij} N_{jd} \chi_d \bar{\psi}_c \eta_b (\Gamma^A)_{cb} \\
&= -\frac{1}{4} \sum_A \bar{\xi}_a M_{ai} (\Gamma_A)_{ij} N_{jd} \chi_d \bar{\psi}_c (\Gamma^A)_{cb} \eta_b \\
&= -\frac{1}{4} \sum_A (\bar{\xi} M \Gamma_A N \chi)(\bar{\psi} \Gamma^A \eta)
\end{aligned}$$

となって Fierz 恒等式が導かれます。最後から 3 行目でスピノールは反交換することを使っています。
上で使った関係はこれの $M = N = 1, \bar{\xi} = \chi = 1$ とした場合で

$$\begin{aligned}
\eta \bar{\psi} &= -\frac{1}{4} \sum_A (\Gamma_A \bar{\psi} \Gamma^A \eta) \\
&= -\frac{1}{4} (\bar{\psi} \eta + \gamma_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \eta - \gamma_\mu \gamma_5 \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \eta + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \eta + \gamma_5 \bar{\psi} \gamma^5 \eta)
\end{aligned}$$

3

となっているものです。 $\sigma^{\mu\nu}$ で $1/2$ がついているのは $\sigma_{21}\sigma^{21} = \sigma_{12}\sigma^{12}$ のようになっているためです。この場合では左辺が行列の外積 (outer product) になっている点に気をつけてください ($(4 \times 1 \text{ 行列}) \times (1 \times 4 \text{ 行列})$)。

・補足 2

途中計算で出てきたガンマ行列と荷電共役演算子による行列が対称なのか非対称なのかをまとめます。必要なのはガンマ行列の組み合わせから

$$\gamma_0 C \gamma_0^T, \gamma_0 \gamma_\mu C \gamma_0^T, \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 C \gamma_0^T, \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} C \gamma_0^T, \gamma_0 \gamma_5 C \gamma_0^T$$

$\gamma_0 \gamma_\mu C \gamma_0^T$ の場合は (3)、(4) でやっています。残りの場合ですが同じようにやればいだけなので、 $\gamma_\mu \gamma_5$ の場合だけを実際にやります。 γ_5 が

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0, C\gamma_5^T = \gamma_5 C$$

となっているために、 $C\gamma_5^T = \gamma_5 C$ ($C\gamma_\mu^T = -\gamma_\mu C$) になることを使えば

$$\begin{aligned}
M^T &= (\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 C \gamma_0^T)^T = \gamma_0 (\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 C)^T \\
&= \gamma_0 C^T (\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5)^T \\
&= \gamma_0 C^T \gamma_5^T \gamma_\mu^T \gamma_0^T \\
&= -\gamma_0 C \gamma_5^T \gamma_\mu^T \gamma_0^T \\
&= -\gamma_0 \gamma_5 C \gamma_\mu^T \gamma_0^T \\
&= \gamma_0 \gamma_5 \gamma_\mu C \gamma_0^T \\
&= -\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 C \gamma_0^T \\
&= -M
\end{aligned}$$

転置に対して符号が反転します。そうするとマヨラナスピノールで挟んだときに

$$\begin{aligned}
\bar{\xi} \gamma_\mu \gamma_5 \eta &= \xi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 \eta = \xi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 \eta_c \\
&= \xi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 C \gamma_0^T \eta^* \\
&= \xi_i^* M_{ij} \eta_j^* \\
&= \eta_j^* M_{ji} \xi_i^* \\
&= \eta^\dagger M \xi^* \\
&= \eta^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 C \gamma_0^T \xi^* \\
&= \bar{\eta} \gamma_\mu \gamma_5 C (\xi^\dagger \gamma_0)^T \\
&= \bar{\eta} \gamma_\mu \gamma_5 \xi
\end{aligned}$$

となります。全部の結果をまとめると

$$\begin{aligned}
\gamma_0 C \gamma_0^T &\Rightarrow M = -M^T \\
\gamma_0 \gamma_\mu C \gamma_0^T &\Rightarrow M = M^T \\
\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 C \gamma_0^T &\Rightarrow M = -M^T \\
\gamma_0 \sigma_{\mu\nu} C \gamma_0^T &\Rightarrow M = M^T \\
\gamma_0 \gamma_5 C \gamma_0^T &\Rightarrow M = -M^T
\end{aligned}$$

$M = -M^T$ の場合、マヨラナスピノール $\bar{\xi}, \eta$ で対応するガンマ行列を挟んだときは符号はそのままになり、 $M = M^T$ のときは符号が反転します。 $M = M^T$ となる場合では

$$\bar{\xi} \gamma_\mu \eta = -\bar{\eta} \gamma_\mu \xi$$

$$\bar{\xi} \sigma_{\mu\nu} \eta = -\bar{\eta} \sigma_{\mu\nu} \xi$$

$$M = -M^T \text{ では}$$

$$\bar{\xi}\eta = \bar{\eta}\xi$$

$$\bar{\xi}\gamma_{\mu}\gamma_5\eta = \bar{\eta}\gamma_{\mu}\gamma_5\xi$$

$$\bar{\xi}\gamma_5\eta = \bar{\eta}\gamma_5\xi$$