ヤン・ミルズ理論

現在の素粒子物理において重要な役割を持っているヤン・ミルズ理論を見ていきます。

$SU(N)$ について知っておくと分かりやすいので、先に「 $U(N)$ と $SU(N)$ 」を見ておくといいかもかもしれません。

電磁場は可換ゲージ場でしたが、ここでは非可換ゲージ場 (non-abelian gauge field) に一般化します。まず、多重項 (multiplet) と呼ばれるものを導入します。多重項についての細かい話は放っておいてどんなものかは、例えば

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2)$$

このようにディラック場を組にしたもの (2 重項 (doublet)) です。大雑把に言ってしまえば、4 成分スピノールを使って n 行 1 列の行列を作るといっただけです。

元々はヤン (Yang) とミルズ (Mills) が陽子と中性子による 2 重項で考えたようです。多重項による抽象的な空間を内部空間 (internal space) と呼び、アイソスピンによる空間です。例えば、陽子と中性子の 2 重項はアイソスピン $1/2$ と表現され、アイソスピンの第 3 成分を陽子なら $+1/2$ 、中性子なら $-1/2$ として区別させます。これは電子をスピン上向き $+1/2$ と下向き $-1/2$ で区別するのと同じです。

ちなみに、陽子と中性子で組む理由は、この 2 つは質量が、陽子は約 938(Mev)、中性子は約 939(MeV) とかなり一致しているために、何かの性質で区別されている粒子と考えたからです (電子がスピン上向きと下向きで区別されることの類似)。

2 重項を基底とする 2 次元空間での回転は、スピノールの回転

$$\psi' = \exp[i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}] \psi$$

と同じもので与えることができ、量子力学でのスピン上向きと下向きの 2 成分スピノールの回転の類似です。 σ^i ($i = 1, 2, 3$) はパウリ行列です。 $i, j, k, \dots$ のローマ文字に対しては上付き下付き関係なしに同じなら 1 から 3 で和を取るようになります。これに対して、 $a, b, c, \dots$ の場合は 1 から 2 の和とします。ちなみに、スピンによる 2 成分スピノール χ では、パウリ行列を回転の生成子として

$$\chi' = \exp[i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}] \chi$$

で表わされます。変換がこうなる群論側からの話は「 $SU(N)$ と $U(N)$ 」を見てください

ここで求めたいのは、局所的ゲージ変換で不変な 2 重項によるラグランジアンです。2 重項はディラック場で構成されるので、相互作用がないときにはディラック方程式のラグランジアンと同じで

$$\mathcal{L}_d = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi$$

2 重項の成分を $a = 1, 2$ とすれば

$$\mathcal{L}_d = \bar{\psi}_a(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi_a = \bar{\psi}_1(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi_2$$

と書けます。質量は同じとしています。2 重項の成分をアイソスピン成分と呼んでいきます。ただし、ここではアイソスピン成分の添え字は基本的に書かないです。

電磁場ではディラック場の局所的ゲージ変換に対する不変性から、電磁場 (ゲージ場) と相互作用項が出てきました。なので、2重項で同じことをすれば、対応するゲージ場と相互作用項が出てくると考えられます。ここでは、電磁場と違いゲージ場の変換性は分からないので、2重項に対する局所的ゲージ変換だけを使っていきます。

ψ に対する局所的ゲージ変換を、実数 $\alpha^i(x)$ によって

$$V(x) = \exp[i\alpha^i(x)\frac{\sigma^i}{2}], \quad V^\dagger(x) = \exp[-i\alpha^i(x)\frac{\sigma^i}{2}]$$

と与えます。パウリ行列はエルミート行列です。 $V(x)$ は、 ψ が2成分なので、 2×2 行列になることに注意してください。この変換は群論では $SU(2)$ と呼ばれます。群論は後半で簡単に触れます。

これによって

$$\psi'(x) = V(x)\psi(x) \tag{1}$$

アイソスピン成分を a, b とすれば

$$\psi'_a(x) = V_{ab}(x)\psi_b(x), \quad V_{ab} = \exp[i(\alpha^i(x)\frac{\sigma^i}{2})_{ab}] = (1 + i\alpha^i\frac{\sigma^i}{2} + \dots)_{ab} \tag{2}$$

i はパウリ行列の区別、 a, b は2重項の成分です。

変換の形自体は同じなので、「電磁場との相互作用項」での $\delta\psi = igA_\mu\psi dx^\mu$ を

$$\delta\psi = igA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}\psi dx^\mu$$

と置き換えればいいだけです。電磁場からの変更はゲージ場 A_μ に σ^i に対応する添え字が付いているだけです。これから、共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}$$

ゲージ場 A_μ^i の変換もこの置き換えですみます。「電磁場との相互作用項」では A_μ^i と V が交換しないように変形を行ったので、結果がそのまま使えて

$$(A_\mu^i\frac{\sigma^i}{2})' = VA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}V^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu V)V^\dagger = VA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}V^\dagger - \frac{i}{g}V(\partial_\mu V^\dagger) \tag{3}$$

となります。

確かめるために、共変微分は $D'_\mu = VD_\mu V^\dagger$ と変換されることを利用して求めてみます。 $D_\mu\psi$ の変換は

$$D'_\mu\psi' = VD_\mu V^\dagger V\psi = VD_\mu\psi$$

となる必要があるので

$$(\partial_\mu + ig(A_\mu^i\frac{\sigma^i}{2})')\psi'(x) = V(x)(\partial_\mu + igA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2})\psi(x)$$

左辺

$$(\partial_\mu + ig(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2})')\psi' = (\partial_\mu + ig(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2})')V\psi = (\partial_\mu V)\psi + V\partial_\mu\psi + ig(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2})'V\psi$$

と右辺を比べると、 $A_\mu^i \sigma^i / 2$ は変換に対して

$$(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2})' = VA_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu V)V^\dagger$$

となって、(3) と一致します。

無限小変換として (3) を α^i の 1 次までで展開すると

$$\begin{aligned} (A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2})' &= V(x)(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{i}{g}\partial_\mu)V^\dagger(x) \simeq (1 + i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2})(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{i}{g}\partial_\mu)(1 - i\alpha^k \frac{\sigma^k}{2}) \\ &= A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} - A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} + i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \\ &= A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + i(\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \alpha^j \frac{\sigma^j}{2}) \\ &= A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + i[\alpha^j \frac{\sigma^j}{2}, A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}] \end{aligned}$$

パウリ行列のために第三項の交換関係は 0 になりません。 ϵ^{ijk} ($\epsilon^{123} = +1$) をレヴィ・チビタ記号として、パウリ行列の関係

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$$

を使えば

$$\begin{aligned} (A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2})' &= A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} - \epsilon^{jik}\alpha^j A_\mu^i \frac{\sigma^k}{2} \\ &= A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} - \epsilon^{jki} A_\mu^k \alpha^j \frac{\sigma^i}{2} \\ &= A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + \epsilon^{ijk} A_\mu^j \alpha^k \frac{\sigma^i}{2} \end{aligned}$$

となります。 $D'_\mu\psi'$ に入れて、 α^i の 1 次までを残せば

$$\begin{aligned}
D'_\mu \psi' &= D'_\mu V \psi = (\partial_\mu + ig(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2})') V \psi \\
&= (\partial_\mu + ig(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + i[\alpha^j \frac{\sigma^j}{2}, A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}])) (1 + i\alpha^k \frac{\sigma^k}{2} + \dots) \psi \\
&\simeq (\partial_\mu + ig(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} + i(\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \alpha^j \frac{\sigma^j}{2})) \psi \\
&\quad + i(\partial_\mu + ig A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) \alpha^k \frac{\sigma^k}{2} \psi \\
&= (\partial_\mu + ig A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - i(\partial_\mu \alpha^i) \frac{\sigma^i}{2} - g(\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \alpha^j \frac{\sigma^j}{2})) \psi \\
&\quad + i(\partial_\mu \alpha^k) \frac{\sigma^k}{2} \psi + i\alpha^k \frac{\sigma^k}{2} \partial_\mu \psi - g A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \alpha^j \frac{\sigma^j}{2} \psi \\
&= (\partial_\mu + i\alpha^k \frac{\sigma^k}{2} \partial_\mu + ig A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} - g\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) \psi \\
&= (\partial_\mu + ig(A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2} A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) \psi + i\alpha^k \frac{\sigma^k}{2} \partial_\mu \psi \\
&= (1 + i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2}) (\partial_\mu + ig A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) \psi \\
&= V D_\mu \psi
\end{aligned}$$

となるので、 $D'_\mu = V D_\mu V^\dagger$ になっているのが確かめられます。

電磁場では共変微分の交換関係が電磁場テンソルになったので、ここでも $[D_\mu, D_\nu]$ を求めてみます。 ψ に作用することに注意して

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + ig A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, \partial_\nu + ig A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \\
&= [\partial_\mu, \partial_\nu] + ig[A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, \partial_\nu] + ig[\partial_\mu, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] + (ig)^2[A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \\
&= ig(\partial_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) - g^2[A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}] \\
&= ig((\partial_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) + ig[A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}, A_\nu^j \frac{\sigma^j}{2}]) \\
&= ig((\partial_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) - g\epsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j \frac{\sigma^k}{2}) \\
&= ig((\partial_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) - g\epsilon^{jki} A_\mu^j A_\nu^k \frac{\sigma^i}{2}) \\
&= ig((\partial_\mu A_\nu^i \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) - g\epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \frac{\sigma^i}{2}) \\
&= ig((\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i) - g\epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k) \frac{\sigma^i}{2} \\
&= ig F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2}
\end{aligned}$$

今度は交換関係の項は消えずに残り、電磁場テンソルと同じ形になりません。そして、 $F_{\mu\nu}^i \sigma^i / 2$ は変換で不変ではないです。実際に、

$$V[D_\mu, D_\nu]V^\dagger = VD_\mu V^\dagger VD_\nu V^\dagger - VD_\nu V^\dagger VD_\mu V^\dagger = [D'_\mu, D'_\nu]$$

に対して

$$(F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2})' = V(x)F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger(x) \simeq (1 + i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2}) F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} (1 - i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2}) = F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2} + [i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2}, F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2}]$$

となり、余計な項が出てきます。なので、ここでの変換 (1),(3) で不変なラグランジアンを構成するのに $F_{\mu\nu}^i \sigma^i$ は直接使えません。

トレース $\text{tr}[AB \dots]$ は

$$\text{tr}[AB \dots] = \text{tr}[UAU^{-1}UBU^{-1} \dots] = \text{tr}[A'B' \dots]$$

という関係を持つので、トレースは $A' = UAU^{-1}$ という変換に対して不変です。今の変換 V はユニタリー行列 $V^\dagger = V^{-1}$ なので、この関係から

$$\text{tr}[(F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2})^2] \tag{4}$$

とすればゲージ不変量です。トレースはアイソスピン成分に対してです。 $\sigma^i \sigma^j$ のトレースは

$$\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij}$$

から、 $\text{tr}[\sigma^i \sigma^j] = 2\delta^{ij}$ なので

$$\text{tr}[(F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma^i}{2})^2] = \text{tr}[F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu} \frac{\sigma^i \sigma^j}{2 \cdot 2}] = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu} \text{tr}[\sigma^i \sigma^j] = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

また、 $SU(N)$ の生成子 t^i は $\text{tr}[t^i t^j] = \delta^{ij}/2$ という関係を持ち、今は $t^i = \sigma^i/2$ です。

よって、(2) の変換で不変なラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu^i \frac{\sigma^i}{2}) - m)\psi$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - g\epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k$$

電磁場との対応を取るために (4) に $-1/2$ をつけています。このラグランジアンを使ったものをヤン・ミルズ理論や非可換ゲージ理論と言います。このときの変換をまとめると

$$\psi'(x) = V\psi(x) \quad (V(x) = \exp[i\alpha^i(x)\frac{\sigma^i}{2}])$$

$$(A_\mu^i(x)\frac{\sigma^i}{2})' = V(x)(A_\mu^i(x)\frac{\sigma^i}{2} - \frac{i}{g}\partial_\mu)V^\dagger(x)$$

無限小変換とすれば

$$\psi' = (1 + i\alpha^i\frac{\sigma^i}{2})\psi$$

$$(A_\mu^i\frac{\sigma^i}{2})' = A_\mu^i\frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^i)\frac{\sigma^i}{2} + i[\alpha^j\frac{\sigma^j}{2}, A_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}] = A_\mu^i\frac{\sigma^i}{2} - \frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha^i)\frac{\sigma^i}{2} + \epsilon^{ijk}A^j\alpha^k\frac{\sigma^i}{2}$$

この変換は群論で言えば、 $SU(2)$ 変換です。また、 $\alpha^i(x) = g\Lambda^i(x)$ とすれば無限小変換は

$$\psi'(x) = (1 + ig\Lambda(x)\frac{\sigma^i}{2})\psi(x)$$

$$(A_\mu^i\frac{\sigma^i}{2})' = A_\mu^i\frac{\sigma^i}{2} - (\partial_\mu\Lambda^i)\frac{\sigma^i}{2} + g\epsilon^{ijk}A^j\Lambda^k\frac{\sigma^i}{2}$$

他にも $\alpha(x)$ の符号を反転させて定義している場合もあります。

また、共変微分とゲージ場の変換を

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}, \quad (A_\mu^i(x)\frac{\sigma^i}{2})' = V(x)(A_\mu^i(x)\frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu)V^\dagger(x)$$

と与えることもできます。

QCD は非可換ゲージ理論で、QCD ではクォークのカラー 3 色による 3 重項が使われ、 $SU(3)$ の非可換ゲージ場になります。クォークにはカラーに加えてフレーバの区別もあるので、フレーバ成分を $\psi^{(a)}$ と書くことにすれば、QCD のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} + \sum_a \bar{\psi}^{(a)}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}) - m^{(a)})\psi^{(a)} \quad (5)$$

ゲージ場はグルーオンになります。フレーバの数は状況によって使い分けるので、範囲を書いていません。例えば、フレーバとしてアップクォークとダウンクォークだけを考え、それらのカラー 3 重項を u, d とすれば

$$\bar{u}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}) - m^{(u)})u + \bar{d}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu^i\frac{\sigma^i}{2}) - m^{(d)})d$$

となります。QCD でのゲージ場 (グルーオン) はカラーに対してで、フレーバに対してではないことに注意してください。

ここでの話と群論との関係を見てもおきます。2 重項とせずに N とした $SU(N)$ を今の結果から簡単に構成します (細かい群論の話は飛ばします)。

$N \times N$ ユニタリー行列の集まりを $SU(N)$ と呼びます。 $SU(N)$ での S は変換 $U(x)$ の行列式が 1 になることを、 U はユニタリーを、 N は行列の数を表わしています。 $N \times N$ ユニタリー行列 U を使って、 N 成分を持つ ψ の変換を

$$\psi'_a(x) = U_{ab}(x)\psi_b(x) \quad (a, b = 1, 2, \dots, N)$$

としたとき、 $SU(N)$ 変換と呼ばれます。群論の言葉で $SU(N)$ と表現される場合、変換 $U(x)$ は

$$U(x) = 1 + i\alpha^i(x)t^i + \dots \quad (i = 1, \dots, N^2 - 1)$$

のように展開されます。 t^i はエルミート行列で

$$[t^i, t^j] = if^{ijk}t^k$$

という交換関係を満たし (リー代数)、 t^i は $SU(N)$ の生成子 (generator) と呼ばれ、トレースは 0 です。 f^{ijk} は構造定数 (structure constant) と呼ばれるもので、パウリ行列に当てはめれば、レヴィ・チビタ記号 ϵ^{ijk} に相当するもので ($[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k$)、添え字の交換で符号が反転します。そして、生成子が

$$\text{tr}[t^i t^j] = \frac{1}{2}\delta^{ij}$$

となるなら、 f^{ijk} は一般的に反対称です。生成子 t^a はヤコビの恒等式

$$[t^i, [t^j, t^k]] + [t^j, [t^k, t^i]] + [t^k, [t^i, t^j]] = 0$$

を満たし、これによって f^{ijk} もヤコビの恒等式

$$f^{ilm}f^{jkl} + f^{jlm}f^{kil} + f^{klm}f^{ijl} = 0$$

を満たします。

他のものも一般化して書けば

- 共変微分

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^i t^i$$

- 交換関係

$$[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}^i t^i$$

- $F_{\mu\nu}^i$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - gf^{ijk}A_\mu^j A_\nu^k$$

これらは可換なゲージ変換を非可換なものに一般化したもので、その影響である f^{ijk} を 0 にして、 t^i や添え字をなくせば、可換である電磁場と一致します。

他にも生成子に関する重要な性質として、随伴表現 (adjoint representation) と呼ばれるものがあります (「リー群」参照)。随伴表現 t_G^i は構造定数に対応する行列として

$$(t_G^i)^{jk} = if^{ijk}$$

と与えられています。この随伴表現において共変微分は

$$(D_\mu \psi)^i = \partial_\mu \psi^i + ig A_\mu^j (t_G^j)^{ik} \psi^k = \partial_\mu \psi^i - gf^{ijk} A_\mu^j \psi^k$$

第二項の添え字の付き方と符号が反転することに注意してください。

t^i で書いたときの非可換ゲージ場での変換をまとめておきます。 ψ と A_μ^a に対する無限小変換は

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \exp[i\alpha^i(x)t^i]\psi(x) = (1 + i\alpha^i(x)t^i)\psi(x) \\ (A_\mu^i t^i)' &= A_\mu^i t^i - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i)t^i + i[\alpha^i t^i, A_\mu^j t^j] = A_\mu^i t^i - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^i)t^i + f^{ijk} A_\mu^j \alpha^k t^i \end{aligned}$$

$A_\mu^i t^i$ は t^i を両辺から消しても同じです。随伴表現での共変微分を使うことで、 A_μ^a は

$$A_\mu^a \Rightarrow A_\mu^a - \frac{1}{g}(D_\mu \alpha)^a$$

これらは無限小変換ですが、そうでないなら変換 $U(x)$ を使って

$$A_\mu^a(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)$$

と書けます。

ついでに $SU(2)$ 変換によるネーターカレントも出しておきます。出すのは簡単です。 $SU(2)$ の大局的位相変換として

$$\exp[i\beta^i \frac{\sigma^i}{2}]\psi(x) \simeq (1 + i\beta^i \frac{\sigma^i}{2})\psi(x) = \psi(x) + \delta\psi(x)$$

β^i は定数です。これと非可換ゲージのラグランジアン (5)(フェルミオンの余計な自由度は失くします) をネーターカレント j_μ の定義

$$j_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi(x))} \delta\psi(x)$$

に入れるだけです。そうすると

$$j_\mu = \bar{\psi} i \gamma_\mu (i\beta^i \frac{\sigma^i}{2} \psi) = -\beta^i \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\sigma^i}{2} \psi$$

よって、 $SU(2)$ のカレントは

$$j_\mu^i = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\sigma^i}{2} \psi$$

となります。

ネーターカレントの0成分 Q^i は

$$Q^i = \int d^3x j_0^i$$

これは保存量というだけでなく生成子になっています (「生成子・ポアンカレ群」参照)。なので、 $SU(2)$ の生成子 t^i と対応しています。実際にそうなっていることを示します。 Q^i を演算子化して交換関係を計算します。 Q^i は時間に依存しないので同時刻交換関係を使って (結合定数は省きます)

$$\begin{aligned} [Q^i, Q^j] &= \int d^3x d^3y [\bar{\psi}(x) \gamma_0 \frac{\sigma^i}{2} \psi(x), \bar{\psi}(y) \gamma_0 \frac{\sigma^j}{2} \psi(y)] \\ &= \int d^3x d^3y [\psi_a^\dagger(x) \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x), \psi_c^\dagger(y) \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y)] \\ &= \int d^3x d^3y [\psi_a^\dagger(x) \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x), \psi_c^\dagger(y) \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y)] \\ &= \int d^3x d^3y \left(-\psi_a^\dagger(x) \psi_c^\dagger(y) \left\{ \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x), \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y) \right\} + \psi_a^\dagger(x) \left\{ \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x), \psi_c^\dagger(y) \right\} \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y) \right. \\ &\quad \left. - \psi_c^\dagger(y) \left\{ \psi_a^\dagger(x), \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y) \right\} \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x) + \left\{ \psi_c^\dagger(y), \psi_a^\dagger(x) \right\} \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y) \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x) \right) \\ &= \int d^3x d^3y \left(\psi_a^\dagger(x) \left\{ \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x), \psi_c^\dagger(y) \right\} \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y) - \psi_c^\dagger(y) \left\{ \psi_a^\dagger(x), \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y) \right\} \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x) \right) \\ &= \int d^3x d^3y \left(\psi_a^\dagger(x) \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \delta_{bc} \delta^3(x-y) \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \psi_d(y) - \psi_c^\dagger(y) \delta^3(x-y) \frac{\sigma_{cd}^j}{2} \delta_{ad} \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x) \right) \\ &= \int d^3x \left(\psi_a^\dagger(x) \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \frac{\sigma_{bd}^j}{2} \psi_d(x) - \psi_c^\dagger(x) \frac{\sigma_{ca}^j}{2} \frac{\sigma_{ab}^i}{2} \psi_b(x) \right) \\ &= \int d^3x \psi_a^\dagger(x) \left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right]_{ad} \psi_d(x) \\ &= i \epsilon^{ijk} \int d^3x \psi^\dagger(x) \frac{\sigma^k}{2} \psi(x) \\ &= i \epsilon^{ijk} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma_0 \frac{\sigma^k}{2} \psi(x) \\ &= i \epsilon^{ijk} Q^k \end{aligned}$$

途中で交換関係と反交換関係の関係

$$[AB, CD] = -AC\{D, B\} + A\{B, C\}D - C\{A, D\}B + \{C, A\}DB$$

を使い、フェルミオン場の同時刻反交換関係 (a, b はスピノール成分でなくアイソスピン成分)

$$\{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)\}_{x_0=y_0} = \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\psi_a(x), \psi_b(y)\}_{x_0=y_0} = \{\psi_a^\dagger(x), \psi_b^\dagger(y)\}_{x_0=y_0} = 0$$

を使っています。というわけで、 Q^i は $SU(2)$ の代数を満たすので

$$t^i = \int d^3x j_0^i$$

と対応します。