

湯川理論

スカラー場とフェルミオン場による相互作用である湯川理論を見ていきます。
ついでに、核力にも簡単に触れます。

ハミルトニアンを

$$H = H_d + H_k + H_I, \quad H_I = g \int d^3x \bar{\psi} \psi \phi$$

とします。 ϕ はスカラー場、 ψ はフェルミオン場、 g は結合定数です。 H_d はディラック方程式のハミルトニアン、 H_k はクライン・ゴールドン方程式のハミルトニアン、 H_I は相互作用項です。このようなハミルトニアンを用いるのが湯川理論です。相互作用項はフェルミオン 2 つとボソン 1 つなので、フェルミオン-フェルミオン-ボソン散乱を表します。

運動量 p を持つフェルミオンと運動量 k を持つフェルミオンが散乱して、それぞれ p', k' を持つフェルミオンに散乱される過程を考えます ($p, k \rightarrow p', k'$)。

相互作用項を摂動的に扱うので、必要なのは

$${}_0\langle p' k' | T(\exp[-i \int dt H_I(t)]) | p k \rangle_0$$

今の相互作用項の場合、 $\exp$ の展開の 1 次でなく 2 次の項から寄与が発生します。簡単に言えば、場が 3 個だと全てを縮約に出来ないからです。なので

$${}_0\langle p' k' | T\left(\frac{1}{2!}(-ig) \int d^4x \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) (-ig) \int d^4y \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y)\right) | p k \rangle_0$$

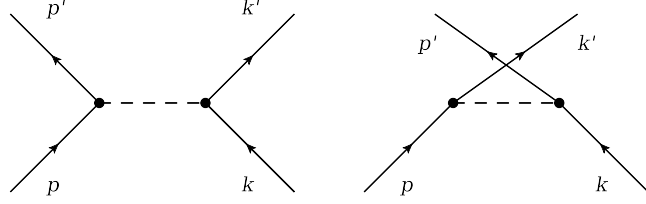
が最初の寄与となります (場の演算子は相互作用描像)。フェルミオンの散乱なので、外側の状態はフェルミオンです。なので、スピン s も含めて $|p, s\rangle$ とすれば、フェルミオン場の平面波展開と生成、消滅演算子の反交換関係から

$$\begin{aligned} \psi |p, s\rangle &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} a_{p'}^{s'} u(p', s') e^{-ip'x} \sqrt{2E_p} a_p^{s\dagger} |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} u(p', s') e^{-ip'x} \sqrt{2E_p} (2\pi)^3 \delta(p' - p) \delta^{ss'} |0\rangle \\ &= u(p, s) e^{-ipx} |0\rangle \end{aligned}$$

これが外線に対応します。終状態に作用させたときは

$$\langle k, s | \psi = \langle 0 | b_k^s \sqrt{2E_k} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{k'}}} \sum_{s'} b_{k'}^{s'\dagger} v^{s'}(k', s') e^{ik'x} = \langle 0 | v(k, s) e^{ikx}$$

$\langle k, s |$ との縮約は反粒子に対応します。同様に $\bar{\psi}$ でも



$$\langle \mathbf{p}, s | \bar{\psi} = \bar{u}(\mathbf{p}, s) e^{ipx}, \quad \bar{\psi} | \mathbf{k}, s \rangle = \bar{v}(\mathbf{k}, s) e^{-ikx}$$

となります。 ϕ のほうは ϕ^4 理論と同じです (「S 行列」参照)。

縮約は

$${}_0 \langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \left(\frac{1}{2!} (-ig) \int d^4x \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) (-ig) \int d^4y \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y) \right) | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle_0 \quad (1)$$

外側との縮約を p' と $\bar{\psi}(x)$ 、 k' と $\bar{\psi}(y)$ 、 p と $\psi(x)$ 、 k と $\psi(y)$ と取ったものは、積分の x, y を入れ替えれば、これと一致します。なので、2 つを足すことで $1/2!$ は消えます。

別の縮約として

$${}_0 \langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y) | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle_0 \quad (2)$$

これも x, y の入れ替えで同じものが作れるので $1/2!$ は消えます。というわけで、寄与する縮約はこの 2 つです。

この 2 つは、量子論での同種粒子は区別できないために、散乱後の粒子を区別できないことを反映しています。図の左が (1)、右が (2) です。点線はスカラー場の縮約によるスカラー場の伝播関数部分です。

(1) に縮約の結果を入れれば

$$\begin{aligned} & (-ig)^2 \int d^4x \int d^4y D(x-y) \bar{u}(\mathbf{p}') u(\mathbf{p}) e^{-ip'y} e^{ip'y} \bar{u}(\mathbf{k}') e^{ik'x} u(\mathbf{k}) e^{-ikx} \\ &= (-ig)^2 \int d^4x \int d^4y \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} e^{-iq(x-y)} e^{-i(p-p')y} e^{-i(k-k')x} \bar{u}(\mathbf{p}') u(\mathbf{p}) \bar{u}(\mathbf{k}') u(\mathbf{k}) \\ &= (-ig)^2 \int d^4x \int d^4y \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} e^{-i(p-p'-q)y} e^{-i(k-k'+q)x} \bar{u}(\mathbf{p}') u(\mathbf{p}) \bar{u}(\mathbf{k}') u(\mathbf{k}) \\ &= (-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} \bar{u}(\mathbf{p}') u(\mathbf{p}) \bar{u}(\mathbf{k}') u(\mathbf{k}) (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q) (2\pi)^4 \delta^4(k - k' + q) \end{aligned}$$

スピンは気にしないでいいので無視しています。 m はスカラー場 ϕ の質量です。フェルミオンでは反交換することから入れ替えで符号が反転します。しかし、ここでは $\bar{\psi}(y)$ を 2 回動かすので符号は反転しません。細かく言うと、外側との縮約は、生成、消滅演算子と交換させることで成立させているので

$$| \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle = \sqrt{2E_p 2E_k} a_p^\dagger a_k^\dagger | 0 \rangle, \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{k} | = \langle 0 | a_k a_p \sqrt{2E_p 2E_k}$$

このような演算子の位置の影響を受けます。このため、上の形とは線の繋がりや並びが異なったものになり、並びを合わせる必要があります (今の場合で言えば p', k' の位置が逆なので $\bar{\psi}(y)$ を 2 回左に動かせばいい)。

後は 2 つのデルタ関数のどちらか片方を使って積分を実行すればよく、そして対応するのは不変振幅による $i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^4(\dots)$ なので、残ったデルタ関数が落ちて

$$i\mathcal{M} = (-ig)^2 \frac{i}{q^2 - m^2} \bar{u}(p')u(p)\bar{u}(k')u(k) \quad (p - p' = k' - k = q)$$

(2) での縮約も同様の結果になります。ただし、このときは $\bar{\psi}(y)$ を左に 1 回動かすので符号が反転します ($\langle p'k' |$ の並びに注意)。これは QED の「電子-電子散乱」での、ファインマン図でフェルミオンの交換に対しては符号が反転するのと同じです。

よって、不変振幅は 2 つを足したものになり

$$i\mathcal{M} = (-ig)^2 \bar{u}(p')u(p) \frac{i}{(p' - p)^2 - m^2} \bar{u}(k')u(k) + (-ig)^2 \bar{u}(k')u(p) \frac{-i}{(p' - k)^2 - m^2} \bar{u}(p')u(k)$$

と求まります。

湯川理論での相互作用によるポテンシャルを、非相対論的に近似して求めます。スピノール u は静止している場合を使ってしまい

$$u(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}$$

ξ^s は 2 成分スピノールで、 $\xi^{s\dagger}\xi^r = \delta^{sr}$ と規格化します。運動量は、エネルギー ($p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$) を質量 m に近似して

$$p^\mu = (m, \mathbf{p}), \quad p'^\mu = (m, \mathbf{p}'), \quad k^\mu = (m, \mathbf{k}), \quad k'^\mu = (m, \mathbf{k}')$$

これらを $i\mathcal{M}$ の第一項に使うと

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= (-ig)^2 \bar{u}(\mathbf{p}', s')u(\mathbf{p}, s) \frac{i}{(p' - p)^2 - m^2} \bar{u}(\mathbf{k}', r')u(\mathbf{k}, r) \\ &= (-ig)^2 \frac{i}{(p' - p)^2 - m^2} \delta^{ss'} \delta^{rr'} \\ &= (ig)^2 \frac{i}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 + m^2} \delta^{ss'} \delta^{rr'} \end{aligned}$$

今の近似での散乱はボルン近似 (量子力学の「 S 行列」参照) に対応するので

$$\langle p' | iT | p \rangle \simeq -iV(\mathbf{q})(2\pi)\delta(E_{p'} - E_p) \quad (\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p})$$

これから

$$V(\mathbf{q}) = \frac{-g^2}{|\mathbf{q}|^2 + m^2}$$

位置表示はフーリエ変換で

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \\
&= -g^2 \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{|\mathbf{q}|^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}| \cos \theta} \sin \theta \\
&= -g^2 \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \int_{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} dy \frac{|\mathbf{q}|^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} \frac{-e^y}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\
&= \frac{-g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \\
&= \frac{-g^2}{(2\pi)^2} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} + \int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} \frac{-e^{-i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \right) \\
&= \frac{-g^2}{(2\pi)^2} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} + \int_{-\infty}^0 d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^2}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} \frac{e^{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|}}{i|\mathbf{q}||\mathbf{x}|} \right) \\
&= \frac{-g^2}{(2\pi)^2 i r} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{|\mathbf{q}|^2 + m^2} \quad (|\mathbf{q}| = q, |\mathbf{x}| = r) \\
&= \frac{-g^2}{(2\pi)^2 i r} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}| e^{i|\mathbf{q}|r}}{(|\mathbf{q}| + im)(|\mathbf{q}| - im)}
\end{aligned}$$

被積分関数は $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ で 0 になるので、 $|\mathbf{q}| = im$ の留数だけを拾うように経路 (上半円) を選び

$$V(\mathbf{x}) = \frac{-g^2}{(2\pi)^2 i r} \frac{2\pi i e^{-mr}}{2} = \frac{-g^2}{4\pi r} e^{-mr}$$

力 $F = -\nabla V(\mathbf{x})$ は符号がマイナスになるので、このポテンシャルは引力となります。これを湯川ポテンシャルと言い、核力の理論の元になっているものです。湯川ポテンシャルはフェルミオン-フェルミオン散乱、フェルミオン-反フェルミオン散乱、反フェルミオン-反フェルミオン散乱のどれでも引力ポテンシャルになります。湯川ポテンシャルは、核力は原子核程度の範囲で起きているので、その半径付近で急激に減少を始める形になっています。つまり、クーロンポテンシャルに指数関数による減少部分をくっつけて

$$V(r) = -\frac{e^{-ar}}{4\pi r} \quad (r = |\mathbf{x}|)$$

としたものです。

ちなみに、湯川ポテンシャルはポアソン方程式に質量項を加えることでも得られます。クーロンポテンシャル U はポアソン方程式から

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x}), \quad U = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

これに質量項を加えて

$$(\nabla^2 - m^2)V(\mathbf{x}) = -\lambda\delta^3(\mathbf{x})$$

フーリエ変換すると

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (\nabla^2 - m^2) V(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = -\lambda \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

なので

$$V(\mathbf{q}) = \frac{\lambda}{|\mathbf{q}|^2 + m^2}$$

となり、上で求めた湯川ポテンシャルになります。

湯川理論のファインマン則をまとめておきます。運動量表示では

- 伝播関数

スカラー場： $\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$

フェルミオン場： $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

- 頂点： $-ig$
- 外線

$$\phi|\mathbf{q}\rangle = 1, \langle \mathbf{q}|\phi = 1$$

$$\psi|\mathbf{p}, s\rangle = u^s(\mathbf{p}), \langle \mathbf{k}, s|\psi = v^s(\mathbf{k})$$

$$\bar{\psi}|\mathbf{p}, s\rangle = \bar{u}^s(\mathbf{p}), \langle \mathbf{k}, s|\bar{\psi} = \bar{v}^s(\mathbf{k})$$

後は「S行列」と同じです。また、 $\exp$ の展開による $1/n!$ は頂点の交換によって常に落ちます。

核力にも簡単に触れておきます。原子核は陽子と中性子によって構成され、陽子間にはクーロン力による反発が生じています。反発だけでは原子核を構成できないので、引力も働くと考えられ、それが核力と呼ばれます。そして、核力はパイオンの交換によるとしたのが湯川秀樹です。

パイオンは中性、 ± 1 の電荷を持つ $\pi^0, \pi^\pm$ の 3 種類が観測されています。なので、それらによって媒介されているなら、相互作用項は

$$\mathcal{L}_{int} = g_{pp}\pi^0\bar{\psi}_p\psi_p + g_{nn}\pi^0\bar{\psi}_n\psi_n + g_{pn}\pi^+\bar{\psi}_p\psi_n + g_{np}\pi^-\bar{\psi}_n\psi_p$$

という形になります。 ψ_p は陽子、 ψ_n は中性子のディラック場で、 g はそれぞれの結合定数です。電荷は保存するので、各項を右から読んだときに $\pi^0, \pi^\pm$ によって電荷の変化が成立するようにしています (陽子は+1、中性子は0)。しかし、結合定数を4個も導入したくないので、 $SU(2)$ を利用して1個の結合定数で記述します。群論の話は省いて求めます。

「ヤン・ミルズ理論」で触れたように、アイソスピンは陽子と中性子の2重項に対して与えられました (ハイゼンベルクによってアイソスピンの発想は導入された)。なので、陽子と中性子の2重項を

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

と作ります。陽子のアイソスピンは $+1/2$ 、中性子では $-1/2$ とします。これはパウリ行列の $T_3 = \sigma_3/2$ の固有値として与えられ

$$T_3|+\rangle = \frac{\sigma_3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}|+\rangle, \quad T_3|-\rangle = \frac{\sigma_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|-\rangle \quad \left(\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

アイソスピンの状態はエルミート行列 σ_3 の固有状態で、2次元ベクトル空間の正規直交系です。なので、 Ψ は陽子、中性子の状態を基底とした線形結合です。このように、アイソスピンはスピンと同じ構造を持ちます。なので、アイソスピンとしての陽子、中性子の状態は $SU(2)$ 変換によって σ_3 でない任意の方向 (σ_3 の固有状態でない状態) に変えられます (量子力学の「スピン 1/2」参照)

$SU(2)$ 変換を

$$U = \exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right] = \exp\left[\frac{i}{2}\alpha_i \sigma_i\right] \quad (\alpha_i \sigma_i = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sigma_i)$$

同じローマ文字の添え字では和を取ることにします。 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は適当な実数です、行列成分を書けば

$$U_{ab} = \exp\left[\frac{i}{2}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{ab}\right] \quad (a = 1, 2)$$

ゲージ理論と同じように $SU(2)$ 変換の不変性を要求して、相互作用項を導入します。ただし、ここでは大局的変換で、大局的変換ではディラック場の項は不変です。なので、ゲージ原理のように導入せずに、単純に $SU(2)$ 変換で不変な項として相互作用項を加えます。ここでの $SU(2)$ 変換の不変性の要求は、簡単に言えば、陽子と中性子の2重項のアイソスピンは σ_3 の固有値と勝手にしたものなので、 $SU(2)$ 変換で変えても核力に影響はないはずということです。

核力はパイオンによって媒介されているので、3種類のパイオンを $SU(2)$ 変換で不変になるように導入する必要があります。3種類のパイオンは質量が似ているので、パイオンでもアイソスピンを与えるなら、アイソスピン $+1, 0, -1$ による3重項となります。しかし、今の $SU(2)$ 変換は 2×2 行列なので3重項には作用させられません。なので、 $SU(2)$ の 3×3 行列 (3次元表現) とそれが作用する3次元ベクトルを作ります。

まず、2重項をパラメータを使った形にします。2重項を基底 $|+\rangle = (1 \ 0)$, $|-\rangle = (0 \ 1)$ によるベクトルとします (スピン上向き、下向きと同じ)。そうすると、線形結合によって任意の2重項は (これは $SU(2)$ 変換は2次元複素ベクトル空間上で作用することに対応)

$$\Psi = C_1|+\rangle + C_2|-\rangle$$

定数 C_1, C_2 は $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$ と規格化します。 C_1, C_2 は複素数なので

$$C_1 = |C_1|e^{ia_1}, \quad C_2 = |C_2|e^{ia_2}$$

a_1, a_2 は実数です。規格化から、 θ を定数として

$$C_1 = e^{ia_1} \cos \frac{\theta}{2}, \quad C_2 = e^{ia_2} \sin \frac{\theta}{2}$$

と書き換え (規格化の条件から 4 個の任意定数は 3 個になる)、 a_1, a_2 を

$$a_1 = \delta - \frac{\phi}{2}, \quad a_2 = \delta + \frac{\phi}{2}$$

と置きなおせば

$$C_1 = e^{i\delta} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad C_2 = e^{i\delta} e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

これらを使って $\Psi^\dagger \sigma_i \Psi$ を計算してみると

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger \sigma_1 \Psi &= (e^{-i\delta} e^{i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\delta} e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\delta} e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= (e^{-i\delta} e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}, e^{-i\delta} e^{i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}) \begin{pmatrix} e^{i\delta} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\delta} e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= (e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \phi \sin \theta \quad (\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \sin \theta) \end{aligned}$$

同様に求めると

$$\Psi^\dagger \sigma_1 \Psi = \cos \phi \sin \theta, \quad \Psi^\dagger \sigma_2 \Psi = \sin \theta \sin \phi, \quad \Psi^\dagger \sigma_3 \Psi = \cos \theta$$

これは極座標 ($r = 1, \theta, \phi$) での単位ベクトルなので、 $\Psi^\dagger \sigma_i \Psi$ は 3 次元ベクトルと言えます。

3 次元ベクトルができたので、 $SU(2)$ 変換に対する変換性を求めます。 Ψ を $SU(2)$ 変換すると

$$\mathbf{V}' = \Psi'^\dagger \sigma_i \Psi' = \Psi^\dagger U^\dagger \sigma_i U \Psi$$

ハウスドルフの公式を使って

$$U^\dagger \sigma_i U = e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2} \sigma_i e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2} = \sigma_i - \frac{i}{2} \alpha_j [\sigma_j, \sigma_i] - \frac{1}{8} \alpha_k \alpha_j [\sigma_k, [\sigma_j, \sigma_i]] + \cdots$$

ここで 3×3 行列 L_j を

$$(L_j)_{ik} = -i\epsilon_{ikj}$$

と定義します ($(L_j)_{ik}$ は L_j の i, k 成分の意味)。これは 3 次元回転の生成子です。第 2 項は

$$\frac{1}{2}\alpha_j[\sigma_j, \sigma_i] = i\alpha_j\epsilon_{jik}\sigma_k = i\alpha_j\epsilon_{ikj}\sigma_k = \alpha_j(L_j)_{ik}\sigma_k = A_{ik}\sigma_k \quad (A_{ik} = (\alpha_j L_j)_{ik} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L})_{ik})$$

第3項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\alpha_k\alpha_j[\sigma_k, [\sigma_j, \sigma_i]] &= \frac{i}{4}\alpha_k\alpha_j\epsilon_{jil}[\sigma_k, \sigma_l] = -\frac{1}{2}\alpha_k\alpha_j\epsilon_{jil}\epsilon_{klm}\sigma_m \\ &= -\frac{1}{2}\alpha_j\epsilon_{ilj}\alpha_k\epsilon_{lmk}\sigma_m \\ &= \frac{1}{2}\alpha_j(L_j)_{il}\alpha_k(L_k)_{lm}\sigma_m \\ &= \frac{1}{2}A_{il}A_{lm}\sigma_m \\ &= \frac{1}{2}(A^2)_{im}\sigma_m \end{aligned}$$

これから

$$U^\dagger\sigma_i U = (\delta_{ik} + iA_{ik}\sigma_k - \frac{1}{2}(A^2)_{ik})\sigma_k = (e^{iA})_{ik}\sigma_k = (e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L}})_{ik}\sigma_k$$

となるので

$$\begin{aligned} V'_i &= \Psi'^\dagger\sigma_i\Psi' = \Psi^\dagger U^\dagger\sigma_i U\Psi = \Psi^\dagger(e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L}})_{ik}\sigma_k\Psi \\ &= \Psi_a^\dagger(e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L}})_{ik}(\sigma_k)_{ab}\Psi_b \quad (a = 1, 2) \\ &= (e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L}})_{ik}\Psi^\dagger\sigma_k\Psi \\ &= (e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{L}})_{ik}V_k \end{aligned}$$

このように $SU(2)$ 変換は3次元ベクトルに対する3次元回転変換となります。簡単に言えば、 $SU(2)$ の2次元表現 (基本表現) から3次元表現 (随伴表現) を具体的に求めたということです (「 $SU(2)$ と表現」参照)。

話を核子に戻します。3次元でのベクトルが作れたので、後はもう1つベクトルを適当に用意して内積を取れば $SU(2)$ 変換としての3次元回転で不変になります。そのベクトルを π とする

$$\Psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Psi \cdot \boldsymbol{\pi} = \Psi^\dagger \sigma_i \pi_i \Psi$$

としたものを相互作用項とします。 π_i はベクトルなので3成分持つことから、3種類のパイオンを当てはめられます。そして、アイソスピンによる $SU(2)$ の3次元表現でのベクトルなので、 π_i はアイソスピン1を持つ3重項となります (スピン1/2は2次元表現、スピン1は3次元表現と同じ)。

というわけで、全体のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\Psi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3\partial_\mu\pi_i\partial^\mu\pi_i - \frac{1}{2}m_\pi^2\sum_{i=1}^3\pi_i^2 + g\sum_{i=1}^3\Psi^\dagger\sigma_i\pi_i\Psi$$

3次元ベクトルの和の記号は書いています。第2項と第3項もベクトルの内積なので、3次元回転で不変です。相互作用項は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} &= \begin{pmatrix} 0 & \pi_1 \\ \pi_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\pi_2 \\ i\pi_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_3 & 0 \\ 0 & -\pi_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi^0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ -\sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} \quad (\pi^\pm = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2), \pi^0 = \pi_3)\end{aligned}$$

なので

$$g\Psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \Psi = g\pi^0 \psi_p^\dagger \psi_p - g\pi^0 \psi_n^\dagger \psi_n - \sqrt{2}g\pi^+ \psi_p^\dagger \psi_n - \sqrt{2}g\pi^- \psi_n^\dagger \psi_p$$

$\pi^\pm$ は複素共役の関係になっており、電荷を持ちます (複素スカラー場)。このように1つの結合定数だけで、陽子と中性子の組み合わせによる相互作用項になります。ただし、パイオンは空間反転で符号が反転する擬スカラーなので、それに加える必要があります。ガンマ行列の組み合わせによる擬スカラーは $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ なので、相互作用項は

$$g \sum_{i=1}^3 \bar{\Psi} \gamma_5 \sigma_i \pi_i \Psi$$

これがパイオンを媒介粒子とした核力のラグランジアンとなり、フェルミオン-フェルミオン-ボソンで構成される湯川理論です。

・補足

$SU(2)$ 変換が2次元回転変換になることを示します。単位ベクトル $\mathbf{n}$ を3次元極座標 ($r=1, \theta, \phi$) として

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad n_3 = \cos \theta$$

$\mathbf{n}$ 方向での $SU(2)$ 変換として U を

$$U = \exp[i\alpha \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] = 1 + i\alpha \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}(i\alpha \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 + \dots$$

exp 内の $1/2$ は省いています。 $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ なので

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 = \sigma_i n_i \sigma_j n_j = (2\delta_{ij} - \sigma_j \sigma_i) n_i n_j = 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$$

同じローマ文字の添え字では1から3の和を取ります。これを使っていくと

$$U = 1 + i\alpha \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2}\alpha^2 + \dots = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots) = \cos \alpha + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \alpha$$

と変形できます。 $\theta = \phi = \pi/2$ と選べば

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi = 0$$

$$n_2 = \sin \theta \sin \phi = 1$$

$$n_3 = \cos \theta = 0$$

よって

$$U = \begin{pmatrix} \cos \alpha + in_3 \sin \alpha & in_1 \sin \alpha + n_2 \sin \alpha \\ in_1 \sin \alpha - n_2 \sin \alpha & \cos \alpha - in_3 \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

となり、2次元回転となります。